

## Rolling-Grain Ripples の発生の一つの素過程

An elementary process for generating the rolling-grain ripples

柴田正和\*

Masakazu SHIBATA

The rolling-grain ripples appear on a smooth plane bed as on a sediment-laden bed. An interparticle force through hydrodynamic actions at a distance is essential to generate the ripples. The method of matched asymptotic expansions for the low-Reynolds-number flow is employed to obtain the flow induced around a small particle in Stokes boundary layer on the bed. Instability is then examined of a particle lattice having the interparticle force thus obtained, so as to explain a typical feature at an initial stage of the ripple formation. Motion is also simulated of the particles distributed randomly on a bed.

Keywords : rolling-grain ripples, method of matched asymptotic expansions, low-Reynolds-number flow, instability

### 1. はじめに

砂質の浅海底にはさまざまな大きさとパターンをもった砂れんが形成されている。Bagnold<sup>1)</sup> はそれらの砂れんを、その下流側に渦の発生が見られるか否かにより vortex ripples と rolling-grain ripples の二種類に分類した。vortex ripples では渦がその下流側の砂粒子を巻き上げて砂れんの成長と維持に寄与しているが、下流側に渦がみられないような弱い流速の状況下でも発生する小型の砂れんが rolling-grain ripples である。さて Carter, Liu, and Mei<sup>2)</sup> と Kaneko and Honji<sup>3)</sup> の実験は、滑らかな板の上にはばらまかれた粒子の場合でも振動流を与えることにより、この rolling-grain ripples が形成されることを示した。これから、vortex ripples の渦とは定性的に異なる rolling-grain ripples の形成機構は底面の粗滑とは無関係であり、互いに離れた粒子間の流体を媒介とする相互作用であることが推測される。

この相互作用を検討するために、Shibata and Mei<sup>4)</sup> は、1) 粒子の径と近傍流速から定まる Re 数が1より小さく、2) 粒子間隔が粒子の径より大きく、3) 粒子間隔より Stokes 境界層厚さが大きいという条件のもとで、剪断振動流により滑らかな底面の上に置かれた粒子の周りに誘起される流速の場の解析解を求めた。この条件の下で、粒子間隔程度の長さスケールを支配する方程式は流れの方向に関して反対称な移流項をもつ Oseen 方程式となるので、流れ方向に前後の粒子の位置に誘起

\* 正会員 Ph.D. 応用数理解析 (〒244 横浜市戸塚区矢部町 1286 - 7)

される流速場も非対称となる。2節に述べるように、この非対称な流速場による流れ方向に並んだ2粒子間に働く相互作用は引力である。このことは、この誘起流速場を媒介とする粒子間相互作用が rolling-grain ripples の形成機構であることが期待される。

本論文ではまず、Shibata and Mei<sup>4)</sup> の求めた誘起流速場を媒介とする相互作用をもつ粒子の格子を平板上に置いて振動流を作用させたときに、さまざまな波長をもつ擾乱の成長(不安定)の問題を検討し、Kaneko and Honji<sup>3)</sup> の実験の初期段階で観測されたペアリングの発生を裏づける。次に、求められた相互作用をもつ運動方程式を数値的に解くことにより、同じ粒子群をランダムに平板上に置いて振動流を作用させたときに粒子の凝集が起こることを示す。

## 2. 剪断振動流により底面上の小粒子の周りに誘起される流速場<sup>4)</sup>

本節では文献4)の結果を簡単にまとめる。

Carter, Liu, and Mei<sup>2)</sup> 及び Kaneko and Honji<sup>3)</sup> の実験では、粒子の直径  $D$  と粒子の近傍での振動流速の振幅とにより定義される Reynolds 数は1のオーダーであるが、ここではまず

- 1)  $Re \ll 1$  を仮定する。また上記の実験では、粒子を滑らかな板の上にばらまいてそれに振動流を作用させているので、粒子の平均間隔を  $\ell$  とするとき、
- 2)  $D \ll \ell$ , 詳しくは  $(2\pi D / \ell)^2 = O(Re)$  と仮定する。さらに、振動流による Stokes 境界層内の流速分布をそのまま解析的に取り扱うことは困難であるので、Stokes 境界層の厚さを  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  とするとき、
- 3)  $\ell \ll \delta$  と仮定して、Stokes境界層内での振動流を底面からの高さ  $z$  に比例する ( $U_0 z/\delta : U_0$  は境界層外縁での軌道流速の振幅) と近似する。

これらの仮定: 1)  $Re = (U_0 D / \delta)(D / \nu) \ll 1$ , 及び 2)  $D \ll \ell$  を設けることにより、直径が  $D$  の粒子により、 $\ell$  だけ離れた地点に誘起される流速場を求める問題は、二つの長さのスケール  $D, \ell$  で特徴づけられる二つの支配方程式による解を接続する method of matched asymptotics により、解くことが可能になる。<sup>5)</sup> まず、長さのスケールが粒子の直径  $D$  で特徴づけられる粒子周辺の流れ場 (near field) を支配する方程式は、Stokes 方程式 (1) である。

$$-1/\rho \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} = 0 \quad (1)$$

これらの項に比べて、二つの慣性項 ( $\partial \vec{u} / \partial t, \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ ) はそれぞれ  $O(D^2/\delta^2), O(Re)$  だけ小さい。その結果時間  $t$  は単にパラメータとしてのみ現象に関与することが分かる。即ち準定常的な問題となるので以下では  $U_0 \cos \omega t$  を  $U_0$  と書くことにする。式 (1) の  $\vec{u}$  に対する境界条件は、

- 底面上 ( $z = 0$ ) で  $\vec{u} = 0$  となること、及び粒子の表面でその速度 ( $\vec{u}_p(t)$ ) に一致すること、  
更に水平方向に十分遠方で境界層の流速  $U_0 z/\delta$  に近づくことである。 (2)

境界条件 (2) のもとで式 (1) を満たす解は、その線形性のために、

- a) 静止した粒子 ( $\vec{u}_p(t) = 0$ ) に境界層の流速  $U_0 z/\delta$  が作用したときに粒子のまわりに誘起される流速場、と
- b) 静止流体内に粒子が運動する ( $\vec{u}_p(t) \neq 0$ ) ときに粒子のまわりに誘起される流速場を別々に求めて、その二つの流速場を加え合わせるにより求めることができる。このうち、1) の解は O'Neill<sup>6)</sup> により、また 2) の解は Goldman, Cox and Brenner<sup>7)</sup> により、既に求められている。

さて、粒子周辺の流れ場 (near field) を支配する方程式の  $Re$  数による展開の leading order は Stokes 方程式であったが、長さのスケールが粒子間距離  $\ell$  で特徴づけられる流れ場 (far field) を支配する方程式の  $Re$  数による展開の leading order は Oseen 方程式 (3) であり、その中に

Stokes 方程式の解により定まる Stokes Drag の反作用の項を含むことになる。<sup>5)</sup>

$$\frac{u_0}{\delta} \left\{ z \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \frac{-1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{F}}{\rho} f(x, y, z) \quad (3)$$

ここに  $f(x) = p(x, y)q(z)$  は粒子の大きさ程度の範囲で値をもつ分布関数である。数学的にはデルタ関数を用いることができるが数値的には分布をもつ方がより安定である。さて方程式 (3) は  $x, y$  に関してフーリエ変換すると変数  $z$  に関して Airy 方程式となり、解を積分の形で表すことができる。

$$i\kappa^2 \begin{bmatrix} U(k_x, k_y, z) \\ V(k_x, k_y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix} \left( \frac{-e^{-\kappa z}}{2} \int_z^\infty ds e^{-\kappa s} G(s) + \frac{e^{-\kappa z}}{2} \int_0^z ds e^{\kappa s} G(s) \right) + \begin{bmatrix} -k_y \\ k_x \end{bmatrix} \cdot$$

$$(-Ai(\lambda z + (\frac{\kappa}{\lambda})^2) \left\{ \frac{\pi}{\lambda} \int_0^z ds Bi(\lambda s + (\frac{\kappa}{\lambda})^2) D(s) + a_4 \right\} - Bi(\lambda z + (\frac{\kappa}{\lambda})^2) \frac{\pi}{\lambda} \int_z^\infty ds Ai(\lambda s + (\frac{\kappa}{\lambda})^2) D(s)) \quad (4)$$

$$W = \frac{e^{-\kappa z}}{2\kappa} \int_z^\infty ds e^{-\kappa s} G(s) - \frac{e^{-\kappa z}}{2\kappa} \int_0^z ds e^{\kappa s} G(s) \quad (5)$$

ここに、

$$\kappa = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \lambda = \sqrt[3]{i k_x} \quad k_x = |k_x| e^{i\theta} \quad -\frac{3}{2}\pi < \theta \leq \frac{1}{2}\pi \quad (6)$$

$$D(s) = i(F_x k_y - F_y k_x) P(k_x k_y) q(s) - i k_y W(k_x, k_y, s) \quad (7)$$

$$G(z) = -Ai(\lambda z + (\frac{\kappa}{\lambda})^2) \left\{ \frac{\pi}{\lambda} P(k_x, k_y) \int_0^z ds Bi(\lambda s + (\frac{\kappa}{\lambda})^2) [F_z \kappa^2 + i(k_x F_x + k_y F_y) \frac{\partial}{\partial s}] q(s) + a_0 \right\}$$

$$+ Bi(\lambda z + (\frac{\kappa}{\lambda})^2) \cdot \frac{\pi}{\lambda} P(k_x, k_y) \int_z^\infty ds Ai(\lambda s + (\frac{\kappa}{\lambda})^2) [F_z \kappa^2 + i(k_x F_x + k_y F_y) \frac{\partial}{\partial s}] q(s) \quad (8)$$

また  $a_0, a_4$  は境界条件から定まる定数である。この解析解 (4), (5) はフーリエ逆変換も含めて5重積分を数値的ににより評価する必要がある。以下にこの解により表される、底面上の直径が  $D$  の粒子により水平に  $\ell$  だけ離れた地点に誘起される流速場の性質のうち、本題に関係あることのみをまとめる。まず、粒子に境界層の振動流速  $U_0 z/\delta$  が作用したときに粒子のまわりに誘起される流速場の方向は、粒子の近傍では振動流速と反対向きである。ところで、支配方程式が流れの方向に関して反対称な移流項をもつ 0seen 方程式であるので、誘起される流速場は流れ方向に関して前後に非対称となる。即ち、粒子から前方に流れ出す流速よりも、粒子に向かって流れ込む流速の絶対値の方が常に大きい。いま、流れ方向に並んだ2粒子により相手の粒子の位置に誘起される流速場が定める Stokes Drag による相互作用を考えると、後ろの粒子が前の粒子を押し出す力よりも前の粒子が後ろの粒子引っ張る力の方が大きいことになる。つまり2粒子間相互作用が引力であり、これが rolling-grain ripples の形成機構であることが期待される。

さて、本節では実験の条件より厳しい仮定1), 3) を設けた。このうち、3)  $\ell \ll \delta$  は Stokes 境界層内の流速分布を単純化するために必要であったが、この仮定を取り除いても2粒子間相互作用の性質は変わらないと期待できる。それは既往の研究によれば、類似の条件で壁(底面)が

無いが遠くにあるような場合の相互作用がいずれも引力であるからである。<sup>8) 9) 10)</sup> また、

1)  $Re \ll 1$  は実験の条件  $Re = 0(1)$  とは外れるが、method of matched asymptotics の  $Re \ll 1$  のもとで導かれた結果は、少なくとも定性的には、 $Re = 0(1)$  の範囲にまで適用できることがしばしばある。そこで次節では、本節で求めた相互作用をもつ粒子群の運動の性質について調べる。

### 3. 前節で求めた流体力学的相互作用をもつ粒子群の運動

前節で求めた流体力学的相互作用により粒子群が rolling-grain ripples を形成するかどうかを検討するが、滑面上に散乱した粒子群が形成する粒子波 (particle wave) と rolling-grain ripples がその発生の初期においては同じ性状を示すことが分かっているので、解析の容易さのため本節では一貫して粒子波を取り扱う。

まず、粒子波の発生実験における観測事実のうち、ここで注目する結果をまとめる。次に滑面に格子状に配置された粒子群に振動流が作用するときのその格子の安定性を解析的に調べて、先の観測結果と比較する。最後に滑面にランダムに散乱している粒子群が振動流の作用によりどのような運動をし、どのような形を形成するかを数値シミュレーションにより調べる。

#### 3. 1 粒子波の発生実験の観測結果

滑面上に置いたガラス玉 (比重 2.43,  $a = 0.1 \sim 0.43$  mm) に振動流を作用させた Kaneko and Honji<sup>3)</sup> の実験で観測された典型的な現象は次のようなものであった。振動流の開始直後からばらまかれていたガラス玉は流れと垂直な方向の何本かの線に沿って集合し、これらの線は次第に粒子波の峰に成長し、峰と峰との間の距離は次第に広がってゆく。初めにガラス玉を流れの方向に 1 列に並べておくと、まず隣あう 2 つの粒子が近づいてペアをつくり、これらのペアが更に集合して次第に流れと垂直な方向の何本かの線を形成する。

#### 3. 2 滑面に格子状に配置された粒子群の安定性

ここでは、振動流の作用の下で滑面に粒子間距離  $l$  の正方格子状に配置された粒子群に偶発的に生じた種々の波長をもつ摂動が指数関数的に成長 (減衰) する成長 (減衰) 率を算出する線形安定問題を考える。底面上の平面運動に注目するので、粒子群に作用する力は流体の抗力と底面摩擦のみを考慮する。ある粒子の近傍にはその周りの粒子により流れが誘起され、その流れを媒介にして粒子相互の間に力が働く。

$$3\pi\mu D\alpha \left\{ \vec{u}_s(z=\frac{D}{2}) + \vec{u}_{ind} - \dot{\vec{x}} \right\} = f \dot{\vec{x}} \quad (9)$$

ここに  $\mu$  は粘性係数であり、 $\vec{x}(t)$  と  $\dot{\vec{x}}(t)$  はその粒子の時刻  $t$  における位置と速度である。また  $\vec{u}_s(z=D/2)$  は Stokes 境界層内の  $z=D/2$  での振動流の速度 ( $x$  方向成分のみ) であり、 $\vec{u}_{ind}$  はその周りの粒子により誘起された流速である。粒子が底面上を平行移動するだけでなく回転するとそのトルクによっても流れが誘起されるがその大きさは  $Re$  に関して高次であるため無視できる。 $\alpha$  は粒子が底面上に静止しているとき 1.7 であるが、運動しているときも同じ値をとると仮定する。

底面摩擦は線形のクーロン則を仮定する。ここに  $f$  は摩擦係数である。

無限の平面格子は底面上の平行移動に関して不変であるので、一般性を失うことなく一つの粒子が座標の原点にあると仮定する。さて、まず格子の片方の軸が  $x$  軸 (振動流の方向) に一致する場合を考えると、この粒子の質量を  $m$  として運動方程式は次式となる。

$$m \frac{d\vec{x}_{oo}}{dt} = -f\vec{x}_{oo} + 3\pi\mu D\alpha \left\{ \vec{u}_s + \vec{u}_{ind} - \dot{\vec{x}}_{oo} \right\} \quad (10)$$

$\vec{u}_{ind}$  はその粒子の周りのすべての粒子により誘起された流速の和である。

$$\vec{u}_{ind} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \vec{u}_{m,n} \quad (11)$$

ここに  $(m, n)$  は格子の番号である。今後、時間を  $1/\omega$ 、長さを  $\ell$  で規格化すると、 $\vec{x}_{oo}$  に対する運動方程式は次式となる。

$$\frac{d^2\vec{x}_{oo}}{dt^2} + c_1 \frac{d\vec{x}_{oo}}{dt} + c_2 (\vec{u}_s + \vec{u}_{ind}) = 0 \quad (12)$$

$$c_1 = \frac{f+3\pi\mu D\alpha}{m\omega} = \frac{6f}{\rho_s \pi D^3 \omega} + \frac{18\mu\alpha}{\rho_s D^2 \omega} = 9\alpha \frac{\rho_f}{\rho_s} \left(\frac{\delta}{D}\right)^2 \left[1 + \frac{f}{3\pi\mu D\alpha}\right]$$

$$c_2 = \frac{-3\pi\mu D\alpha}{m\omega} = \frac{-18\mu\alpha}{\rho_s D^2 \omega} = -9\alpha \frac{\rho_f}{\rho_s} \left(\frac{\delta}{D}\right)^2 \quad (13)$$

いま、 $D = 0.01$  cm, 周期  $T = 20$  sec, 振幅  $A = 20$  cm とすると、係数  $c_1, c_2$  はいずれも 1000 のオーダーになる。一方、Kaneko and Honji<sup>3)</sup> の実験で使われた係数  $c_1, c_2$  の範囲は 1.46 から 71 である。さて  $\vec{x}_{oo}$  を、最初の格子の形状を保ったままで振動する非摂動部分  $\langle \vec{x}_{oo} \rangle$  と残りの摂動部分  $\delta \vec{x}_{oo}$  に分けて、

$$\vec{x}_{oo}(t) = \langle \vec{x}_{oo}(t) \rangle + \delta \vec{x}_{oo}(t) \quad (14)$$

$\vec{u}_{ind}$  と  $\langle \vec{x}_{oo} \rangle$  が振動流と同じ周期の調和振動をすると仮定すると、 $\langle \vec{x}_{oo} \rangle$  は形式解を得ることができる。 $\langle \vec{x}_{oo} \rangle = \frac{-c_2}{c_1 - 1} (\vec{u}_s + \langle \vec{u}_{ind} \rangle) = \frac{-c_2}{\sqrt{c_1^2 + 1}} \cdot \frac{c_1 + 1}{\sqrt{c_1^2 + 1}} (\vec{u}_s + \langle \vec{u}_{ind} \rangle)$

摂動部分  $\delta \vec{x}_{oo}$  を支配する方程式は

$$\frac{d^2\delta\vec{x}_{oo}}{dt^2} + c_1 \frac{d\delta\vec{x}_{oo}}{dt} + c_2 \delta\vec{u}_{ind} = 0 \quad (16)$$

であり、 $\delta \vec{u}_{ind}$  はその粒子自身とその周りのすべての粒子の摂動部分  $\delta \vec{x}_{mn}$  により誘起された流速の和である。

$$\delta\vec{u}_{ind} = \sum_{\substack{(mn) \\ \neq (0,0)}} \left\{ \left\langle \frac{\delta\vec{u}_{mn}}{\delta x_{oo}} \right\rangle \delta x_{oo} + \left\langle \frac{\delta\vec{u}_{mn}}{\delta y_{oo}} \right\rangle \delta y_{oo} + \left\langle \frac{\delta\vec{u}_{mn}}{\delta x_{mn}} \right\rangle \delta x_{mn} + \left\langle \frac{\delta\vec{u}_{mn}}{\delta y_{mn}} \right\rangle \delta y_{mn} + \left\langle -\frac{\delta\vec{u}_{mn}}{\delta x_{mn}} \right\rangle \delta x_{mn} + \left\langle -\frac{\delta\vec{u}_{mn}}{\delta y_{mn}} \right\rangle \delta y_{mn} \right\} \quad (17)$$

支配方程式が線形であるので、任意の摂動  $\delta \vec{x}_{mn}$  を波数  $\vec{k}$  の Fourier mode に分けて別々に取り扱うことができる。

$$\delta\vec{x}_{mn}(t) = \delta\vec{x}_{oo}(t) e^{i\vec{k}(\langle \vec{x}_{mn} \rangle - \langle \vec{x}_{oo} \rangle)} \quad (18)$$

その結果、すべての  $\delta \vec{x}_{mn}$  は  $\delta \vec{x}_{oo}$  で表すことができるので  $\delta \vec{x}_{oo} = (\delta x_{oo}, \delta y_{oo})$  に関する方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \delta x_{oo} \\ \delta y_{oo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x_{oo} \\ \delta y_{oo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_{oo} \\ \delta y_{oo} \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

になる。ここに  $[A]$   $[B]$  は 2 行 2 列のマトリックスであり、2 節で求めた誘起流速場により以下のように表すことができる。<sup>11)</sup>

$$[A] = c_1[I] + c_2 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \begin{vmatrix} U_{\parallel}(\vec{k}+2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}), & U_{\perp}(\vec{k}+2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}) \\ V_{\parallel}(\vec{k}+2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}), & V_{\perp}(\vec{k}+2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}) \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} u_{\parallel}(\vec{0}), & 0 \\ 0 & v_{\perp}(\vec{0}) \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$[B] = ic_2 \cdot \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \begin{vmatrix} 2\pi m U(2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \langle \vec{x}_{00} \rangle - \vec{u}_s) - (k_x + 2\pi m) U(\vec{k}+2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \langle \vec{x}_{00} \rangle - \vec{u}_s), & -(k_y + 2\pi n) U(\vec{k}+2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \langle \vec{x}_{00} \rangle - \vec{u}_s) \\ -(k_x + 2\pi m) V(\vec{k}+2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \langle \vec{x}_{00} \rangle - \vec{u}_s), & 2\pi n V(2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \langle \vec{x}_{00} \rangle - \vec{u}_s) - (k_y + 2\pi n) V(\vec{k}+2\pi \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \langle \vec{x}_{00} \rangle - \vec{u}_s) \end{vmatrix} \quad (21)$$

ここに、 $\vec{U}(\vec{k}, \vec{u}) = (U(\vec{k}, \vec{u}), V(\vec{k}, \vec{u}))$  は相対流速  $\vec{u} = \vec{x} - \vec{u}_s$  により誘起された流速の Fourier 変換であり、 $\vec{U}_{\parallel}(\vec{k}) = (U_{\parallel}(\vec{k}), V_{\parallel}(\vec{k}))$  は  $x$  方向単位相対流速  $\vec{u} = (1, 0)$  による  $\vec{U}(\vec{k}, \vec{u})$  であり  $\vec{U}_{\perp}(\vec{k}) = (U_{\perp}(\vec{k}), V_{\perp}(\vec{k}))$  は  $y$  方向単位相対流速  $\vec{u} = (0, 1)$  による  $\vec{U}(\vec{k}, \vec{u})$  である。また  $u_{\parallel}(0)$  は数学的には  $\vec{u} = (1, 0)$  によりその粒子自身の場所に誘起される流速の  $x$  成分であり、 $v_{\perp}(0)$  は  $\vec{u} = (0, 1)$  によりその粒子自身の場所に誘起される流速の  $y$  成分である。

いま ripples の形成に寄与する最も興味のある流れ方向 ( $x$  方向) の波数成分  $\vec{k} = (k_x, 0)$  を考えると、対称性により  $[A]$ ,  $[B]$  はいずれも対角行列となるので、式 (19) は  $\delta x_{00}$  と  $\delta y_{00}$  それぞれに独立な 2 つの方程式となる。

$$\frac{d^2 \delta x_{00}}{dt^2} + a_{11} \frac{d\delta x_{00}}{dt} + b_{11} \delta x_{00} = 0 \quad \frac{d^2 \delta y_{00}}{dt^2} + a_{22} \frac{d\delta y_{00}}{dt} + b_{22} \delta y_{00} = 0 \quad (22)$$

以下では ripples の形成に関連する  $\delta x_{00}$  のみ注目する。この方程式はその係数が  $\text{Re}$  と  $F$  を通じて時間に依存しているので直ちに解析解を得ることはできないが、係数  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  の時間依存性が  $2\pi$  の周期を持っているので、Floquet の定理により  $\delta x_{00}$  の 2 つの独立解が次の形をとることが分かる。<sup>11)</sup> ここに  $\phi(t)$  は  $2\pi$  の周期を持つ関数である。

$$\delta x = e^{(\beta' + i\beta'')t} \phi(t) \quad (23)$$

さらに興味のあるほとんどのケースで係数  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{22}$  の絶対値が 1 より十分に大きいので、上式の 2 階微分を単に無視することにより次の解を得ることができる。

$$\delta x_{00}(t) = \delta x_{00}(0) \exp \left[ - \int_0^t b_{11}/a_{11} dt \right] \quad (24)$$

これらを比較することにより、摂動  $\delta x_{00}$  の線形成長率  $\beta$  は次式で与えられる。

$$\beta = - \frac{1}{\pi} \text{Real} \int_0^{\pi} \frac{b_{11}}{a_{11}} dt \quad (25)$$

さてこの式の形から、前節で取り入れた慣性項の存在により初めて  $\delta x_{00}$  と  $\delta y_{00}$  は不安定解になりうる事が分かる。即ち、もしこの慣性項を無視した場合 (Stokes 近似) には、対称性により  $a_{11}$  と  $a_{22}$  は実数、 $b_{11}$  と  $b_{22}$  は純虚数となるので、 $\delta x_{00}$  と  $\delta y_{00}$  はそれぞれ中立の安定解になってしまう。

この成長率  $\beta$  を決定するパラメータは  $Re$  のほかに、粒子の面密度  $\gamma (= D/2\ell)$  と摩擦係数  $f$  があるが、摩擦係数  $f$  の評価は難しいのでここでは2つの極限と考えられる値  $3\pi\mu D\alpha$  と  $0$  を用いる。また以上の定式化を、格子の片方の軸が  $x$  軸（振動流の方向）と任意の角度  $\theta$  をもつように拡張することができるので<sup>11)</sup>  $\theta = 0$  と  $45^\circ$  の2ケースを取り扱う。これらパラメータのすべての組み合わせについて摂動  $\delta x_{00}$  の成長率  $\beta$  を式 (25) を数値積分することにより算出した。まず、成長率は  $Re$  と  $\gamma$  の増加関数であることが分かる。そのうちの2例を以下に示す。図1は  $\theta = 0^\circ$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $f = 3\pi\mu D\alpha$  のケースについて、 $Re = 0.1 \sim 2.0$  に対応する20本の曲線 ( $Re = 0.1$  に対応するものが一番下で順に上に移る) で、横軸の波長  $\ell$  の関数として縦軸に成長率  $\beta$  を表している。図2は  $\theta = 45^\circ$  でその他のパラメータは図1と同じである。なお格子間隔  $\ell$  の格子に発生しうる摂動の最小の波長は  $2\ell$  である。まず、流れ方向に並んだ2粒子間の相互作用が引力であることから予想されたとおり、あらゆる波長の摂動が不安定である。図1で見られるように、すべての  $\theta = 0^\circ$  のケースにおいて波長  $2\ell$  の摂動が最も速く成長する。これは Kaneko and Honji<sup>3)</sup> の実験で観測された「初めにガラス玉を流れの方向に1列に並べておくと、まず隣あう2つの粒子が近づいてペアをつくる」を説明している。図2で見られるように  $\theta = 45^\circ$  のすべてのケースにおいては、波長  $3\ell \sim 4\ell$  の摂動が最も速く成長する。この場合、流れ方向に並んだ2粒子間の距離は  $\sqrt{2}\ell$  であり、ある粒子の最近接粒子は斜め方向にある4粒子となり、Kaneko and Honji の実験とは対応しないケースとなる。なお  $f = 0$  では、対応する  $f = 3\pi\mu D\alpha$  の各ケースと比較すると最大成長率のモードの波長は変わらないが、これも解析的に予想されたとおり成長率の値自体は約  $1/1000$  となる。

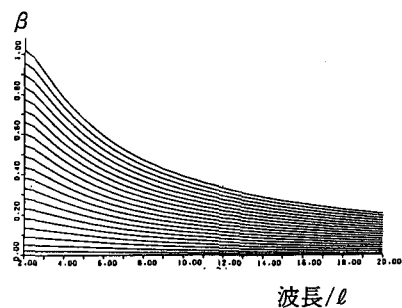


図1 格子の摂動の成長率 ( $\theta = 0^\circ$ )

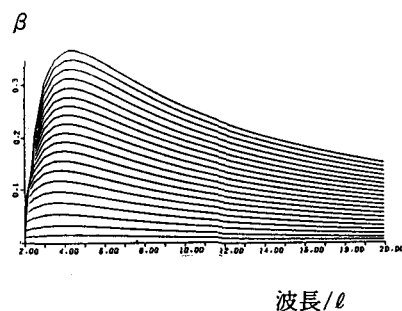


図2 格子の摂動の成長率 ( $\theta = 45^\circ$ )

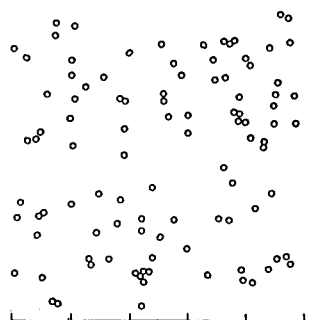


図3 初期のランダムな分布

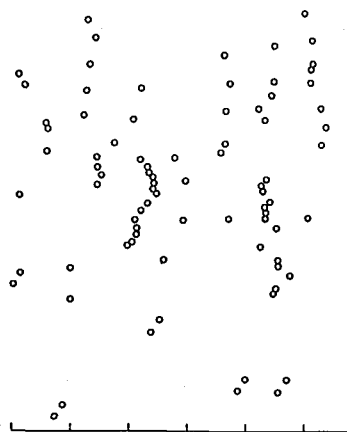


図4 10 周期後の分布

### 3. 3 滑面に散乱している粒子群の運動のシミュレーション

最後に、底面上に初期にランダムに配置した粒子群が振動流の作用によりどのような形を形成するかを調べる。以下に、 $Re=2$ ,  $f = 3\pi\mu D\alpha$  とし、直径  $D$  の50倍の辺をもつ正方形領域の中に、乱数より初期位置を与えた100個の粒子の運動を各粒子について式 (10) を時間積分することにより追跡した例を示す。図3はその初期位置であり、粒子の大きさは拡大して描いてある。図4はその粒子群の（振動流の）10周期後の位置の分布である。粒子群は流れに垂直な方向にいくつかの短い列を形成しているのが分かる。しかし実験で観測されるような判然とした ripples は形成されていないというべきであろう。

#### 4 まとめ

振動流の作用のもとで底面上の互いに離れた粒子群が粒子波を形成することを示した Kaneko and Honji<sup>3)</sup> の実験の初期段階で観測されたペアリングを、Shibata and Mei の求めた<sup>4)</sup> 「互いに離れた粒子間に働く流体力学的相互作用」が引き起こすことを示した。この移流項が重要な役割を果たす流体力学的相互作用が rolling-grain ripples の発生の引き金となることが示唆された。また、 $Re \ll 1$  では  $\partial u / \partial t$  が微小項となるので、この結果は一方向流のもとでの rolling-grain ripples の形成にも全くそのまま適用可能である。この相互作用を持つ粒子の運動方程式を数値的に解くことにより、同じ粒子群をランダムに平板上に置いて振動流を作用させたときに粒子の凝集が起こることが示されたが、整然とした ripples は形成されなかった。このことは、粒子が凝集した後の段階では多体相互作用などのここでは取り扱っていない効果も効いてくることを示しており、今後の課題である。

謝辞 本研究は Massachusetts Institute of Technology において C.C.Meï 教授のもとで着手したものであり、US National Science Foundation, US Office of Naval Research, (財) 国際開発センターより資金援助を受けている。数値計算法の改良と図化についてはセンチュリーリサーチセンター(株)の田中正明、柴英之両氏の助力を得た。ここに記して謝意を表する。

#### 参考文献

- 1) R.A.Bagnold : Motion of waves in shallow water - Interaction between waves and sand bottoms, Proc. Roy. Soc. London A **187**, pp.1-18, 1946.
- 2) T.G.Carter, P.F.L.Liu, and C.C.Meï : Mass transport by waves and offshore sand bedforms, J. Waterways, Harbors, Coastal Eng. Div. ASCE **99**, pp.165-184, 1973.
- 3) A.Kaneko and H.Honji : Initiation of ripple marks under oscillating water, Sedimentology, **26**, pp.101-113, 1979.
- 4) M.Shibata and C.C.Meï : Inertia effects of a localized force distribution near a wall in a slow shear flow, Phys. Fluids A **2**, pp.1094-1104, 1990.
- 5) I.Proudman and J.R.A.Pearson : Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder, J.Fluid Mech. **2**, pp.237-262, 1957.
- 6) M.E.O'Neill : A sphere in contact with a plane wall in a slow linear shear flow, Chem. Eng. Sci. **23**, pp.1293-1298, 1968.
- 7) A.J.Goldman, R.G.Cox and H.Brenner : Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall - I Couette flow, Chem. Eng. Sci. **22**, pp. 653-660, 1967.
- 8) S.Kuwabara : The forces experienced by two circular cylinders in a uniform flow at low Reynolds numbers, J.Phys. Soc. Japan **12**, pp.291-299, 1957.
- 9) P.Vasseur and R.G.Cox : The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid, J.Fluid Mech. **80**, pp.561-591, 1977.
- 10) Y.Kaneda and K.Ishii : The hydrodynamic interaction of two spheres moving in an unbounded fluid at small Reynolds numbers, J.Fluid Mech. **124**, pp.209-217, 1982.
- 11) M.Shibata : Theoretical modelling of sediment motions under currents and waves, Ph.D. thesis, Dept. of Civil Eng., Massachusetts Institute of Technology, 1987.