

下水道管渠における遷移流れ（開水路流れ⇔圧力流れ）の 数値計算法

A Numerical Scheme for Transition between Open-channel and Surcharged Flows
in Sewer Pipe Systems

渡辺政広*・栗原 崇**

By Masahiro WATANABE and Takashi KURIHARA

A numerical scheme which is able to simulate a transition between open-channel and surcharged flows in sewer pipe systems with high accuracy and stability is presented. The time interval Δt of the domain in which the transition occurs is divided into several tens of small intervals, and the characteristics equations in the domain are successively integrated so as to reflect, on the integration, the spatial and temporal variations of the values of flow variables along the characteristics. An appropriate number of divisions for the interval Δt is derived theoretically.

Keywords : successive integration, characteristics method, transition between open-channel and surcharged flows, sewer pipe system

1. 序 論

都市域の下水道管渠システムでは、豪雨時、下水管渠の通水能の不足、ポンプ場での間欠的な流量調整運転などに起因して、開水路流れと圧力流れ（サーチャージ流れ、管路流れ）の間の遷移流れがしばしば発生している。今後、流量調整運転などの流出制御が実施される機会はますます増えてゆくものと予測され、遷移流の発生頻度はさらに高まるものと考えられる。また、大都市を中心として、近年、その本格的な計画・建設が推進され始めている地下トンネル河川においても、これまでの下水道管渠システムでは経験することのなかった新しいタイプの遷移流れが発生することも十分に考えられる。この種の遷移流は、一般に、水深や圧力水頭などの急激な時間的・空間的变化を伴っているため、種々の重大な問題、たとえば、マンホール蓋の飛散事故¹⁾、などを引き起こす可能性を含んでいる。したがって、こうした遷移流を精度高くシミュレートしうる水理解析モデルを確立すると共に、それに起因して発生する諸問題（事故）を予測し、それらを防止する諸対策を前以て検討しておく必要がある。

著者らは、既に、こうした遷移流に対し、矩形格子による特性曲線法を用いるときの高精度で安定性のよ

* 正会員 工博 愛媛大学助教授 工学部土木海洋工学科
(〒790 松山市文京町3番)

** 正会員 工修 愛媛大学助手 工学部土木海洋工学科
(〒790 松山市文京町3番)

い数値計算法（差分スキーム）^{2), 4)}を提案している。この計算法の特徴は、遷移流が発生している $\Delta x \cdot \Delta t$ の領域に限り、 Δt を幾つかの区間に細分割し、水理量の急激な時間的・空間的変化を忠実に反映した特性曲線式および特性方程式の逐次積分を遂行して、数値解析誤差を小さく抑え、従来の差分スキームでは達成することが不可能であった計算の安定性と精度を確保している点にある。一方、この計算法を実用する際の重要なポイントのひとつである Δt の分割数 M の適値については、経験的には、 $M \approx 30$ 程度を採用すればよい結果を得ているが、その理論的根拠については、これまで、不明のまゝであった。

本論文は、円形断面の下水管渠を対象として、上述した分割数の経験値に対する理論的根拠を明らかにしようとするものである。はじめに、下水道管渠システムにおける流れの基礎式とその特性曲線表示について概説し、遷移部の流れの伝播特性と従来の差分スキームの問題点を明らかにする。次いで、これらの結果を踏まえ、幾つかの現実的な仮定を導入した上で、特性曲線式および特性方程式の逐次積分（修正オイラー法）に対する誤差解析を行い、経験値 $M \approx 30$ の理論的根拠を明らかにする。

2. 流れの基礎式とその特性曲線表示

2.1 下水道管渠の流れの基礎式^{2), 3)}

下水道管渠における流れの運動方程式および連続の式は、開水路流れと圧力流れの両流れを統一して取り扱えるスロット・モデル（図-1）を用いて、次のように無次元表示される。

$$\frac{\partial V_*}{\partial t_*} + V_* \frac{\partial V_*}{\partial x_*} + \frac{\partial h_*}{\partial x_*} - \alpha_1 \left(1 - \frac{\Gamma}{\alpha_2^2} \frac{|V_*| V_*}{R_*^{4/3}} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} + V_* \frac{\partial h_*}{\partial x_*} + c_*^2 \frac{\partial V_*}{\partial x_*} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_* = x/L, \quad t_* = t/(L/\sqrt{gD}), \quad h_* = h/D, \\ V_* = V/\sqrt{gD}, \quad Q_* = Q/(\sqrt{g} \cdot D^{5/2}), \quad A_* = A/D^2, \quad \dots\dots\dots (3) \\ R_* = R/(D/4), \quad B_* = B/D, \quad B_{S*} = B_S/D \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = L \cdot S_0/D, \quad \alpha_2 = V_{full}/\sqrt{gD}, \quad c_* = c/\sqrt{gD} \quad \dots\dots\dots (4) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{A/B} \quad (\text{開水路流れのとき}), \\ c = \sqrt{A/B_S} \approx c' \quad (\text{圧力流れのとき}), \\ c' = \sqrt{g \cdot \frac{N}{L} (\sin \theta) \frac{A_p}{A_t}} \approx \sqrt{g \cdot \frac{A_p}{B_S}}, \quad c'_* = c'/\sqrt{gD} \quad \dots\dots\dots (5) \end{array} \right.$$

ここに、 V ：断面平均流速、 h ：開水路流れの水深あるいは圧力流れの管渠底から測った圧力水頭、 Q ：流量、 A ：流水断面積、 R ：径深、 B ：開水路流れの水面幅、 B_S ：スロット幅、 c ：開水路流れの微小擾乱の伝播速度、 c' ：ラテラル・モデル²⁾における圧力流れの圧力波伝播速度、 Γ ：圧力流れの水位低下に関する補正係数（開水路流れおよび遷移点近傍の圧力流れにおいては $\Gamma=1$ ）、 D, A_p, L, S_0, V_{full} ：下水管渠の直径、断面積、長さ（マンホール間の距離）、こう配、Manning 型の満管等流流速、 A_t, N, θ ：取付管の断面積、 L 当りの接続本数、傾斜角度、 g ：重力加速度、 x ：距離、 t ：時間。

上記の無次元式の導出に当っては、流れ方向の長さの代表値に下水管渠の長さ L を、鉛直方向のそれには下水管渠の直径 D を、時間の代表値には $L/\sqrt{gD}$ を採用している。

なお、マンホールにおける連続式は、紙数の関係

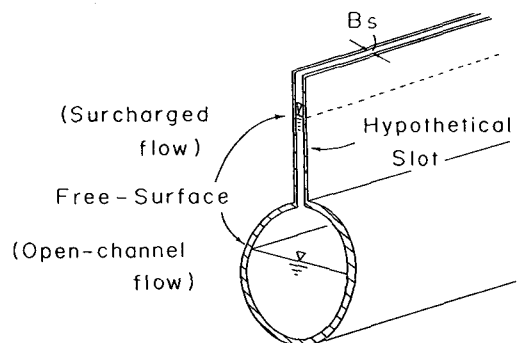


図-1 下水管渠と仮想スロット

で、文献 2)、5) で詳述している。

2.2 基礎式の特曲線表示^{2), 4)}

下水道管渠における流れの基礎式 (1) および (2) は、次のように特性曲線表示される。すなわち、特性曲線式 (6) の上で、特性方程式 (7) が成立する (複合同順)。

$$\frac{dx_*}{dt_*} = V_* \pm c_* \cdots (6), \quad \frac{dV_*}{dt_*} \pm \frac{1}{c_*} \frac{dh_*}{dt_*} - \alpha_1 \left(1 - \frac{\Gamma}{\alpha_2^2} \frac{|V_*| V_*}{R_*^{4/3}} \right) = 0 \cdots (7)$$

3. 遷移部の流れの伝播特性と

積分型スキーム^{2), 4)}

3.1 特性曲線式の数値積分 (図-2)

未知点 p の水理量を算定すべき計算式を得るには、本来は、特性曲線式 (6) および特性方程式 (7) に対し、内挿点 r および s から点 p に至る定積分を施せばよい。

たとえば、 C^+ に沿って、点 r から点 p に至る定積分を実行すると、次式を得る。

$$\int_{x_{*r}}^{x_{*p}} dx_* = \int_{t_*}^{t_* + \Delta t_*} (V_* + c_*) dt_* \cdots (8)$$

$$\int_{V_{*r}}^{V_{*p}} dV_* + \int_{h_{*r}}^{h_{*p}} \frac{1}{c_*} dh_* - \alpha_1 \int_{t_*}^{t_* + \Delta t_*} \left(1 - \frac{\Gamma}{\alpha_2^2} \frac{|V_*| V_*}{R_*^{4/3}} \right) dt_* = 0 \cdots (9)$$

ここに、 $\Delta t_* := \Delta t / \sqrt{gD}$ 、 Δt : 計算時間間隔、添字 p, r はそれぞれ点 p, r の値を示す。

3.2 遷移部の流れの伝播特性と従来の差分スキームの問題点

式 (8) および (9) に対する従来の数値積分 (差分スキーム) では、被積分項 ($V_* + c_*$)、 $1/c_*$ 、 $|V_*| V_* / R_*^{4/3}$ が、積分区間内ではば一定値をとるか線形変化すると仮定している。通常、高精度の解析結果が得られるとされている 2nd-order⁶⁾

の差分スキームによれば、両式の積分結果は次のように表される。

$$x_{*p} - x_{*r} = (1/2) \cdot \{(V_* + c_*)_p + (V_* + c_*)_r\} \cdot \Delta t_* \cdots (10)$$

$$\begin{aligned} & V_{*p} - V_{*r} + (1/2) \cdot \{(1/c_*)_p + (1/c_*)_r\} \cdot (h_{*p} - h_{*r}) \\ & - \alpha_1 \{1 - (1/2) \cdot (SF_p + SF_r)\} \cdot \Delta t_* \\ & = 0 \cdots (11) \end{aligned}$$

$$; SF = (\Gamma / \alpha_2^2) (|V_*| V_* / R_*^{4/3})$$

しかしながら、遷移部の流れに対しては、この差分スキームを適用する場合でも、実際上からは、致命的な誤差を伴うことがしばしばである。これは、次のような理由による。

今、図-3 (a) および (b) に示すような、開水路流れの内挿点 r から

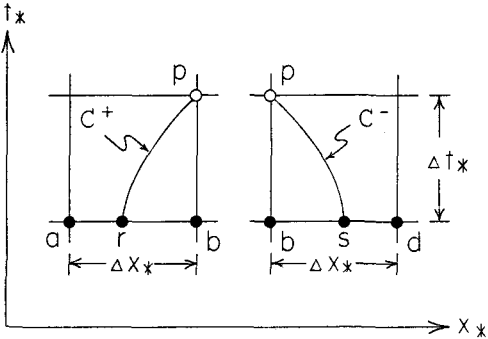


図-2 矩形格子と特性曲線

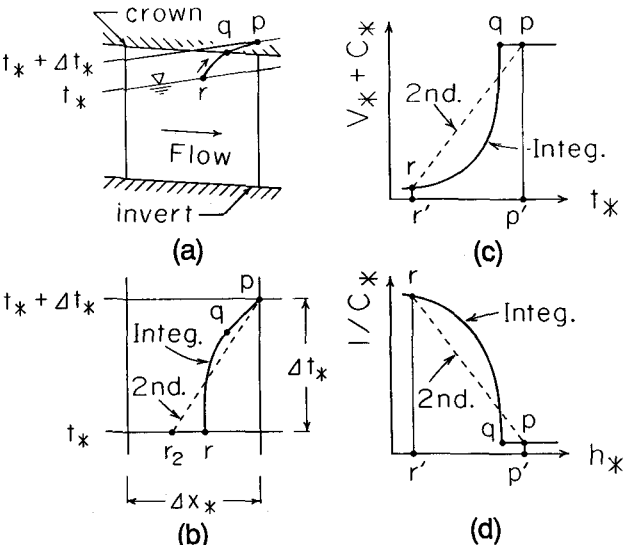


図-3 遷移部の流れの伝播特性、ならびに特性曲線、 $V_* + c_*$ および $1/c_*$ の変動特性

遷移点 q を経て、未知点 p へ向かう特性曲線と、これに沿う水理量の変化を考える。点 r から点 q 手前の間の開水路流れの c 値は、数 m/sec 程度である。ところが、遷移点 q 近傍の開水路流れのそれは、水面幅が極端に小さくなる断面特性により、数 $10 \sim 100 m/sec$ となる。また、点 q から点 p の間の圧力流れでも同程度の大きい値となる。すなわち、点 $r \sim p$ の間で、 c 値は $1 \sim 2$ オーダーも異なる値へと急激に増大する。これに対応して、特性曲線とこれに沿っての $V_* + c_*$ および $1/c_*$ も、それぞれ図-3 (b), (c) および (d) に示すように、不規則で急激な変化をみせる (図中の実線, Integ.)。したがって、このような変動特性を全く考慮できない従来の差分スキームでは、本来的に、致命的な積分誤差を伴うことになる (図中の破線, 2nd.)。

3.3 積分型スキーム

上述した特性曲線、 $V_* \pm c_*$ および $1/c_*$ の急激な時空間変化を忠実に反映する数値積分を遂行するため、図-4 に示すように、遷移流れが発生している $\Delta x_* \cdot \Delta t_*$ の領域に限り、 Δt_* を M 等分し、特性曲線式とその上で成立する特性方程式を逐次、積分してゆく方式 (積分型スキーム) を考える。

(a) 特性曲線式の逐次積分

特性曲線の特異な形状、内挿点 r の位置、などをできる限り正確に決定するため、以下のように逐次積分を行う。

たとえば、図-4 の正の特性曲線の場合、まず、未知点 p の近似値を与え、これより点 p から内挿点 r へ向けて、次式 (12) のように、式 (8) の逐次積分を進める。

なお、時間間隔 $\Delta t_*/M$ 内での数値積分には、修正オイラー法を用いる。

$$x_{*p} - x_{*r} = \sum_{i=1}^M (x_{*i-1} - x_{*i}) = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{2} \left\{ (V_* + c_*)_{i-1} + (V_* + c_*)_i \right\} \right) \left(\frac{\Delta t_*}{M} \right) \dots \dots \dots (12)$$

ここに、添字 i は特性曲線上の各分点 i における値を、添字 0 および M はそれぞれ未知点 p および内挿点 r における値を示す。また、各分点 i における流速 V_{*i} および水深 h_{*i} は、たとえば、これら水理量が $\Delta x_* \cdot \Delta t_*$ の領域で時空間的に線形変化しているとする、図-4 の4点 a, b, e および p の値を用いて簡単に算定される。

(b) 特性方程式の逐次積分

まず、特性方程式 (7) の $|V_*|V_*/R_*^{4/3} = (SF)$ に対する逐次積分は、上の特性曲線式のそれと合わせ、次式のように遂行する。

$$\int_{t_*}^{t_* + \Delta t_*} (SF) dt_* = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{2} \left\{ (SF)_{i-1} + (SF)_i \right\} \right) \left(\frac{\Delta t_*}{M} \right) \dots \dots \dots (13)$$

なお、上式右辺の逐次積分結果の h_{*p} あるいは V_{*p} に関する偏微分を正確に評価することは、非常に困難である。そうした偏微分を実行する必要がある場合には、重み係数 W ($0 \leq W \leq 1$) を導入し、上式を次式のように変形して用いる。

$$\int_{t_*}^{t_* + \Delta t_*} (SF) dt_* = \{ W \cdot (SF)_p + (1-W) \cdot (SF)_r \} \cdot \Delta t_* \dots \dots \dots (14)$$

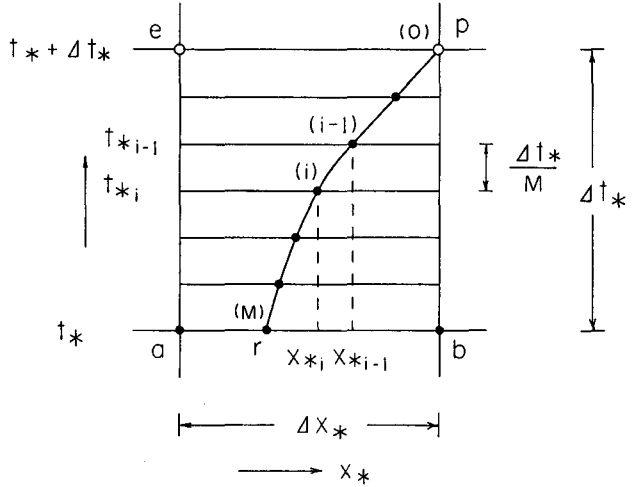


図-4 積分型スキーム (遷移流れ部)

$$; W = \frac{\{f(SF) dt_*\} / \Delta t_* - (SF)_r}{(SF)_p + (SF)_r} \dots\dots\dots (15)$$

一方、 $1/c_*$ の積分については、 c_* が水深 h_* の関数であることから、次の直接的な積分が可能である。すなわち、予め、 $1/c_*$ の h_* に関する近似関数（誤差は $\pm 0.1\%$ 以内）を定めておく。式 (12) より内挿点 r が定まり、その水深 h_{*r} が求められると、次式により直接積分を行う。なお、紙数の関係で、 $1/c_*$ の近似関数（表）については、文献 4) で詳述している。

$$\int_{h_{*r}}^{h_{*p}} \frac{1}{c_*} dh_* = \int_{z_r}^{z_p} f(z) dz = F(z_p) - F(z_r) \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 z は無次元の積分変数、 $f(z)$ は $1/c_*$ の近似関数、 $F(z)$ は $f(z)$ の積分関数。

これらより、特性方程式 (7) の逐次積分結果は、次式のように表されることになる。

$$V_{*p} - V_{*r} + F(z_p) - F(z_r) - \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\alpha_2^2} \{W \cdot (SF)_p + (1-W) \cdot (SF)_r\} \right) \cdot \Delta t_* = 0 \dots (17)$$

なお、負の特性曲線に沿っても、式 (17) に対応する特性方程式の逐次積分結果が得られる。これらを連立させ、未知点 p の水深 h_{*p} 、流速 V_{*p} を求めるには、たとえば、ニュートン・ラフソン法を用いればよい。このとき、式 (14) および (15) に示したように、重み係数 W を導入した表示式が必要となる。

4. 分割数に関する理論的考察

上述した積分型スキームの誤差の問題は、基本的には、特性曲線式 (1) の数値積分誤差の問題である。3. 3 で述べたように、特性曲線式 (1) の逐次積分（計算時間間隔 $\Delta t_*/M$ 、図-4）には、修正オイラー法を用いるものとする。これに伴う誤差（1つの時間ステップ当り）の基本的な部分 ε は、次式⁷⁾ のように表される。

$$\varepsilon \propto (\Delta t_*/M)^3 \cdot (d^3 x_*/dt_*^3) \dots\dots\dots (18)$$

ここで、遷移流れに対し、次のような仮定を置く。なお、これらの仮定は、実際にもほぼ成立しているものと考えられる。

- ① 伝播・移動に伴う水面形（水面こう配）の変化は小さい。
- ② 伝播・移動の速度はほぼ一定である。
- ③ 特性曲線に沿う流速の変化 dV_*/dt_* は、微小擾乱の伝播速度のそれ dc_*/dt_* に比べ、無視し得る程度に小さい。

これより、上式 (18) は、次のように変形される（図-5、6）。

$$\frac{\varepsilon}{\Delta x_*/M} \doteq \frac{\varepsilon}{c_*' \cdot \Delta t_*/M} \propto \left(\frac{\Delta t_*}{\Delta x_*} \right)^2 \cdot \left(\frac{dc_*}{dh_*} \right)^2 \cdot \frac{(\Delta h_*)^2}{M^2} \left(\frac{V_*}{c_*'} - \frac{\omega_*}{c_*'} \pm \frac{c_*}{c_*'} \right) \dots\dots (19)$$

ここに、 Δx_* ：計算距離さびみ、 ω_* ：遷移部の水面（形）の移動・伝播速度（下流方向へ伝播する場合が正）、 Δh_* ： Δx_* 区間における上下流断面の水深差（図-5）。

(19) 式より、積分型スキームの誤差について、以下の注目すべき諸点を指摘できる。

- ① 最も大きい誤差が現れるのは、上流へ進行する遷移流れの正の特性曲線に沿う積分においてである。
- ② 誤差は分割数 M の 2 乗に反比例する。
- ③ Δx_* 区間での遷移流れの水深差（すなわち、水面こう配）が大きいほど、また、特性曲線に沿って開水路流れ部分の占める割合が多いほど、誤差は大きくなる。

次に、上述した 3つの仮定を満たす遷移流れを対象に、パラメータ c_*' 、 ω_* 、 Δh_* 、 h_{*a} （開水路流れ部分で最も浅い水深）の値がそれぞれ異なる遷移流れを種々想定し（図-5）、これらパラメータおよび分割数 M と誤差 E_r （具体的には、内挿点の位置座標値の算定誤差）との関係を数値シミュレーションを行なって調べた。得られた結果の一例、すなわち、 E_r が最も大きく現れる場合（ $\omega_* = c_*'$ のとき）の結

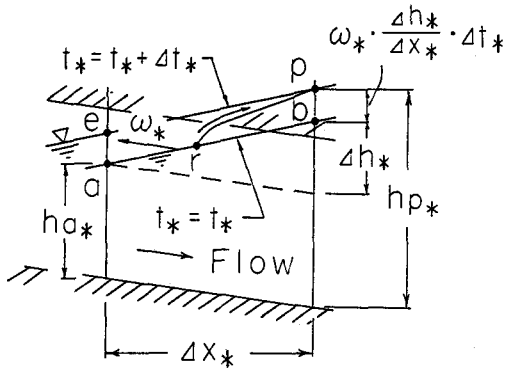


図-5 遷移流れと各種パラメータ

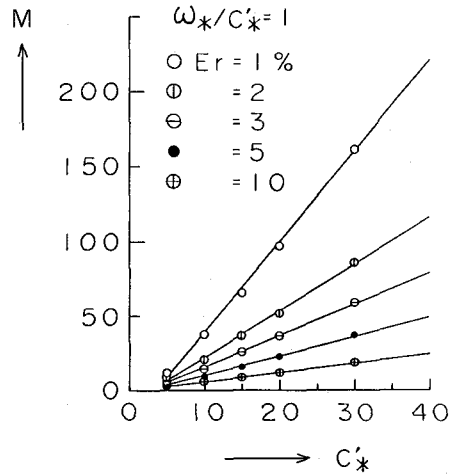


図-6 $M \sim c^*$ および E_r の関係

果を、図-6に示す。なお、この結果(例)を用いることは、実用上からは、安全側である。

ここで、積分型スキームの誤差 E_r は、通常の数値計算の場合と同様に、それが5~10%程度までであれば、実用上、差し支えないとする。このとき、実流域の下水道管渠システムでは一般に、 $c^* = 10 \sim 30$ であるから、図-6より、分割数 M は 10~30 程度で良いことが分かる。

この結果は、これまでの経験的に得られていた値 $M \approx 30$ の理論的根拠を示すものである。

5. 結 論

本論文では、著者らが既に提案しているところの、遷移流れに対する高精度で安定性のよい数値計算スキーム(矩形格子による特性曲線法を用いるときの積分型スキーム)における計算時間間隔の分割数 M の適値について、理論的また数値的に検討を進めた。すなわち、特性曲線式を逐次積分する際の誤差解析を進めた結果、これまで経験的に得られていた適値 $M \approx 30$ に対する理論的根拠を得ることができた。

参 考 文 献

- 1) 安川 浩・川口士郎・山岡 勉：豪雨時のマンホール蓋飛散現象に関する基礎的研究，第24回水理講演会論文集，pp. 465~474，1980。
- 2) 渡辺政広・江藤剛治・室田 明：取付管の調圧効果を考慮した下水管網内の遷移流計算法，土木学会論文集，第411号／II-12，pp. 81~90，1989。
- 3) Watanabe, M., T. Etoh and A. Murota : Runoff simulation of sewer pipe systems with lateral pipes, J. Natural Disaster Science, Vol. 13, No. 1, pp. 19~28, 1991。
- 4) 渡辺政広・山内武志・川裾利雄：開水路流れとサーチャージ流れの遷移部における高精度の数値計算法，愛媛大学工学部紀要，第12巻第1号，pp. 213~221，1990。
- 5) 渡辺政広・石丸久人：マンホールの圧力開放効果を利用したサーチャージ流出の実用的な解析手法，水工学論文集，Vol. 36，pp. 653~658，1992。
- 6) Sevuk, A. S. and B. C. Yen : A comparative study on flood routing computation, Proc. Int. Symp. on River Mechanics, pp. 275~290, 1973。
- 7) R.W. サウスワース・S.W. デロー(岩田倫典 訳)：電子計算機のための数学I，共立全書，pp. 410~416，1969。