

開水路急拡大部の流れにおける渦の発生・発達に関する二、三の検討

Vortex Formation with Free Surface Variation in Shear Layer
of Open Channel Flows near Abrupt Expansion

細田 尚*, 木村 一郎**

by Takashi HOSODA and Ichiro KIMURA

The vortex formation with the free surface variation in the shear layer of open channel flows is investigated by means of the plane-2D-shallow water equations. The inviscid instability analysis of the tanh-type velocity profile is firstly shown in order to make sure the applicability of the equations for the vortex formation in a free boundary layer. Then, the numerical simulation is made for the plane 2D-flow domain of open-channels with an abrupt expansion. Some numerical results concerning the vortex formation (velocity vectors, contour lines of depth etc.) are shown indicating the relation between the temporal velocity variations and the vortex shedding processes.

1. はじめに

自由せん断流中の組織的な渦運動については、可視化実験による渦の発生から消滅過程の詳細な把握[1,2] および安定解析による発生・発達機構の理論的説明 [3,4] など、従来より多くの研究がなされてきた。水表面を有する開水路流れにおいても流れの合流部、複断面水路の流れおよび植生を伴う流れなどで同様の現象が観察され、実験的、理論的に多くの研究が行われている [5~9]。本研究は、このような開水路流れの混合層における組織渦を、平面2次元流れの基礎式を用いて再現しようとするものである。まず本研究で用いる平面2次元流れの基礎式の組織渦運動への適用性について検討するために、N・S方程式およびオイラー方程式に用いられる方法 [3,4,8] を援用して基礎式の安定解析を行う。その後、水路急拡大の流れを対象にして実験条件に合わせた計算条件の下で数値解析を実施し、渦の発生後の挙動や渦と流速変動および水面変動の関係について考察する。

2. 流れの対象領域と基礎式

本研究では、図-1に示したような開水路急拡大の流れを考える。急拡大の下流に、写真-1に示されるような渦運動が観察される。このような流れを解析する基礎式として、以下に示す開水路における平面2次元流れの基礎式を用いる。

(連続式)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

(運動方程式)

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial \beta u M}{\partial x} + \frac{\partial \beta v M}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{f}{2} u \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{\partial -u'^2 h}{\partial x} + \frac{\partial -u'v' h}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial \beta u N}{\partial x} + \frac{\partial \beta v N}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{f}{2} v \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{\partial -u'v' h}{\partial x} + \frac{\partial -v'^2 h}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \quad (3)$$

ここに、 h : 水深、 (u, v) : 水深平均流速の (x, y) 方向成分、 (M, N) : 各々 $M=hu$, $N=hv$ で定義される流量フラックス、 (u', v') : 変動流速の (x, y) 方向成分、 ν : 動粘性係数、 θ : 水路床勾配、 f : 摩擦損失係数でレイノルズ数の関数、 β : 運動量係数で層流の場合1.2で乱流で1.0、 (x, y) : 空間座標、 t : 時間を表わす。水深平均レイノルズ

* 正会員 工博 京都大学講師 工学部土木工学教室 (〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工修 和歌山工業高等専門学校助手 土木工学科 (〒644 御坊市名田町野島77)

応力テンソル $-\overline{u_i u_j}$ は、平面2次元の $k-\varepsilon$ モデルあるいはより簡単に次式で表示される。

$$-\overline{u_i u_j} = D_h \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad D_h = \alpha h u_*$$

ここに、 u_* : 摩擦速度($=\sqrt{f(u^2+v^2)/2}$), k : 水深平均乱れエネルギー, α : 係数である。また、 i, j はともに1,2の値をとり、1は x 方向、2 y 方向を意味する。(kは瀬津の実験式を水深積分して得られる $2.07 \cdot u_*^2$ で評価した。)

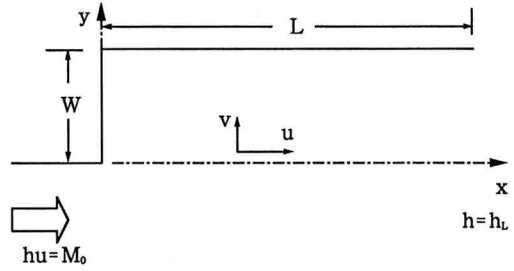


図-1 流れの対象領域と座標系

3. 基礎式の安定解析

(2) 式および (3) 式の右辺を無視した基礎式系(オイラー方程式に対応)の線形安定解析を行う。主流流速分布として $\tanh$ 型を考え、 h, u, v を次式のように表わして基礎式系を線形化する。

$$h = h_0 + h', \quad u = U_0(y) + u', \quad v = v' \quad (4)$$

(4) 式より後、 $'$ は主流からの偏差を表わす。

上式を用いて (1) ~ (3) 式を線形化し、 u', v' を消去すれば水深変動 h' の関係式として次式が導かれる。

$$\frac{\partial^3 h'}{\partial t^3} + 3U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t^2 \partial x} + (3U_0^2 - gh_0) \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial x^2} - gh_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial y^2} + U_0(U_0^2 - gh_0) \frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} - gh_0 U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial x \partial y^2} + 2gh_0 \frac{dU_0}{dy} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5)$$

ここで、水深変動を

$$h' = \phi(y') \exp\{ik'(x' - c't')\}, \quad x' = x/h_0, y' = y/l, k' = k/h_0, c' = c/U_\infty, t' = tU_\infty/h_0, l: \text{流速分布の長さのスケール}$$

において、 ϕ に関する関係式としてレーリー方程式に対応する次式が導かれる。

$$(U_0' - c') \frac{d^2 \phi}{dy'^2} - 2 \frac{dU_0'}{dy'} \frac{d\phi}{dy'} + \left(\frac{l}{h_0}\right)^2 k'^2 (U_0' - c') [Fr^2 (U_0' - c')^2 - 1] \phi = 0 \quad (6)$$

$$U_0' = U_0/U_0(\infty), Fr = U_0(\infty)/\sqrt{gh_0}$$

図-2に示した $\tanh$ 型の流速分布を仮定する。Michalke [4]に従って $\phi \sim \exp(\Phi dy')$, $z = \tanh y'$, $c_r' = 0.5$ とおき、 Φ をロビタルの定理を用いて得られる境界条件

$$z = -1: \Phi_r = \delta_r, \quad \frac{d\Phi_r}{dz} = \{(1 + \delta_r)\gamma_r + \delta_i\gamma_i\}/\{(1 + \delta_r)^2 + \delta_i^2\},$$

$$\Phi_i = \delta_i, \quad \frac{d\Phi_i}{dz} = \{(1 + \delta_r)\gamma_i - \delta_i\gamma_r\}/\{(1 + \delta_r)^2 + \delta_i^2\}, \quad \lambda = k' \left(\frac{l}{h_0}\right)$$

$$\delta_r = (A^2 + B^2)^{1/4} \cos \theta, \quad \delta_i = (A^2 + B^2)^{1/4} \sin \theta$$

$$\cos 2\theta = -A/(A^2 + B^2)^{1/2}, \quad \sin 2\theta = B/(A^2 + B^2)^{1/2}$$

$$A = \lambda^2 [Fr^2 \{(1 - c_r')^2 - c_i'^2\} - 1], \quad B = 2\lambda^2 Fr^2 (1 - c_r') c_i'$$

$$\gamma_r = \frac{1}{4} \lambda^2 Fr^2 - \frac{2\delta_r + 4c_i'\delta_i}{1 + (2c_i')^2}, \quad \gamma_i = \frac{1}{2} \lambda^2 Fr^2 c_i' + \frac{4c_i'\delta_r - 2\delta_i}{1 + (2c_i')^2}$$

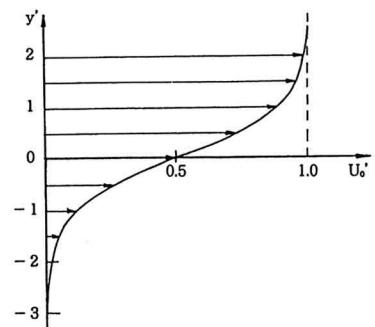


図-2 $\tanh$ 型流速分布

の下で数値的に解き、 $z = 0$ で $\Phi_r = 0$ となる c_i' を求め図示したのが図-3 ($Fr = 0.6$ の場合)である。レーリー方程式の場合と Φ の分布形が異なるが、増幅率と波数の関係は同様であり、(1) 式~ (3) 式の大規模渦運動への適用性が示唆される。さらに、 Φ を用いて計算された ϕ の分布形、および ϕ と(2),(3)式の線形方程式を用いて計算さ

れた h' と (U_0+u',v') を図-4、図-5に示した。ただし、 h' は次式を用いて計算した。

$$h' = \varepsilon [\phi_r \cos(k'\xi') - \phi_i \sin(k'\xi')], \quad \xi' = x' - c't', \quad (\varepsilon: \text{任意の定数で図-5には} 0.8 \text{とした。})$$

図-5 (b) の流速分布をみると、 $y' = 0$ より多少下方に渦が生じていることがわかる。この渦の中心位置は、図-5 (a) の変動水深分布と比較すると、水深が極小になる位置より下流かつ下方にずれていることがわかる。

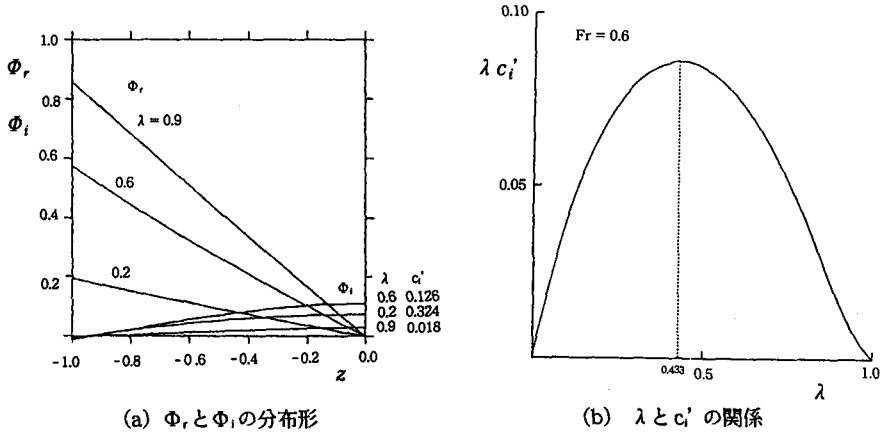


図-3 安定解析結果 ($Fr = 0.6$)

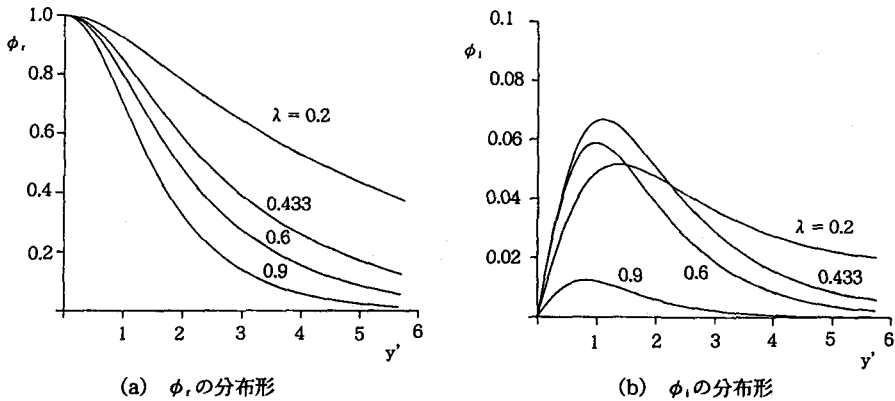


図-4 ϕ の分布形 ($Fr = 0.6$)

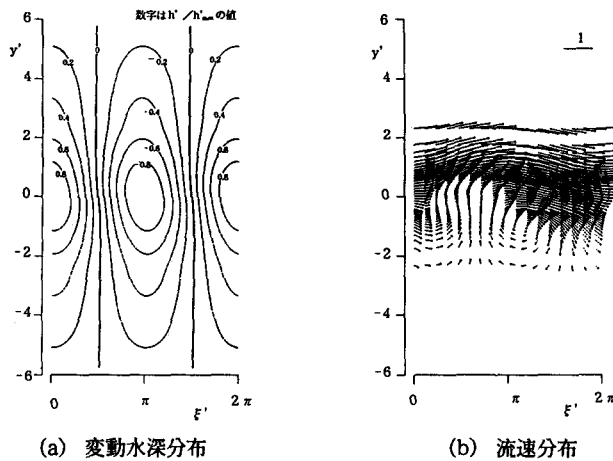


図-5 安定解析による変動水深と流速分布 ($Fr = 0.6$)

4. 数値解析

3.で行った考察により、(1)～(3)式のせん断層の組織渦への適用可能性が示唆された。そこで、実際に数値解析を行うことにより渦の発生・発達・発達の再現を行う。数値解析は、本研究で行った水理実験の条件にほぼ一致するように行った。計算の条件を表-1、初期条件と境界条件を表-2に示す。計算法はコントロール・ボリューム法を用い、運動方程式の慣性項にQUICKスキーム [10]、時間積分にアダムス・バッシュフォース法を適用した陽解法を用いた [11]。

図-6 (a)～(d)に、再現された渦の発生、発達および合体過程を示す。図-6 (b)は (a) に対応する水深分布であり、図-5に示した安定解析結果と同様に、渦の中心は水深の極小位置より下流かつ流速の小さい方にずれていることがわかる。。

表-1 計算の条件

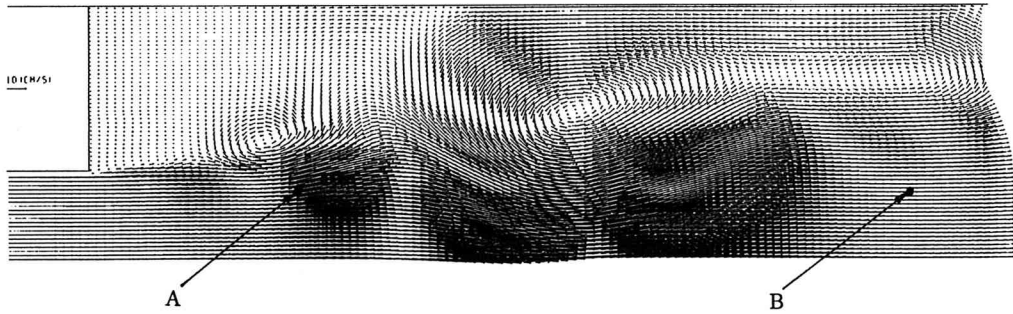
記号の説明は図-1参照

L (cm)	W (cm)	M ₀ (cm ² /s)	h _e (cm)	ν (cm ² /s)	
48.0	8.0	20.0	1.0	0.917 × 10 ⁻²	
sin θ	Δ x (cm)	Δ y (cm)	Δ t (s)	Fr	α
1/500	0.2	0.2	0.0005	0.64	0.3

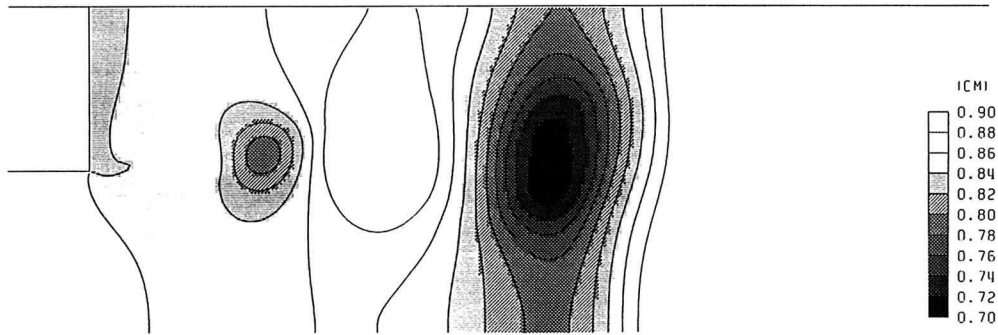
$$Fr \equiv M_0 / \sqrt{g h_e h_e}$$

表-2 初期条件・境界条件

初期条件	$0 \leq y \leq W$	$M = 0, N = 0, h = h_e$
	$0 \geq y$	$M = M_0, N = 0, h = h_e$
境界条件	上流端	$M = M_0, N = 0$
	下流端	$h = h_e, \partial M / \partial x = 0, \partial N / \partial x = 0$
側壁のせん断応力		
$u_* \Delta / 2 / \nu \leq 10$ non-slip (Δ : 格子サイズ)		
$u_* \Delta / 2 / \nu > 10$ 対数則で u_* を評価		

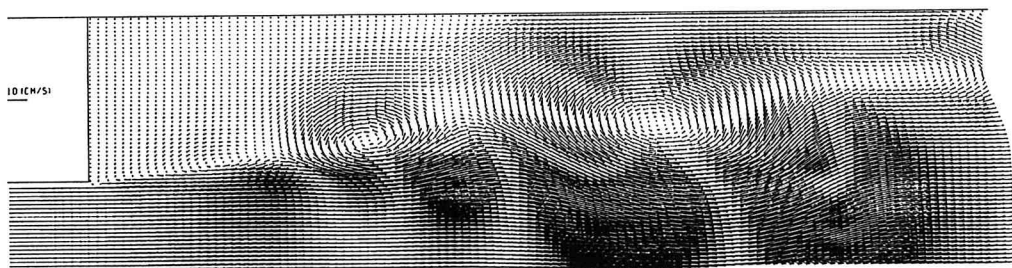


(a) 流速ベクトル図 (t = 19.7 (s))

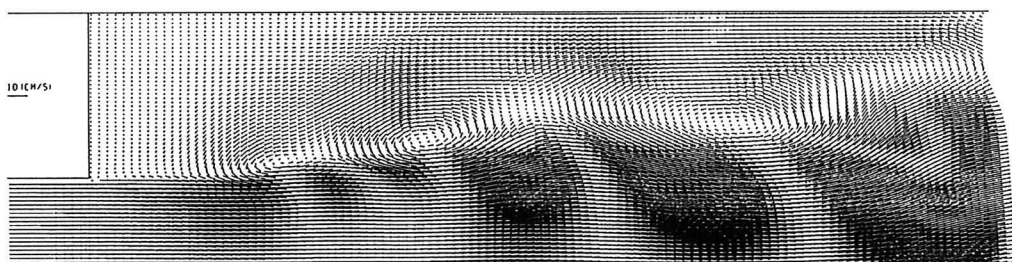


(b) 水深分布 (t = 19.7 (s))

図-6 渦の発生・発達・合体過程



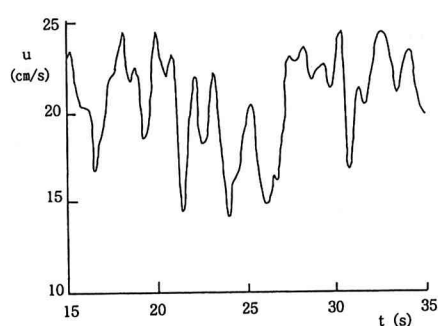
(c) 流速ベクトル図 ($t = 20.3$ (s))



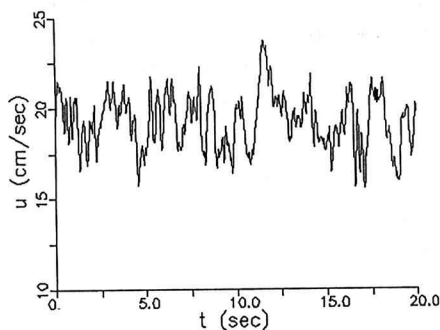
(d) 流速ベクトル図 ($t = 20.7$ (s))

図-6 (c),(d) 渦の発生・発達・合体過程

図-7 (a),(b) は、図-6 (a) に示した点Aでの流速変動の計算結果およびプロベラ流速計による1/2水深位置での計測結果である。計算および実験結果のどちらにも周期的な変動は見られず、2~5秒の長周期変動の中に約1秒周期の早い変動が見られる。図-6を含む多くの流速ベクトル図と図-7の比較により、約1秒周期の変動は急拡大部近傍のせん断不安定による渦の発生周期であり、2~5秒の長周期変動は渦の合体と後続の渦の吸収および一つの渦単独での増幅に起因していることが推察された。下流の点B(図-6 (a) に図示)での流速変動を図-8に示した。周期約1秒の変動は消失し、合体・吸収により増幅した渦の影響による2~5秒の長周期変動のみがみられる。



(a) 計算結果



(b) 実験結果

図-7 A点における流速変動

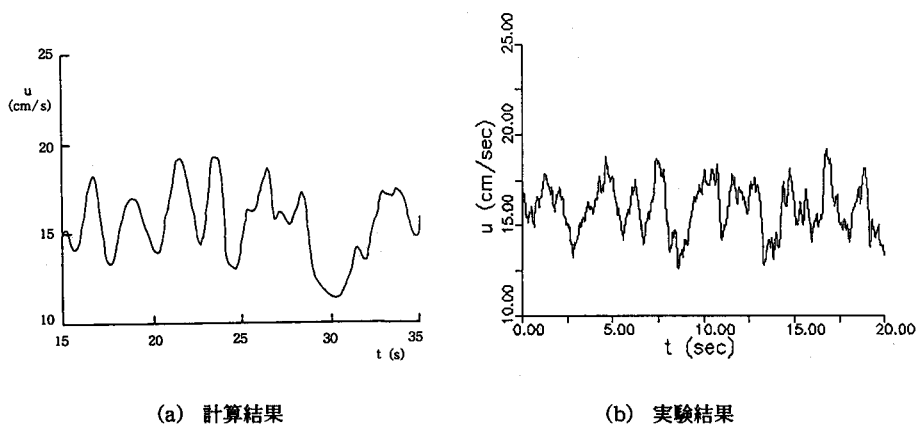


図-8 B点における流速変動

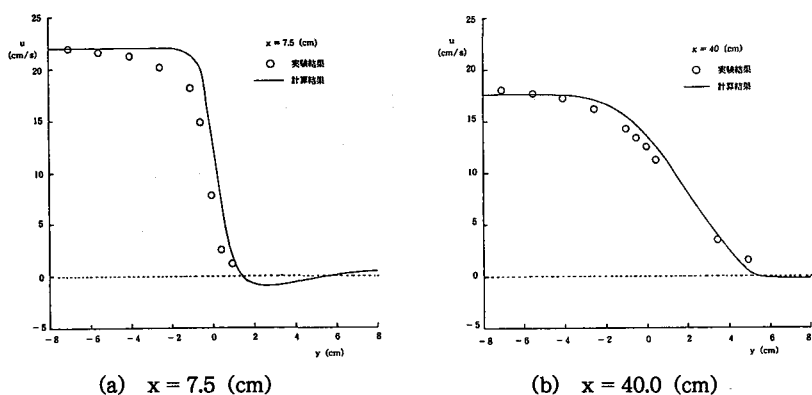


図-9 横方向の流速分布

図-9は時間平均後の横方向の流速分布を比較したものである。(流速6 (cm/s) 以下は微流速計(計測技研製)で計測した。)計算結果は実験結果とほぼ一致している。

5. おわりに

本研究は、開水路平面2次元流れの基礎式を用いて混合層の組織渦の再現を試みたものである。まず、安定解析を行い基礎式の渦運動解析への適用性を確かめた。さらに、数値解析により渦の発生、発達および合体を再現し、渦運動と水面および流速変動の関係を考察し、実験結果を用いて検証した。今後、幅広い水理条件の下で実験と解析の比較を行い、基礎式の適用限界などを明らかにしたい。

参考文献

- [1] Brown, G.L. and Roshko, A.: J. Fluid Mech., Vol.64, pp.775 - 816, 1974.
- [2] Winant, C.D. and Browand, F.K.: J. Fluid Mech., Vol.63, pp.237 - 255, 1974.
- [3] Tatsumi, T. and Gotoh, K.: J. Fluid Mech., Vol.7, pp.433 - 441, 1960.
- [4] Michalke, A.: J. Fluid Mech., Vol.19, pp.543 - 556, 1964.
- [5] 中川・瀬津・小池・室屋: 昭和61年度土木学会関西支部年次学術講演会講演集, II - 25, 1986.
- [6] 中川・瀬津・室屋・松本: 土木学会論文集 第387号/II - 8, pp.153 - 162, 1987.
- [7] 玉井編: 乱流における組織構造の役割, 土木学会水理委員会若手研究者分科会活動成果報告書, 1989.
- [8] 池田・太田・長谷川: 土木学会論文集 第443号/II - 18, pp.47 - 54, 1992.
- [9] 辻本・北村: 水工学論文集 36巻, pp.273 - 278, 1992.
- [10] Leonard, B.P.: COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING 19, pp.59 - 98, 1979.
- [11] 例えば 池田駿介編: 流体の非線形現象 5.2 流れの数値計算法, 朝倉書店, 1992.