

# 高精度な陽的補間多項式の開発

## Development of highly-accurate and explicit interpolation polynomial

小松 利光\*・朝位孝二\*\*・水沼道博\*\*\*

By Toshimitsu KOMATSU, Koji ASAI  
and Michihiro MIZUNUMA

A new interpolative cubic polynomial (INDUS) has been developed by using the Six-point scheme, which was originally developed for calculation of pure advection. INDUS has almost the same accuracy as spline function and is much more accurate than Newton's forward interpolation. Since INDUS can be treated very easily because of its explicitness, it is expected that this will be used so often in science and engineering fields.

Keywords : Interpolation formula, INDUS, 6-point scheme, Spline function

### 1. はじめに

離散的に与えられたデータを通るような近似式をつくることにより、与えられたデータ以外の点の値を求める方法が補間法である。実験や実測で得られるデータは離散的であることが多いので、補間法は理工学の実分野でもよく用いられる。代表的なものとしてLagrange補間式、Newton補間式<sup>1)</sup>、spline関数<sup>2)</sup>などが挙げられる。Lagrange補間式とNewton補間式は補間区間全体を1つの多項式で表わすものであり、データ個数が増大すると高次の多項式を用いることになるので一般に振動が大きくなる。物理現象においてはある領域における変化が他の領域における変化と無関係かもしくは関係があっても弱い場合も見られる。1つの多項式で補間すると1つの部分領域の変化が全体に影響を及ぼすことになり、物理現象の補間として適さない場合がある。一方、spline関数は区分多項式であり、余分な振動の少ない滑らかな曲線を与えることができるため、最も広く用いられる補間法となっている。しかしながらspline関数はデータ個数と同数元の連立方程式を解く必要があり、データの数が増大すると、コンピューターの容量や計算時間に問題が生じてくる。

本研究は、元々移流方程式のための高精度数値計算法として開発された6-point スキーム<sup>3)</sup>が、計算格子間の高精度補間多項式の性格をもつという点に着目し、6-point スキームに基づいて高精度かつ簡便な補間多項式を開発することを試みたものである。

---

\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科  
\*\* 正会員 工修 九州大学助手 工学部水工土木学科  
\*\*\* 学生員 九州大学大学院工学研究科修士課程水工土木学専攻  
(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

## 2. 6-pointスキームを用いた補間多項式の誘導

### (2.1) 6-pointスキーム

1次元純移流方程式は次式で表わされる

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

ここでCは拡散物質の濃度、uは移流速度である。(1)式を特性曲線表示すると次のようになる。

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \text{上で} \quad \frac{dC}{dt} = 0 \quad (2)$$

(2)式は図-1に示す特性曲線上でCの値が変化し

ないことを意味している。(i, n+1)を通過する特性曲線とn time stepの交点はX<sub>i</sub>点からξ(=uΔt)だけ離れており、この点をξ点とするとC<sub>ξ</sub><sup>n+1</sup>=C<sub>ξ</sub><sup>n</sup>となる。したがってn+1stepのC<sub>ξ</sub><sup>n+1</sup>を求めるためには、nstepにおいて計算格子点上にないξ点のCの値を精度良く推定すればよい。6-pointスキームはξ点の左右の6つの格子点上のCの値を用いて内挿多項式を構成し、その式からC<sub>ξ</sub><sup>n</sup>の値を求める方法であるが、これはX<sub>i-1</sub>~X<sub>i</sub>区間を精度よく内挿する補間多項式に他ならない。6-pointスキームの詳細な誘導は文献(3)を参照してもらうことにして、最終的な式形を示すと次のようになる。

$$C_{\xi}^n = Y(\alpha) = b_1 \alpha^3 + b_2 \alpha^2 + b_3 \alpha + C_i^n \quad (3)$$

$$\begin{cases} b_1 = a_{11} C_{i-3}^n + a_{12} C_{i-2}^n + a_{13} C_{i-1}^n + a_{14} C_i^n + a_{15} C_{i+1}^n + a_{16} C_{i+2}^n \\ b_2 = a_{21} C_{i-3}^n + a_{22} C_{i-2}^n + a_{23} C_{i-1}^n + a_{24} C_i^n + a_{25} C_{i+1}^n + a_{26} C_{i+2}^n \\ b_3 = a_{31} C_{i-3}^n + a_{32} C_{i-2}^n + a_{33} C_{i-1}^n + a_{34} C_i^n + a_{35} C_{i+1}^n + a_{36} C_{i+2}^n \end{cases}$$

|                     |                     |                    |
|---------------------|---------------------|--------------------|
| $a_{11} = -0.01806$ | $a_{21} = -0.03828$ | $a_{31} = 0.05633$ |
| $a_{12} = 0.2570$   | $a_{22} = 0.05276$  | $a_{32} = -0.3097$ |
| $a_{13} = -0.6806$  | $a_{23} = 0.6480$   | $a_{33} = 1.033$   |
| $a_{14} = 0.6806$   | $a_{24} = -1.394$   | $a_{34} = -0.2869$ |
| $a_{15} = -0.2570$  | $a_{25} = 0.8236$   | $a_{35} = -0.5667$ |
| $a_{16} = 0.01806$  | $a_{26} = -0.09245$ | $a_{36} = 0.07439$ |

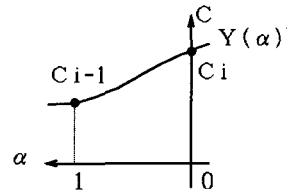


図-2 α座標系

ここでαはクーラン数でありα=ξ/Δxで定義される。

(3)式はαを変数とする3次多項式であり、図-2に示すようにXの負の向きを正とする座標系で定義されている。

### (2.2) 新しい補間多項式の誘導

上述のように(3)式はX<sub>i-1</sub>~X<sub>i</sub>間の高精度補間3次多項式としての性格を持っている。したがって各格子間にそれぞれ(3)式を適用すれば全点を内挿する補間区分多項式を得ることができる。しかしながらその場合、各区分多項式は格子点上で値は連続で繋がるが、勾配は連続になるとは限らない。したがって(3)式を補間多項式として適用しても常に自然で滑らかな繋がりを持つ補間曲線が得られるとは限らない。そこで(3)式を補間多項式として直接適用するのではなく、格子

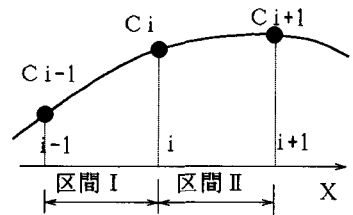


図-3 勾配の記号説明

点上の勾配と値を用いて新たに補間多項式を構成することを試みる。X<sub>i</sub>点における勾配をCX<sub>i</sub>とする。図-3における区間Iに(3)式を適用して得られる補間式から求めたX<sub>i</sub>点の勾配を(CX<sub>i</sub>)<sub>1</sub>とし、区間IIに同様に(3)式を適用して求めたX<sub>i</sub>点の勾配を(CX<sub>i</sub>)<sub>2</sub>とするとそれぞれ以下のように表わされる。

$$\dot{Y}_Q(\alpha)|_{\alpha=0} = (CX_i)_I = 0.05633C_{i-3} - 0.3097C_{i-2} + 1.033C_{i-1} - 0.2870C_i - 0.5665C_{i+1} + 0.07441C_{i+2} \quad (4)$$

$$\dot{Y}_{QI}(\alpha)|_{\alpha=1} = (CX_i)_{II} = -0.07441C_{i-2} + 0.5665C_{i-1} + 0.2870C_i - 1.033C_{i+1} + 0.3097C_{i+2} - 0.05633C_{i+3} \quad (5)$$

$(CX_i)_I$  と  $(CX_i)_{II}$  の平均値を新たに  $X_i$  点の勾配とする。  $CX_i$  は次式のようになる。

$$CX_i = 0.02817C_{i-3} - 0.19205C_{i-2} + 0.7996C_{i-1} - 0.7996C_{i+1} + 0.19205C_{i+2} - 0.02817C_{i+3} \quad (6)$$

$X_{i-1} \sim X_i$  間を補間する多項式の次数を3次とすれば、格子点上の値  $C_{i-1}$ ,  $C_i$  と (6)式によって推定される格子点上の勾配  $CX_i$ ,  $CX_{i-1}$  の4個の条件から3次の多項式が次のように決定できる。

$$Y(\alpha) = P_i \alpha^3 + Q_i \alpha^2 + R_i \alpha + S_i \quad (7)$$

$$P_i = 0.02817C_{i-4} - 0.1639C_{i-3} + 0.6076C_{i-2} - 1.2004C_{i-1} + 1.2004C_i - 0.6076C_{i+1} + 0.1639C_{i+2} - 0.02817C_{i+3}$$

$$Q_i = -0.02817C_{i-4} + 0.1357C_{i-3} - 0.4155C_{i-2} + 1.4008C_{i-1} - 2.2004C_i + 1.407C_{i+1} - 0.3559C_{i+2} + 0.5633C_{i+3}$$

$$R_i = 0.02817C_{i-3} - 0.19205C_{i-2} + 0.7996C_{i-1} - 0.7996C_{i+1} + 0.19205C_{i+2} - 0.02817C_{i+3}$$

$$S_i = C_i$$

(7)式を  $x$  の正の向きを正とする座標系で定義しなおし、 $\alpha$  の代わりに  $\beta (\equiv 1 - \alpha = (X - X_{i-1}) / (X_i - X_{i-1}))$  を用いて整理すると最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} Y(\beta) = & -P_i \beta^3 + (3P_i + Q_i) \beta^2 + (-3P_i - 2Q_i - R_i) \beta + P_i + Q_i + R_i + S_i \\ = & (-0.02817C_{i-4} + 0.1639C_{i-3} - 0.60755C_{i-2} + 1.2004C_{i-1} - 1.2004C_i \\ & + 0.60755C_{i+1} - 0.1639C_{i+2} + 0.02817C_{i+3}) \beta^3 \\ & + (0.05633C_{i-4} - 0.3559C_{i-3} + 1.407C_{i-2} - 2.2004C_{i-1} + 1.4008C_i \\ & - 0.4155C_{i+1} + 0.1357C_{i+2} - 0.02817C_{i+3}) \beta^2 \\ & + (-0.02817C_{i-4} + 0.19205C_{i-3} - 0.7996C_{i-2} + 0.7996C_{i+1} \\ & - 0.19205C_{i+2} + 0.02817C_{i+3}) \beta \\ & + C_{i-1} \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式が本論文で提案する  $X_{i-1} \sim X_i$  間の新しい区分補間多項式であり、以降はINDUS法 (Interpolative Divided Polynomial by Using Six-point scheme) と呼ぶことにする。適用する際は、各計算格子間毎に個別に(8)式を用いればよい。各格子間に渡って値も勾配も連続で滑らかな補間曲線が得られる。

### 3. INDUS法の精度の検証

#### 3.1 時系列データの補間

補間法を応用する場合、データの変動スケールに対して測定点の間隔が十分小さくない場合には必ずしも良好なデータを補間し得るとは限らない。また補間精度を議論するには、ある程度広範囲な周波数のランダム成分を含んだデータを用いる必要があると思われる。そこで、精度の検証及び他の内挿法との比較検討のために乱流中の乱れ速度の時系列データを使用した。実際に用いたのは振動格子乱流、開水路せん断乱流、内部波上の乱流の三例である。各データの乱れ強度の自乗と積分タイムスケールの値を表-1に示す。

表-1 各データの乱れ強度とタイムスケール

|          | $\overline{u^2} \text{ (cm}^2/\text{s}^2\text{)}$ | $T \text{ (s)}$ |
|----------|---------------------------------------------------|-----------------|
| 振動格子乱流   | 76.28                                             | 1.37            |
| 開水路せん断乱流 | 6.59                                              | 6.38            |
| 内部波上の乱流  | 1.52                                              | 0.86            |

計算格子間隔  $\Delta t = 1.0 \text{ s}$  で振動格子乱流の時系列

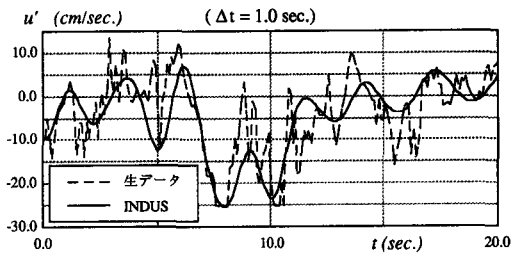


図-4 振動格子乱流データの内挿結果 (INDUS法)

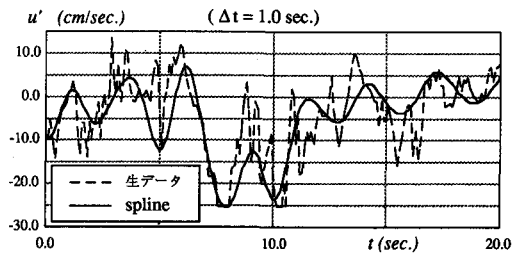


図-5 振動格子乱流データの内挿結果 (spline 関数)

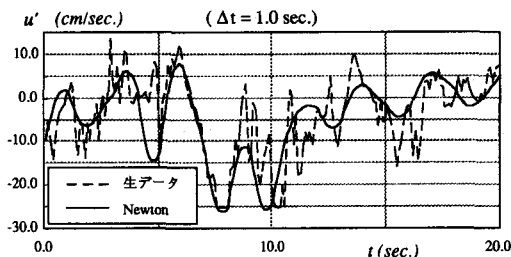


図-6 振動格子乱流データの内挿結果 (Newton法)

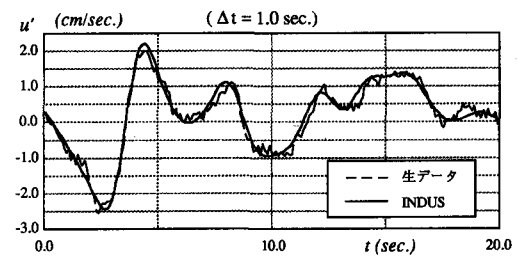


図-7 開水路せん断乱流の内挿結果 (INDUS法)

データを補間した結果を図-4～図-6に示す。補間精度の比較には、前述のNewton法と3次のB-spline関数を用いた。この場合変動タイムスケールに対して計算格子間隔が十分小さいとは言えないので、 $f=1/2\Delta t$ 以上の高周波変動に対して追従しきれていないものの、INDUS法はspline関数とほぼ同程度の補間精度を有することが分かる。

図-7～図-9は $\Delta t=1.0$  sとして開水路せん断流に、図-10～図-12は $\Delta t=0.4$  sとして内部波上の乱流に各補間法を適用した結果である。いずれの場合においてもINDUS法と3次のB-spline関数は同じ条件下ではほぼ同等の補間精度を持ち、これに比べてNewton法の精度は劣ることが分かる。ところで図-4～図-12に示された内挿の計算結果から、補間精度は変動スケールと計算格子間隔の比に強く依存するものと考えられる。そこで、各々の乱流データについて計算格子間隔を変化させて各補間法の比較を行った結果を図-13～図-15に示す。各図において、横軸には $\Delta t$ を積分タイムスケールTで割った無次元量にとり、縦軸は乱れ強度の生データと内挿データ  $u_i$  の差の自乗和の平均値を乱れ強度の自乗和で割った無次元量を示す。図-13～図-15より明らかなように、あらゆる計算格

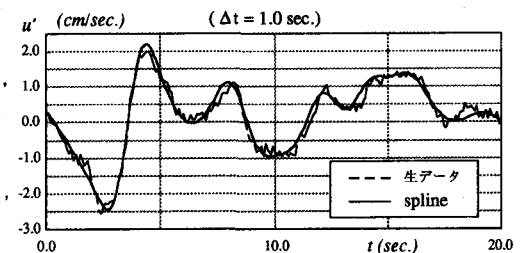


図-8 開水路せん断乱流の内挿結果 (spline 関数)

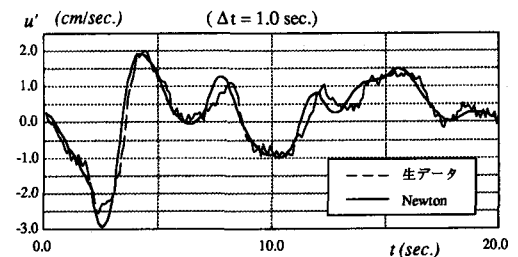


図-9 開水路せん断乱流の内挿結果 (Newton法)

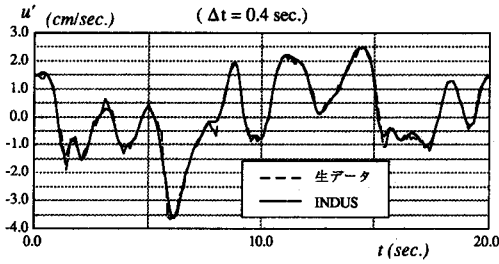


図-10 内部波上の乱流の内挿結果 (INDUS法)

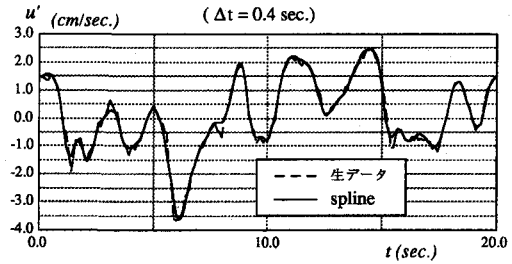


図-11 内部波上の乱流の内挿結果 (spline 関数)

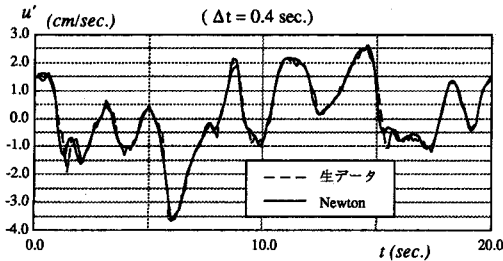


図-12 内部波上の乱流の内挿結果 (Newton法)

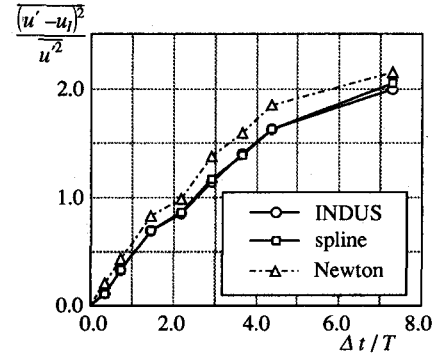


図-13 各補間法の誤差比較 (振動格子乱流)

子間隔についてINDUS法と3次のB-spline関数は同程度の補間精度を有し、この傾向は乱流の種類や性質には依存していないことが分かる。一方、Newton法は計算格子間隔が変動スケールに対して大きい場合、すなわち $\Delta t/T$ が大きいときに誤差が他の2つに比べて特に大きくなる傾向がある。

ところで、補間したい変動現象のスケールが分かっているならば、図-13～図-15に準ずる図を利用することによって、補間の際、許容誤差の範囲内におさまるデータ間隔の限界値を求めることができる。

### 3.2 補間データのスペクトル

時系列的に見たときに補間誤差が小さく見える場合でも、乱れの物理的特性が大幅に変わってしまうは補間法として適しているとは言えない。実際、変動データを3次曲線で補間したことにより周波数特性が大きく変わる可能性がある。そこで振動格子乱流と開水路せん断乱流について生データと補間後の変動データをスペクトル解析し、各乱流データごとにまとめたものが図-16、図-17である。理論上からも $f=1/2\Delta t$ を越える高周波成分については補間計算後の再現性は期待できないが、計算結果もやはり高周波側でエネル

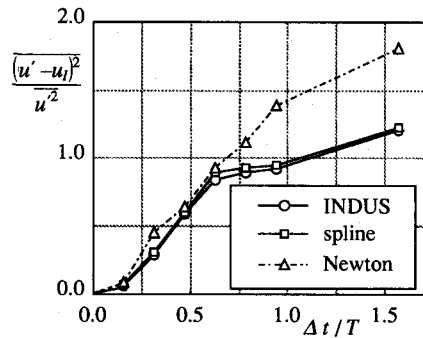


図-14 各補間法の誤差比較 (開水路せん断乱流)

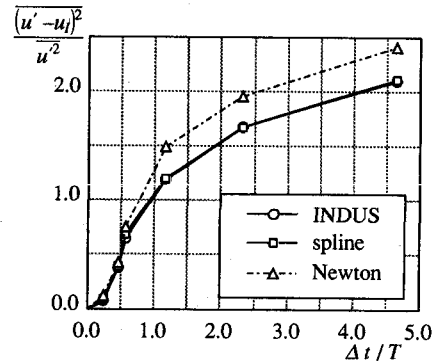


図-15 各補間法の誤差比較 (内部波乱流)

ギーがカットされていることを示している。また高周波成分を含む変動現象を乱流データに比較して滑らかな3次式で補間するために、低周波側のパワースペクトルが増幅される傾向があることが分かる。パワースペクトルを全周波数にわたって積分して乱れエネルギーの値を計算すると、spline関数による補間の場合には乱れの生データのエネルギーと比較してほぼ等しくなっているのに対し、INDUS法による補間の場合にはエネルギーの若干の減少がみられる。これは高周波側でカットされた分が減少しているためであって、むしろ低周波側での再現性は優れているといえよう。

#### 4. おわりに

陽の高精度補間多項式の開発を目的として行われた本研究で得られた主な結果は次の通りである。

- (1) 移流方程式に対する高精度数値計算法の一つである6-point スキームを基礎にして新しい陽的高精度補間法を開発・提案した(INDUS法)。
- (2) INDUS法はスプライン関数と同等の補間精

度を持ち、なおかつ陽形式で定式化されているので数値計算上大幅な簡便性を有する。すなわち、連立方程式を解く必要は全くなく、各格子間毎に個別に(8)式を適用し、それらを繋げればよい。値も勾配も連続で滑らかな補間曲線が得られる。したがって、spline関数による補間法ではコンピュータの記憶容量の関係で計算ができないような膨大なデータ数の補間にもINDUS法は手軽に適用できる。

- (3) 周波数特性の再現性においても、INDUS法による補間は3次のB-spline関数による補間と同等もしくはそれ以上の精度を有する。

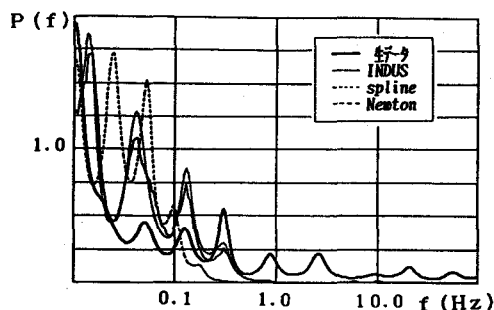


図-16 内挿前・内挿後のスペクトル比較(振動格子乱流)

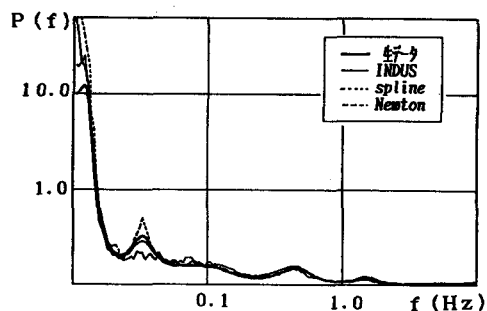


図-17 内挿前・内挿後のスペクトル比較(開水路せん断乱流)

#### 参考文献

- (1) 例えば、日本機械学会編：流れの数値シミュレーション，コロナ社，PP.14～18, 1988
- (2) 例えば、市田浩三，吉本富士男：スプライン関数とその応用，教育出版，PP.29～78, 1979
- (3) Komatsu, T., Holly, F. M., Nakashiki, N. and Ohgushi, K.: "Numerical Calculation of Pollutant Transport in One and Two Dimensions", Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol. 3, No. 2, JSCE, 1985.
- (4) 小松利光：拡散方程式移流項の解析手法の開発，水工学における数値解析手法の精度向上と実用に関する研究報告書，土木学会水理委員会「水理学・水文学における数値計算手法」研究小委員会，PP.1～12, 1992.
- (5) Holly, F. M. Jr. and T. Komatsu: Derivative approximations in the two-point fourth-order method for pollutant transport, Proceedings of the Conference on Frontiers in Hydraulic Engineering, ASCE, pp. 349～355, 1983.