

SPECTRAL法による非線形偏微分方程式の数値解法

Numerical Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations

by Fourier Spectral Method

河野幸夫* 今村文彦**

By Yukio KONO and Fumihiko IMAMURA

The Fourier spectral method which uses the Fourier transform and the Fourier inverse transform are applied to the nonlinear and linear partial differential equations. The partial differential equation becomes the ordinary differential equation after the Fourier transform used and it is solved by the Runge-Kutta method. The solutions of linear Burgers' equation are carefully checked by being compared with the analytical solutions and this method was applied to nonlinear Burgers' equation. The initial conditions are $\cos x$, $\sin x$ and Gaussian distribution.

Keywords : numerical analysis, Fourier spectral method, nonlinear Burgers' equation

1. はじめに

近年の数値計算機能力の向上や差分法や有限要素法の発展により種々の数値モデルの解法が行われてきている。ただし、非線形方程式に対しては、非線形の扱い方により不安定の発生する問題もあり、精度の高い数値計算結果を得ることは難しい。この非線形不安定性は、おもに離散化誤差によるものであり、有限に波数域を限定することにより高波数成分が折返し の原理によって低波数領域に現われるためである。この問題に対しては波数空間で扱うことにより回避することができ、これが Spectral 法の特長の 1 つとなっている。特に、乱流問題などでその適用が注目されている。そこで、本研究は、Burgers 方程式を例に線形・非線形問題への Spectral 法の有効性と問題点について考察する。

2. 線形 Burgers 方程式の解法

2.1 Fourier変換

* 正会員 M S 東北学院大学講師 工学部土木工学科
(〒985 宮城県多賀城市中央 1-13-1)

** 正会員 工博 東北大学助教授 工学部災害制御研究センター
(〒980 宮城県仙台市青葉区荒巻青葉)

変数 $U(x,t)$ に対して、次の Fourier 変換を行なう。

$$\tilde{U}_{(k,t)} = \int_{x_0}^{x_{N-1}} U(x,t) e^{-ikx} dx \quad \text{--- (1)}$$

ここで、 k : 波数、 $\tilde{U}_{(k,t)}$: Fourier 係数、 x : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ ($-\pi, +\pi$)となる。従って、Fourier 逆変換は

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2} \tilde{U}_{(k,t)} e^{ikx} dk \quad \text{--- (2)}$$

となる。このとき x に関する高次微分項は

$$\frac{\partial^n U}{\partial x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2} (ik)^n \tilde{U}_{(k,t)} e^{ikx} dk \quad \text{--- (3)}$$

となり x 、 t の偏微分方程式を t だけの常微分方程式に変換することができる。

2.2 Fourier Spectral 法による解法

線形問題としての Burgers 方程式（一次元拡散方程式と同じ）を扱う。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{--- (4)}$$

ここで、 ν : 動粘性係数または拡散係数
(4) 式は x 、 t に関する偏微分方程式であるが (2) - (3) 式で示されたフーリエ逆変換式を (4) 式に代入することにより、次のように t に関する常微分方程式となる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2} \frac{d\tilde{U}_{(k,t)}}{dt} e^{ikx} dk = \frac{\nu}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2} (ik)^2 \tilde{U}_{(k,t)} e^{ikx} dk \quad \text{--- (5)}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2} \left(\frac{d\tilde{U}_{(k,t)}}{dt} - \nu (ik)^2 \tilde{U}_{(k,t)} \right) e^{ikx} dk = 0 \quad \text{--- (6)}$$

すべての k に対して上式 (6) は成立する必要があるため

$$\frac{d\tilde{U}_{(k,t)}}{dt} - \nu (ik)^2 \tilde{U}_{(k,t)} = 0 \quad \text{--- (7)}$$

が成り立つ。これは t の 1 階の常微分方程式となる。従って、初期値 $\tilde{U}_{(k,0)}$ を与えればこの常微分方程式 (7) 式は 4 次の Runge-Kutta 法により精度良く求まる。得られた値 $\tilde{U}_{(k,t)}$ は (2) 式を用いて逆変換すれば偏微分方程式の解 $U_{(k,t)}$ が求められる。

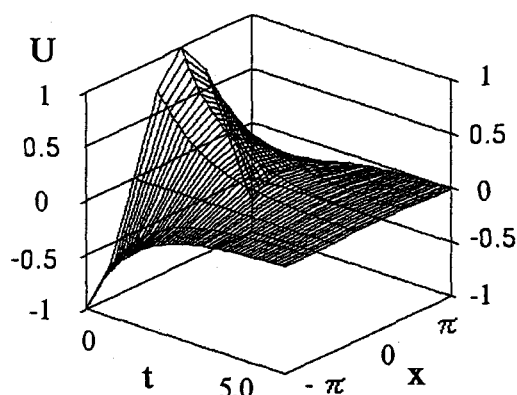


図 - 1 Result of spectral method
 $\cos x, N=8, dt=0.1, 3D$ graph

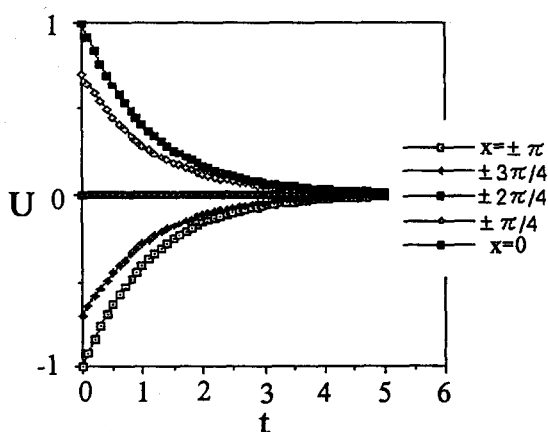


図 - 2 Result of Spectral method
 $\cos x, N=8, dt=0.1, U-t$ graph

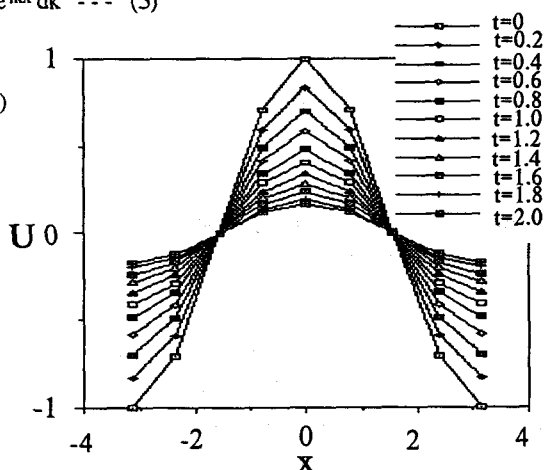


図 - 3 Result of spectral method
 $\cos x, N=8, dt=0.1, U-x$ graph

2.3 解析結果

初期値としては $\cos x$ および $\sin x$ を用いた。 x の範囲は $-\pi$ より π までをとる。この時、 $N=8$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/4$ 、 $N=16$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/8$ 、 $N=32$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/16$ となる。図-1,2,3 は $\cos x$ 、 $N=8$ 、 $dt=0.1$ の場合の解析結果である。

2.4 厳密解との比較

$U(x,t)=e^{-t}\cos x$ は偏微分方程式 $U_t = U_{xx}$ 、初期条件 $U(x,0) = \cos x$ の場合の厳密解であり、同様に、 $U(x,t)=e^{-t}\sin x$ は偏微分方程式 $U_t = U_{xx}$ 、初期条件 $U(x,0) = \sin x$ の場合の厳密解である。

図-4 は初期値 $\cos x$ についての厳密解と Fourier Spectral 法による数値解とを2次元の $u-x$ グラフ上にて比較した結果で非常に一致しており、 $\sin x$ においても同様の結果である。

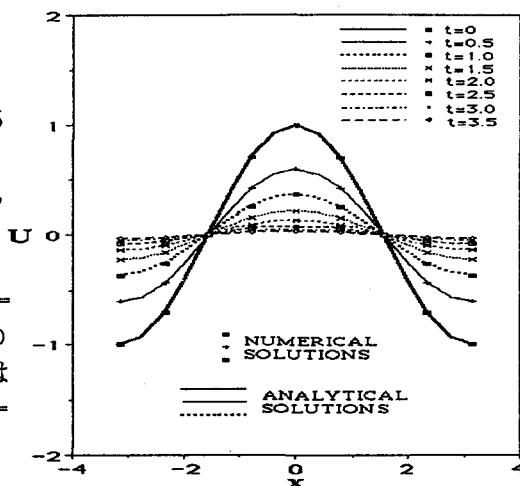


図-4 Analytical solution and numerical solution initial condition $\cos x$

2.5 安定条件

線形及び非線形問題の解法において、 x 方向に関しては Fourier Transform によって置き換えられ、 t 方向への常微分方程式の数値解法には4次の Runge-Kutta 法が用いられる。この時、線形問題の解の安定計算は次のようになる。線形問題としての一次元 Burgers 方程式は(4)式であり、常微分方程式は(7)式で表される。故に、常微分方程式は(8)式となり、これを4次の Runge-Kutta 法を用いて解くことになる。

$$\frac{d\tilde{U}_{(k,t)}}{dt} = -k^2 v \tilde{U}_{(k,t)} \quad \text{--- (8)}$$

$$f(t, \tilde{U}) = -k^2 v \tilde{U} = f(\tilde{U}) \quad \text{--- (9)}$$

ここで、 $\alpha = \Delta t k^2 v$

$$\kappa_0 = \Delta t f(\tilde{U}_n) = -\Delta t k^2 v \tilde{U}_n = -\alpha \tilde{U}_n$$

$$\kappa_1 = \Delta t f(\tilde{U}_n + \frac{\kappa_0}{2}) = -\alpha (1 - \frac{\alpha}{2}) \tilde{U}_n$$

$$\kappa_2 = \Delta t f(\tilde{U}_n + \frac{\kappa_1}{2}) = -\frac{\alpha}{4} (\alpha^2 - 2\alpha + 4) \tilde{U}_n$$

$$\kappa_3 = \Delta t f(\tilde{U}_n + \kappa_2) = -\frac{\alpha}{4} (\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha - 4) \tilde{U}_n$$

と置けば、

$$\tilde{U}_{n+1} = \tilde{U}_n + \frac{1}{6} (\kappa_0 + 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + \kappa_3) = \frac{1}{24} (\alpha^4 - 3\alpha^3 + 10\alpha^2 - 20\alpha + 24) \tilde{U}_n \quad \text{--- (10)}$$

が得られる。

増幅係数 $|a|$ は $|a| = \frac{1}{24} (\alpha^4 - 3\alpha^3 + 10\alpha^2 - 20\alpha + 24)$ となり、

$$|a| \leq 1 \quad \text{より} \quad -24 \leq \alpha^4 - 3\alpha^3 + 10\alpha^2 - 20\alpha + 24 \leq 24 \quad \text{となる。}$$

α は正の値であるので、次の2式で表すことができ、

$$\alpha^4 - 3\alpha^3 + 10\alpha^2 - 20\alpha + 48 \geq 0 \quad \text{--- (11a)}$$

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 10\alpha - 20 \leq 0 \quad \text{--- (11b)}$$

この2式を満たす条件は $0 \leq \alpha \leq 2.3$ となり、よって、 $k=2\pi/L$ より、その条件は(12)式となる。

$$\Delta t \leq \frac{2.3}{v k^2} = \frac{2.3}{v} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \quad \text{--- (12)}$$

今、一番小さい波長（Nyquist 成分）に対して（12）式の成立条件を求めると、 $L = 2 \, dx$ であるので、

$$\Delta t \leq \frac{2.3}{v} \left(\frac{dx}{\pi} \right)^2 \quad \text{--- (13)}$$

となる。

3. 非線形 Burgers 方程式の解法

3.1 Fourier Spectral 法による解析

非線形 Burgers 方程式は以下に示すものとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{--- (14)}$$

上式に線形問題と同様に Fourier 逆変換を代入すると次のようになる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2-1} \frac{d \tilde{U}_{(k,t)}}{dt} e^{ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2-1} \left(\tilde{U}_{(k,t)} \frac{\partial \tilde{U}_{(k,t)}}{\partial x} \right) e^{ikx} dk = \frac{v}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2-1} (ik)^2 \tilde{U}_{(k,t)} e^{ikx} dk \quad \text{--- (15)}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N/2}^{N/2-1} \left\{ \frac{d \tilde{U}_{(k,t)}}{dt} + \left(\tilde{U}_{(k,t)} \frac{\partial \tilde{U}_{(k,t)}}{\partial x} \right) - v (ik)^2 \tilde{U}_{(k,t)} \right\} e^{ikx} dk = 0$$

ここで全ての k に対して成立するために

$$\frac{d \tilde{U}_{(k,t)}}{dt} + \left(\tilde{U}_{(k,t)} \frac{\partial \tilde{U}_{(k,t)}}{\partial x} \right) + v k^2 \tilde{U}_{(k,t)} = 0 \quad \text{--- (16)}$$

が成り立つ。この非線形項は次の式で表され

$$\left(\tilde{U}_{(k,t)} \frac{\partial \tilde{U}_{(k,t)}}{\partial x} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_{N-1}} \left(U_{(k,t)} \frac{\partial U_{(k,t)}}{\partial x} \right) e^{ikx} dx \quad \text{--- (17)}$$

$v = \partial U / \partial X$ と置くとフーリエ変換より

$$(\widehat{UV}) = \int_{x_0}^{x_{N-1}} UV e^{-ikx} dx \quad \text{--- (18)}$$

となる。ここで、（18）式の計算では、物理空間での値（ U, V ）に対して、有限 Fourier 変換を行ない求めるのが通常である。しかし、ここでも計算数を限定することにより、（18）式の値は（19）式になることがわかる。

（19）式の下線で示した項は、Fourier-Spectral 法における Aliasing Error であり、この項を入れると非線形効果を正しく評価することが出来ない。本来（16）式は（20）式となるべきである。

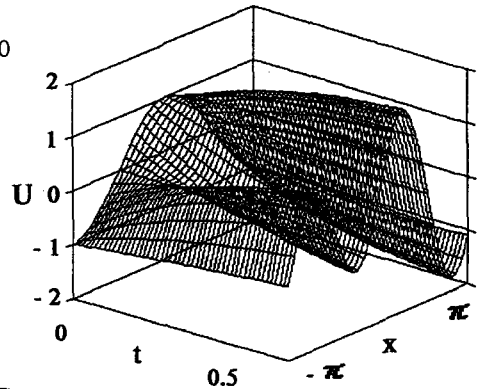


図 -5 Result of nonlinear PDE
cos x, N=32, dt=0.01, 3D graph

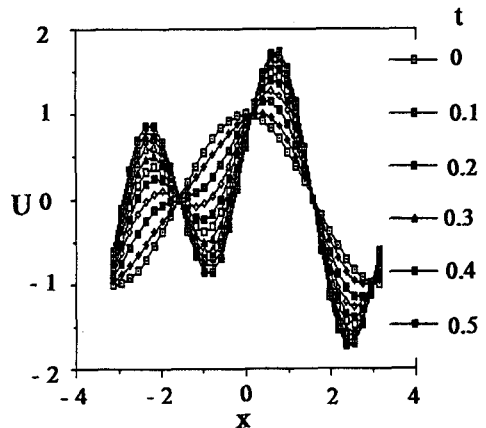


図 -6 Result of nonlinear PDE
cos x, N=32, dt=0.01, U-x graph

$$(\widehat{UV}) = \sum_{p+q=k} \widehat{U}_p \widehat{V}_q + \underbrace{\sum_{p+q=k \pm N} \widehat{U}_p \widehat{V}_q}_{\text{Aliasing Error}} \dots (19)$$

$$\frac{d\widehat{U}}{dt} + (ik) \sum_{k=p+q} \widehat{U}_p \widehat{V}_q + \nu k^2 \widehat{U} = 0 \dots (20)$$

(19) 式第2項の Aliasing Error を小さくするためには、2つの方法が提案されている[Canuto ら (1987)]。1つは折返し領域が予め分かるので対象とする波数領域より大きく(具体的には3/2倍)とおくことによる Padding の方法。もう1つは、位相シフトを利用して(19)式の第2項に値は同じであるが符号の異なる項を設け、加えることにより第2項を消去させようという考え方である。本研究では、(18)式 of 非線形項を求めるのに物理空間から Fourier 変換を行わずに、すべて波数空間で処理を行ない、直接(20)式を用いて計算を行なった。非線形項の級数和を求めるために計算時間が多く必要となるが、逆に毎時間ステップで Fourier 変換を行わずに済むという利点もある。

3.2 解析結果と問題点

いま、(20)式において、線形問題と同じ条件下($\nu = 1$)で解析した結果を図5と6に示す。非線形効果により基本モードの2倍波数成分が生じるが、これは時間とともに増大していることがわかる。この原因として Energy Cascade が考えられる。例えば、運動エネルギー総和の保存は成立しているが、時間とともに波長の短い波にエネルギーがたまる現象である。

Energy Cascade に対しては、差分法の中で次のような方法が提案されている。1つは Arakawa(1966)の方法であり、非発散バロトロピックモデルの考えの下エンストロフィー(運動エネルギー×波数の2乗)の保存を条件とするものである。また一方、Harten(1984)が提案している Total Variation - Stable という概念を導入した TVD 法がある。しかし、いずれも直接 Fourier - Spectral 法に導入することは難しく今後の課題である。

4. おわりに

Fourier - Spectral 法による非線形方程式への適用には Energy Cascade の問題を解決する必要があるが、エンストロフィー保存条件を利用した方法の開発を行えば、その適用性は高い。一方、Cole-Hopf 変換(Burgers, 1974)を行い、非線形方程式を線形化する解法も考えられるが、多次元への拡張が難しいため、この Cole-Hopf 変換そのものの改良が必要となる。

参考文献

1. Arakawa, A (1966): Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two dimensional incompressible flow Part I, J. Comput. Phys, pp. 119-143.
2. Burgers, J. M. (1974): "The nonlinear diffusion equations" (D. Reidel Inc.), pp. 173
3. Canuto, C., M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang (1987): "Spectral Methods in Fluid Dynamics" (Springer-Verlag), pp. 529
4. Harten, A. (1984): On a class of high resolution total variation-stable finite-difference scheme, SIAM, Numerical Analysis 21, pp. 1-23
5. 河野幸夫、今村文彦 (1991): スペクトル法によるバーガース方程式の数値解法、土木学会第46回年次学術講演会, pp. 960 - 961.
6. Yukio Kono (1988): Soliton Analysis by Method of Lines, Proceeding of International Conference on Natural and Manmade Hazards in Coastal Zones, pp. 173 - 177.