

粒状体モデルによる掃流粒子群の挙動に関する数値解析

Numerical Analysis of the Dynamics of Bed-Load Particles
as Granular Material

後藤仁志*・辻本哲郎**・中川博次***

By Hitoshi GOTOH, Tetsuro TSUJIMOTO and Hiroji NAKAGAWA

Numerical simulation of interparticle collision has been developed to investigate the detailed structure of the high-density bed-load layer. Motion of particles in a two-dimensional plane driven by water-flow are traced with considering particle/particle interactions. Some typical snapshots of the simulation are shown, and the existing probability density and velocity profile of moving particles are estimated by the present simulation. These results are compared with the results of the simulation in which interparticle collision does not considered.

Keywords: bed-load layer, interparticle collision, saltation

1. まえがき

掃流砂は河床面付近に掃流層を形成して流送されるため、砂粒子同士が近接し、粒子間衝突が発生し易い。この傾向は掃流力の増加とともに顕著となり、掃流状集合流動に至ると、粒子間衝突による運動量輸送が流れ場の構造を規定するようになる。粒子間衝突とともに掃流砂の運動を特徴づけるもう一つの要因は、不規則な凹凸を有する河床面との衝突・反発であり、このために個々の砂粒子は、掃流力の大小にかかわらず不規則運動を呈する。このような観点からすると、粒子間衝突および河床面との不規則衝突を繰り返す粒子群の流動メカニズムの解明は、掃流層の流動機構の理解に不可欠であるが、高濃度の粒子流における個々の粒子の運動、特に粒子間衝突の実験的把握は、現在の計測技術をもってしても必ずしも容易なことではなく、実験に代わる新たなアプローチが必要である。

各個運動が支配的な（掃流力が小さい）領域から集合流動に至るまでを統一的に記述するには、個々の砂粒子の不規則運動の確率論的な記述を基礎に、粒子間衝突による砂粒子運動の変化を考慮できる手法が必要である。個々の砂粒子の不規則運動の記述法としては、辻本・中川¹⁾の不規則継続跳躍モデルが有効であ

* 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部環境地球工学教室

り、粒子間衝突の取扱いについては、Campbell and Brennen²⁾の粒状体モデルによる数値シミュレーションが示唆的である。辻本らは河床面との不規則衝突に伴う単一粒子の運動に関する数値シミュレーションを行っており、また、Campbellらは個々の粒子の運動を同時に追跡することによって粒子群の運動を記述して粒状体の特性を検討している。

本研究は、これら2つの手法を融合して、粒子間衝突を考慮することの可能なシミュレーションモデルを構築し、粒子群としての掃流層の力学特性を推定しようとするものである。なお、粒子混入（すなわち流体・粒子間干渉）による流れ場の構造変化の取扱いに関しては、著者らは既に固液混相流型のシミュレーションモデル³⁾を提案しているが、ここでは論点を明確なものにするため、粒子間干渉に問題を限定し、流れ場に関しては清水流近似を用い、流速分布は対数則を仮定した。また、対象とする流れ場が主流方向に卓越した場であることから、砂粒子1個分の奥行の空間で、砂粒子が2次元運動している状況を仮定した。

2. シミュレーションモデルの構成

従来の確率モデルによるシミュレーションでは、単一砂粒子の不規則運動をLagrange的に追跡し、長時間にわたる砂粒子の運動過程を統計処理して、平均的な運動特性を検討する方法が用いられてきた。このような方法では、追跡対象となる砂粒子が1個に限定されるため、粒子間衝突を扱うことができず、粒子間衝突が卓越する掃流力の大きい領域への適応は自ずと制限されることとなる。そこで、本研究では、定常等流下の掃流層を対象として、河床面の不規則な凹凸と衝突・反発を繰り返しつつ、他のsaltation粒子と衝突しながら、saltationする砂粒子の運動を取り扱うためのシミュレーションを実施する。想定する計算領域を図-1に示す。定常等流を考えているため、周期境界条件が上下流端で適用される。

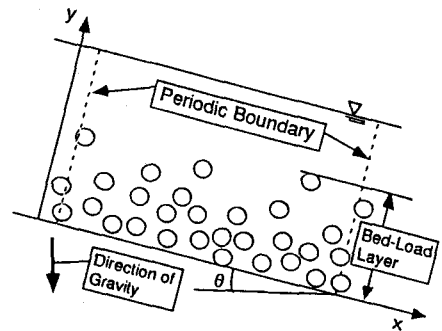


図-1 計算領域

2.1 単一砂粒子の運動

単一砂粒子は、河床面の不規則な凹凸との衝突・反発による不規則継続跳躍を呈する。ここでは、不規則継続跳躍モデルによるシミュレーションについて、概略を説明する。Saltationの運動方程式は、

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{du_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2} (U - u_p) \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{dv_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2} (V - v_p) - \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g A_3 d^3 \quad (2)$$

で与えられる。ここに、 u_p, v_p : 砂粒子の水平・鉛直方向の速度成分、 C_M : 付加質量係数、 σ : 砂粒子の密度、 ρ : 水の密度、 d : 砂粒径、 U, V : 平均流速の水平・鉛直方向の速度成分、 A_2, A_3 : 砂粒子の2次元、3次元の形状係数である。 C_D は抗力係数であって、

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{24}{R_e} \quad ; \quad R_e = \frac{d \sqrt{(U - u_p)^2 + (V - v_p)^2}}{\nu} \quad (3)$$

で与えられる。なお、 $C_{D\infty}$ については、球に対する値0.4を、諸定数については、 $C_M=0.5, A_2=\pi/4, A_3=\pi/6$ を用いた。河床面での衝突・反発の不規則性については、粒径レヴェルの凹凸に伴う仮想反発面傾斜角の確率分布を考慮した2次元反発モデル^{1), 3)}を用いることとする。衝突前後の砂粒子の速度 $(u_{\text{gin}}, v_{\text{gin}}), (u_{\text{gout}}, v_{\text{gout}})$ (図-2参照)の関係は、確率変数である仮想反発面傾斜角 α を介して、

$$\begin{bmatrix} u_{gout} \\ v_{gout} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \cdot \cos^2 \alpha - f \cdot \sin^2 \alpha & (e+f) \cos \alpha \sin \alpha \\ (e+f) \cos \alpha \sin \alpha & e \cdot \sin^2 \alpha - f \cdot \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gin} \\ v_{gin} \end{bmatrix} \quad (4)$$

と表される。ここに、 e 、 f ：反発係数である。式(1),(2)をRunge-Kutta法で解いて砂粒子の運動をLagrange的に追跡し、河床面との衝突が発生すれば、乱数により仮想反発面傾斜角を決定して、式(4)によって衝突後の移動速度を求め、追跡を継続する。なお、衝突直後の

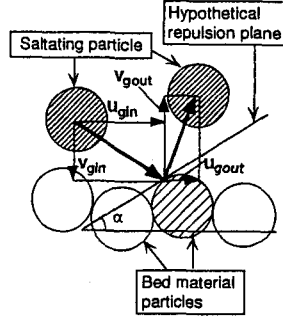


図2 河床面との衝突

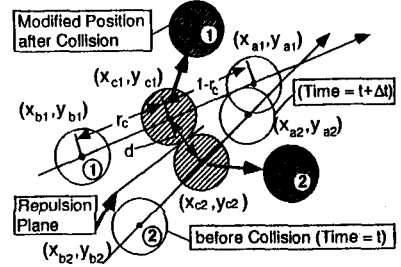


図3 粒子間衝突

移動速度の鉛直成分が一定の値（粒径の0.1倍の突起を乗り越えるのに要するポテンシャルに相当する値）を下回るとき、運動停止と判断した¹⁾。

2.2 粒子間衝突

均一粒径 d の2つの粒子（中心の座標 $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ ）について考える。衝突の発生条件は、

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} < d \quad (5)$$

であり、砂粒子の位置の更新が行われるたびに、式(5)を用いて全ての砂粒子について判定を行う。図-3は、衝突位置の算出について、粒子1,2を対象に示したものである。 $t, t+\Delta t$ における砂粒子の位置を $(x_{bi}, y_{bi}), (x_{ai}, y_{ai})$ （ただし、 (x_{ai}, y_{ai}) は衝突位置を求めるための架空の位置である）とし、 Δt 秒間の砂粒子の運動軌跡を直線近似すると、

$$y_i = \frac{y_{ai} - y_{bi}}{x_{ai} - x_{bi}} (x_i - x_{bi}) + y_{bi} \quad (i=1,2) \quad (6)$$

$$x_i = x_{bi} + (x_{ai} - x_{bi}) \cdot r_c \quad (i=1,2) \quad (7)$$

となる。ここに、 r_c ：衝突前後の2点間の内分比である。衝突地点では、2粒子間の距離が、

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = d \quad ; \quad r_c \leq 1 \quad (8)$$

を満足するから、(6),(7),(8)を連立させて、 r_c を求めれば、衝突位置が決定される。衝突位置の砂粒子速度等の特性量は、内分比 r_c を用いた線形補間により計算される。

衝突に伴う速度の変化については、以下のように考える。まず、砂粒子の共通接平面を仮想反発面として想定する。仮想反発面傾斜角 ϕ は、粒子1,2の衝突位置の座標 (x_{c1}, y_{c1}) を用いて、

$$\phi = \arctan \left(-\frac{x_{c1} - x_{c2}}{y_{c1} - y_{c2}} \right) \quad (9)$$

で与えられ、仮想反発面の鉛直、水平方向に関して運動量保存則と反発の法則を適用すると、衝突前後の砂粒子の速度の関係は、

$$\begin{bmatrix} u_1^{out} \\ v_1^{out} \\ u_2^{out} \\ v_2^{out} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi_1 & \lambda & \xi_2 & -\lambda \\ \lambda & \xi_3 & -\lambda & \xi_4 \\ \xi_2 & -\lambda & \xi_1 & \lambda \\ -\lambda & \xi_4 & \lambda & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{in} \\ v_1^{in} \\ u_2^{in} \\ v_2^{in} \end{bmatrix} ; \quad \begin{cases} \xi_1 = (1+e_p) \cos^2 \phi + (1-f_p) \sin^2 \phi \\ \xi_2 = (1-e_p) \cos^2 \phi + (1+f_p) \sin^2 \phi \\ \xi_3 = (1+e_p) \sin^2 \phi + (1-f_p) \cos^2 \phi \\ \xi_4 = (1-e_p) \sin^2 \phi + (1+f_p) \cos^2 \phi \\ \lambda = (e_p + f_p) \cos \phi \sin \phi \end{cases} \quad (10)$$

で与えられる。ここに、 e_p, f_p ：砂粒子間の反発定数であり、添字 in, out は衝突前、後を示している。

2.3 周期境界条件

定常等流状態を対象としているため、側方境界では周期境界条件を課することとなる。運動方向が完全に一方方向的であるときには、流出部の値を流入部で与えて繰り返し計算すれば、周期境界条件は容易に満足されるが、砂粒子の運動は、粒子間衝突のために局所的に主流と逆向きとなることがあり、必ずしも一方方向的ではない。具体的には、下流側の境界を通過してコントロール・ボリュームを出た直後に他の粒子と衝突し、流れを遡って逆方向に移動して再び下流側の境界を通過してコントロール・ボリュームに突入する粒子が生じる可能性がある。このような粒子の存在に対応するには、下流側の境界を出て暫くの間は、砂粒子の運動を継続して追跡する必要がある。

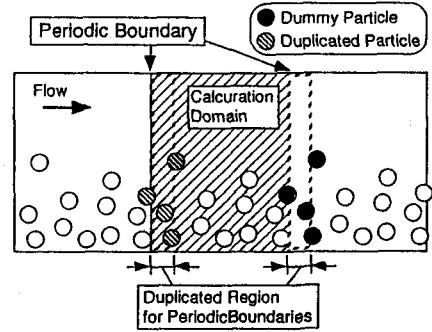


図-4 周期境界条件

ところで、周期境界条件の下では、砂粒子は下流側の境界を通過してコントロール・ボリュームから出た瞬間に上流側の境界を通過してコントロール・ボリューム内に入ることになるから、下流側境界を出た直後の粒子の逆方向への運動に配慮しつつ、周期境界条件を満足するには、側方境界付近で以下に述べる砂粒子の二重化を行う必要がある。図-4は、砂粒子の二重化について模式的に示したものである。上下流の側方境界の右側に粒径の数倍の厚さの二重化領域を設定し、下流側境界に接する二重化領域においてダミー粒子を設定する。左右の二重化領域内を運動する一対の粒子の運動を完全に同期させ、片方の粒子が二重化領域の外部に存在する粒子と衝突した場合には、その結果をもう一方の粒子にも同様に反映させる。なお、二重化領域を出た粒子については、ダミー粒子を消去する。この二重化領域の導入により、主流と逆方向に境界を通過する粒子の運動にも対応しつつ、周期境界条件が満足される。

2.4 計算の流れ・計算条件

具体的な計算の流れを、図-5に示す。まず、水理条件に応じて清水流中で単一砂粒子のsaltationを河床面との不規則衝突を考慮しつつ追跡して、確率密度関数と移動速度を算定し、それに応じて砂粒子群の初期条件(位置と速度)を設定する。次に、運動方程式を用いて、粒子間衝突を考慮しながら時間方向に各砂粒子を追跡し、一定の時間が経過するごとに粒子の移動過程の追跡結果を統計処理して存在確率密度、移動速度などの特性量を算出し、計算結果の収束状況を判断する。このような過程の繰り返しにより、砂粒子群が追跡される。計算は、表-1(I_e :エネルギー勾配, h :水深, U_m :平均流速, u_* :摩擦速度, τ_* :無次元掃流力)の条件について粒径 $d=0.4\text{cm}$ 、比重2.60のガラスビーズを対象に行われ、開水路における掃流粒子の運動特性に関する実験と比較された。コントロール・ボリューム内に存在する砂粒子数は、スイス公式によって推定された掃流砂量より求められたが、コントロール・ボリューム内に整数個の砂粒子が存在するようにコントロール・ボリュームの流下方向の長さが調整された。

砂粒子追跡の計算時間ステップは、以下の点を考慮して

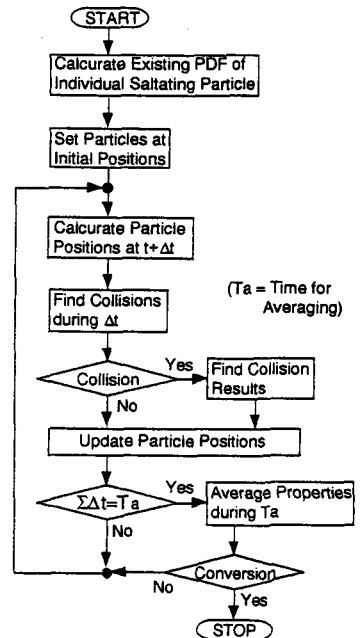


図-5 計算の流れ

表-1 計算条件/実験条件

I_e	$h(\text{cm})$	$U_m(\text{cm/s})$	$u_*(\text{cm/s})$	τ_*
0.02	6.05	136.4	11.6	0.16

設定された。計算時間ステップを長く設定し過ぎると、1ステップ内に複数回の粒子間衝突が発生し、衝突判定も複数回必要となり、アルゴリズムが複雑化する。逆に、計算時間ステップを短く設定し過ぎると、砂粒子の追跡は詳細となって、1ステップ内には複数回の衝突は発生しないが、定常状態に達するまでの計算時間が増大し、計算効率が低下する。ここでは、1ステップ内に複数回の衝突が生じない範囲で、計算効率を必要以上に低下させないような時間ステップを試行錯誤により検討し、 $\Delta t=0.002$ 秒を用いることとした。

3. シミュレーション結果と考察

本シミュレーションは、粒子群の瞬間の挙動を予測するものであり、時間ステップごとの砂粒子の位置と速度について膨大な計算結果が得られるが、これを直ちに平均化処理したのでは、砂粒子群が各瞬間にどのように挙動しているのかが理解し難い。そこで、シミュレーション結果をビデオ画像のコマ送りのような形式で示したのが、図-6であり、AからPまで計16コマの連続画像を、現象が十分に収束した時点を対象に表示している。

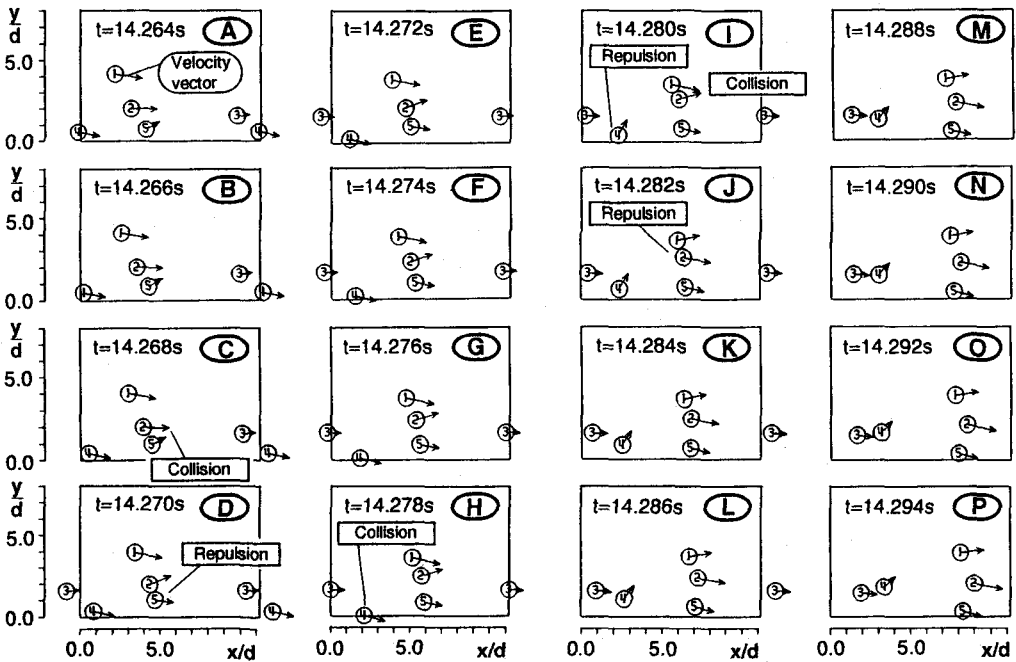


図-6 シミュレーションの予測するsnapshotsの一例

1,2,5の砂粒子の間で粒子間衝突に伴う運動量輸送が生じている点が注目される。まず、Cにおいて下降している粒子2と上昇中の粒子5が衝突・反発し、Dではそれぞれの鉛直方向の速度成分が逆転し、粒子2が上昇に、粒子1は下降に転じている。さらに、これと同様の現象が、I, Jのコマで、粒子1,2の間でも生じている。このような多重衝突は、砂粒子の運動量の鉛直方向成分を下方から上方へと輸送する働きをしており、これによって、掃流層の上層部を運動する砂粒子は、下方からの運動量の供給を受けつつ長距離にわたり運動を継続し、逆に、底面付近を運動する砂粒子は、衝突によって上方の砂粒子に運動量を供給し、自身の飛距離を短縮されるものと推定される。

単一砂粒子の運動の場合には、河床面との不規則な衝突・反発により、運動量の水平成分が鉛直成分へと変換されてsaltation運動が維持されるというメカニズムが存在した。これに対して、本シミュレーション結果が示しているのは、粒子間衝突による運動量の鉛直方向成分の輸送であり、このことは、個々の砂粒子の運

動特性を多様化させる働きをしているものと推察される。

このような、砂粒子間の運動形態の相違は、統計量にも反映されるはずである。図-7は、本シミュレーションの予測する砂粒子の鉛直方向存在確率密度について、単一粒子追跡型のシミュレーション結果とともに示したものであるが、何れのシミュレーションも実験結果のばらつきの範囲内の予測を与えており、実験結果との一致だけでは優劣の判断は難しい。分布形状の詳細を単一粒子追跡型と比較すると、本シミュレーションによる予測結果は、底面付近と上層部で大きく、その中間で小さくなる。このことは以下のように解釈できる。図-6から明らかなように、底面付近から上昇してきた砂粒子と上層部から降下してきた砂粒子とは、saltation層の中間付近で衝突し、その際に生じる運動量の鉛直成分の交換により、衝突以前と逆方向に移動する。このため、単一の砂粒子運動では到達できない高さにまで達する砂粒子が存在する一方、それらの砂粒子に運動量を供給した砂粒子は早く落下する。存在確率密度における単一粒子追跡モデルとの差は、このような粒子間衝突の効果によるものと考えられる。

図-8は、砂粒子の移動速度の水平成分について、本シミュレーションと単一粒子追跡型のシミュレーションとを実験結果と比較したものである。実験結果は、掃流層の上層部と中間部との速度勾配の相違すなわち移動速度分布の変曲点 ($y/d=5$ 付近) の存在を示唆しているが、単一粒子追跡型の結果にはこのような傾向が見られないのに対して、本シミュレーションでは変曲点の存在が明確に予測されている。さらに、中間部における実験結果の速度勾配は、単一粒子追跡型に比べて緩やかで、速度の絶対値は小さくなっており、粒子間相互および流体・粒子間の干渉による速度欠損が生じているものと解釈される。本シミュレーションは、単一粒子追跡型の結果より小さい移動速度を予測するとともに、速度勾配についても単一粒子追跡型と比べて緩勾配の予測を与えており、実験結果の示す傾向と一致している。

4. あとがき

本シミュレーションでは、粒子間衝突に焦点を絞り、流れ場についてはできる限り簡素化して清水流近似を適用したため、流体・粒子間の干渉については考慮されていない。したがって、図-7,8における単一粒子追跡型と本シミュレーションとの相違は、粒子間衝突のみの影響を示したものであるが、著者らによって提案された流体・粒子間干渉を考慮した流れ場のシミュレーション³⁾と本シミュレーションとが融合されれば、流体・粒子間、粒子間相互の干渉を考慮した予測を行うことが可能となる。今後は、計算のコードの改良を進めて、さらに高濃度の掃流層における粒子間衝突の影響の推定を行うとともに、流体・粒子間の干渉効果を含めた掃流層の内部構造の予測へと発展させていく予定である。

謝辞：シミュレーションコードの作成にあたり、京都大学大学院・渡辺幹広君の協力を得たことを付記して、謝意を表する。

参考文献

- 1) 辻本哲郎・中川博次：掃流粒子の Saltation の確率過程論的解析，土木学会論文集，第345号，pp. 83-90, 1984.
- 2) Campbell, C. S. and Brennen, C. E.; Computer simulation of granular shear flows, J. Fluid Mech., Vol. 151, pp.167-188, 1985.
- 3) 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次：PSI-セルモデルによるSaltation層の解析，海岸工学論文集，第39巻，pp. 266-270, 1992.

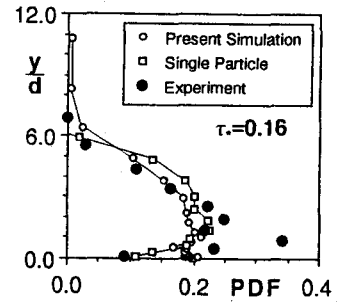


図-7 砂粒子の存在確率密度

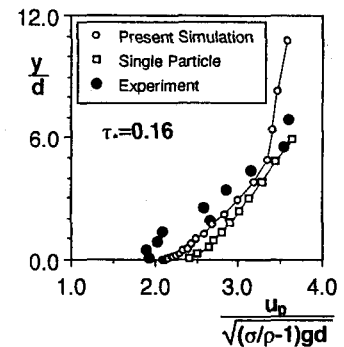


図-8 砂粒子の移動速度