

熱対流乱流場の自己相似解

A Similarity Solution for Turbulent Structure of Thermal Convection

道奥康治*・島崎正則**

By Kohji MICHIOKU and Masanori SHIMAZAKI

Turbulent thermal convection in a horizontal fluid layer system heated from below is analytically examined by using a turbulence closure model. Self similarity functional forms for mean temperature as well as for turbulent terms are assumed to get their solutions. Two types of scaling are proposed; one is concerned with external parameters based on the convective layer depth; the other is so-called internal parameter scaling which are based on molecular processes in the conductive sub-layer. The solutions are compared with experimental results to verify our analysis.

Keywords: thermal convection, similarity solution of turbulence,

1. はじめに

自由対流による熱・物質の輸送システムは、各種工業施設および自然界において多々見られる。未利用エネルギー施設の熱交換システム，“大気—水面”界面，“大気—地面”界面等，における熱輸送過程では工学的な課題として，conductive sub-layerでの熱交換量の把握が重要であり，何らかの予測モデルが必要である。本論では熱対流場の平均温度，乱流諸量の解として相似関数形を仮定し，与えられた熱的，力学的境界条件のもとでの熱輸送量を予測するための解析モデルを構築することを目的とする。乱流モデルには乱れの非等方性を考慮した Mewell and Yamada の Level

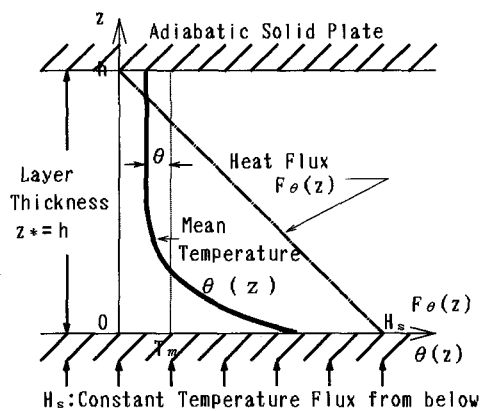


Fig-1: Schematic of Thermal Turbulent Field

* 正会員 工博 神戸大学助教授 工学部建設学科
(〒678 神戸市灘区六甲台町1-1)

**** 学生会員** 神戸大学大学院 工学研究科土木工学専攻

2.5" 乱流完結モデル¹⁾を基礎として修正を施した。モデルの妥当性を検討するためにAdrian(1986)が行った熱対流の実験結果²⁾と比較した。

2. 対象とする場

Fig-1 に示す鉛直一次元の Rayleigh-Benard 型熱対流を考える。底面より一定の温度フラックス, H_0 ($^{\circ}\text{C cm/s}$) が与えられ, 上面は断熱されている。このような系に生じる自由対流場では, 熱浮力束によって乱れエネルギーが生成され平均流は存在しない。熱対流場は水平方向に関して均質であると考え, 流れの特性は下層からの距離 z のみに依存する鉛直一次元問題として取り扱う。底面から一定の熱フラックスを供給しているため本来は非定常現象であるが, 時間平均温度分布 $\bar{T}(z, t)$ を次式のような相似関数 $\tilde{T}(\tilde{z})$ によって表わす。

$$\bar{T}(z, t) = \bar{T}_m(t) + \theta_* \tilde{T}(\tilde{z}) \quad \text{ここで} \quad \bar{T}_m(t) = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{T}(z, t) dz \quad \text{断面平均温度} \quad (1)$$

$\tilde{z} = z/z_*$: 鉛直方向の無次元座標, z_* : 長さの代表値, θ_* : 温度の代表値 (外部パラメータ, 後述), であり $\sim$ は無次元量であることを示す。乱流の二次相関項についても同様に次のような自己相似解を仮定する。

$$\overline{u_i u_j}(z, t) = w_*^2 \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}(\tilde{z}), \quad \overline{u_i \theta}(z, t) = w_* \theta_* \overline{\tilde{u}_i \tilde{\theta}}(\tilde{z}), \quad \overline{\theta^2}(z, t) = \theta_*^2 \overline{\tilde{\theta}^2}(\tilde{z}) \quad (2)$$

ここで w_* : 速度の外部パラメータ である。

3. 基礎方程式

3.1 スケーリング

基礎方程式を無次元化するにあたり, 2 種類のスケーリングを考える。1 つは Eqs. (1), (2) において用いられた外部変数 (z_*, w_*, θ_*) による表示であり, 対流層スケールの乱流構造に着目した場合の規準化である。もう 1 つは, 内部変数 (z_0, w_0, θ_0) による表示であり, 壁付近の熱境界層スケールの乱流構造に着目した無次元化である。各々のスケーリングは熱を運動量に置き換えた場合の開水路乱流や乱流境界層における外部変数, 内部変数と等価である。これらの定義を Table 1 に表示する。

Table.1 : Two Types of Scaling, i.e. External and Internal Parameters

	長さ	速度	温度	Parameters	無次元 scales
外部変数表示 convective layer scales	$z_* = h$	$w_* = (\alpha g H_0 z_*)^{1/3}$	$\theta_* = \frac{H_0}{w_*}$	Pe, Pr (or Re)	$\tilde{x}_i, \tilde{u}_i, \tilde{\theta}, \tilde{t}$
内部変数表示 conductive layer scales	$z_0 = \frac{\kappa_T}{w_0}$	$w_0 = (\alpha g H_0 \kappa_T)^{1/4}$	$\theta_0 = \frac{H_0}{w_0}$	Pe', Pr (or Re')	$\hat{x}_i, \hat{u}_i, \hat{\theta}, \hat{t}$

自然対流において汎用されるその他の無次元量を外部変数によって表示すると以下のようなである。

$$\begin{aligned} \text{ペクレ数: } Pe &= \frac{w_* z_*}{\kappa_T}, & \text{レイノルズ数: } Re &= \frac{w_* z_*}{\nu} = \frac{Pe}{Pr}, & \text{プラントル数: } Pr &= \frac{\nu}{\kappa_T} = \frac{Pe}{Re} \\ \text{レイリー数: } Ra &= \frac{\alpha g z_*^3 \theta_*}{\kappa_T \nu} = Re \cdot Pe, & \text{フラックス型レイリー数: } Ra_f &= \frac{\alpha g H_0 z_*^4}{\kappa_T^2 \nu} = \frac{Pe^3}{Pr} \\ \text{ヌッセルト数: } Nu &= \frac{H_0 z_*}{\kappa_T \theta_*} = \frac{Ra_f}{Ra}, & \text{グラスホフ数: } Gr &= \frac{\alpha g z_*^3 \theta_*}{\nu^2} = \frac{Ra}{Pr} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, α : 熱膨張係数, g : 重力加速度, H_0 : 温度フラックス, z_0 : 熱境界層厚さスケール

$z_* = h$: 全水深, ν : 動粘性係数, κ_T : 熱拡散係数。

以上のように, ここで対象とする現象を支配する独立な無次元支配パラメータは 2 つであり, ここでは Pe と Pr を用いている。また, 外部変数と内部変数による無次元諸量間の相互関係は,

$$\hat{\theta} = Pe^{-1/4} \tilde{\theta}, \quad \hat{z} = Pe^{-3/4} \tilde{z}, \quad \overline{\hat{u}_i^2} = Pe^{-1/2} \overline{\tilde{u}_i^2}, \quad \overline{\hat{u}_i \hat{\theta}} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{\theta}}, \quad \hat{t} = Pe^{-1/2} \tilde{t} \quad (4)$$

($\hat{\cdot}$ を冠したものは内部変数による無次元表示) である。

3・2 モデル方程式

鉛直一次元場における Mellor and Yamada の Level 2.5 モデルに Eqs. (1), (2) の自己相似関数形を代入し外部変数による無次元化を施すと次式が得られる。

(1) 平均水温の熱保存式

$$0 = 1 + \frac{\partial \widetilde{F}_\theta}{\partial \widetilde{z}} \quad \left(\text{ここで} \quad \widetilde{F}_\theta = \overline{w\theta} - \frac{1}{P_e} \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial \widetilde{z}} \quad : \text{全熱フラックスである。} \right) \quad (5)$$

乱流熱 拡散輸送
フラックス フラックス

(2) 乱流エネルギー方程式

$$0 = \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \left\{ \widetilde{q} \widetilde{\lambda}_1 \left(\frac{5}{3} \frac{\partial \widetilde{q}}{\partial \widetilde{z}} \right) \right\} + \frac{P_r}{P_e} \frac{\partial \widetilde{q}^2}{\partial \widetilde{z}} + 2 \overline{w\theta} - \frac{2 \widetilde{q}^2}{\widetilde{\lambda}_1} \quad (6)$$

(I) 拡散項 (II) 粘性拡散項 (III) 浮力項 (IV) 逸散項

(3) 乱流二次相関項

完結仮説に基づき、乱流二次相関項がモデル化され、乱れの非等方性テンソルに関する振動展開を行って次式のように代数的表現が得られる。

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \frac{\widetilde{q}^2}{3} - \frac{2 \widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{q}} \overline{w\theta}, \quad \overline{w^2} = \widetilde{q}^2 - 2 \overline{u^2}, \quad \overline{w\theta} = \frac{3 \widetilde{\lambda}_2}{\widetilde{q}} \left(-\overline{w^2} \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{z}} + \overline{\theta^2} \right), \quad \overline{\theta^2} = -\frac{\widetilde{\lambda}_2}{\widetilde{q}} \overline{w\theta} \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{z}} \quad (7)$$

ここで、 $(\overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2})$: 各々 (x, y, z) 方向の乱流強度、 $\overline{\theta^2}$: 水温の乱流強度の無次元量。上式中の完結仮説に用いられている長さスケールは乱れの master length λ に比例し、次式で与えられる。¹⁾

$$(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_1) = (0.92, 0.587, 16.6, 10.1, 0.23) \lambda$$

以上より外部変数による規準化に基づけば、一定の作業流体 ($P_r = \text{const.}$) のもとでは無次元支配パラメータ P_e のみによって現象が支配されることがわかる。なお、 P_e を他のパラメータに換算すると Eq. (3) の様になる。

3・3 境界条件

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_\theta &= 1 & (\text{一定の熱フラックス}), & \quad \widetilde{q}^2 = 0 & \quad \text{at} \quad \widetilde{z} = 0 & \quad (\text{底部境界}) \\ \widetilde{F}_\theta &= 0 & (\text{断熱}), & \quad \widetilde{q}^2 = 0 & \quad \text{at} \quad \widetilde{z} = 1 & \quad (\text{上端境界}) \end{aligned} \quad (8)$$

Eq. (8) を用いて Eq. (5) を解くと $\widetilde{F}_\theta$ の解として $\widetilde{F}_\theta = 1 - \widetilde{z}$ を得る。上下境界面におけるその他の乱れ成分および対流スケールは 0 である。

4. 粘性の影響の考慮

乱流強度が小さい場合や、壁面近傍での粘性の影響を表現するために次のような減衰関数を逸散項および渦動拡散係数に対して導入する。²⁾

$$\cdot \text{Eq. (6) の逸散項に対して} \quad \varepsilon' = \frac{2 \widetilde{q}^2}{\widetilde{\lambda}_1} \left(1 + \frac{P_r}{P_e} \frac{13.2}{\widetilde{q} \widetilde{\lambda}_1} \right) \quad (9)$$

$$\cdot \text{渦動粘性 (拡散) 係数に対して} \quad \widetilde{k}_q = f_\mu \widetilde{k}_{q0} \quad f_\mu = 1 - \exp^{-1} \left(0.0198 \frac{P_e}{P_r} \frac{\widetilde{q}^2}{\sqrt{2}} \right) \quad (10)$$

ここで、 $\widetilde{k}_{q0}$ は Level 2.5 model に対する無次元渦動粘性 (拡散) 係数である。

5. 計算結果と考察

乱流強度分布 $\widetilde{q}^2$ と平均温度分布 $\widetilde{\theta}$ のペクレ数 P_e への依存性を Fig-2, Fig-3 にそれぞれ示す。 $\widetilde{q}^2$ の分布は対流層中央部付近で最大値をとる。 P_e の増加と共に $\widetilde{q}^2$ は増加し、完全乱流解の相似分布形へと漸近していく。逆に P_e の減少と共に $\widetilde{q}^2$ の分布は 0 に漸近していく。ここには示していないが、 $\overline{u^2}$, $\overline{w^2}$ の分布に

についても同様であった。 $\tilde{\theta}$ については熱拡散方程式の厳密解⁴⁾
 $\tilde{\theta}/P_e = \{3(1-\tilde{z})^2 - 1\}/6$ も太実線で示す。 P_e が乱流域にあるとき、鉛直混合は促進され平均温度分布は断面平均温度 T_m ($\tilde{\theta}=0$) に漸近する。図から判断できるように $P_e = 1000$ ではほぼ完全な乱流対流に至っている。 P_e が減少するにつれ、乱流効果が低減し、温度分布は拡散方程式の解に漸近している。

Fig-4は乱流熱フラックス $\overline{w\theta}$ の鉛直分布をAdrian(1986)の実験値とともに各ペクレ数に対して比較したものである。Fig-4.aは、減衰関数を導入した場合の解である。減衰関数により底部付近の全熱フラックスに占める乱流輸送フラックスが P_e と共に減少する傾向が表現されている。また、Fig-4.bでは、Eqs. (9), (10)を含まない場合の解を示しており、底面付近を除けば十分に乱れたときのEq. (5)の解にほぼ一致している。

Adrianは $\overline{w\theta}$ をLDVとThermocouples出力の相関解析から算定している。本来、十分乱れている対流層中央以上では実験値がEq. (5)の解に一致しなければならないが、彼ら自身が指摘しているように計測上の原因のため実験値は理論より過小評価されている。そのため乱流モデルを検証するための最適なBack Dataとはいえない。

そこで内部変数表示によるconductive sub-layer付近の平均温度 $\hat{\theta}$ の鉛直分布について実験値と比較を行い検証する。Fig-5より

底面近傍では粘性・拡散効果を考慮した方が実測値をよりよく表現することが確認される。図中の T_w は、上部境界面での平均温度を表している。熱境界層内において実験値と解析結果とが一致しない原因の1つとして、境界層乱流に対する $k-\varepsilon$ モデルの減衰関数をそのまま適用したことが考えられる。

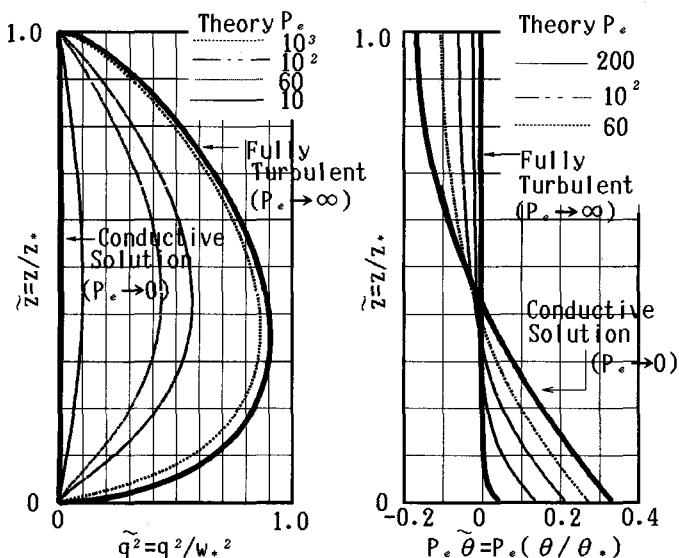
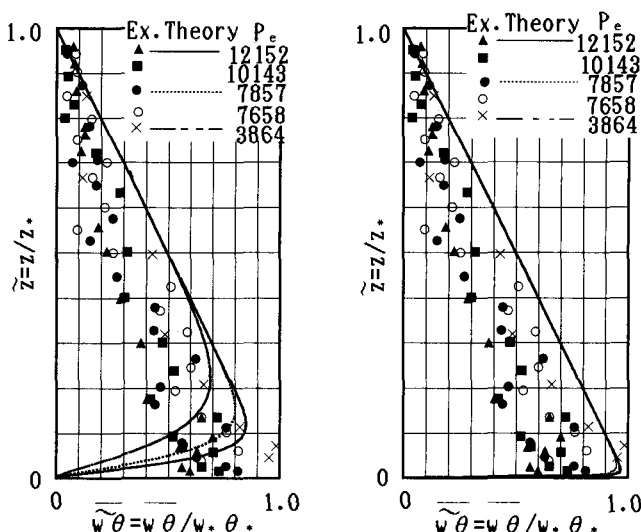


Fig-2: Turbulent Intensity Profiles, q^2/w_*^2 vs. $\tilde{z}/z_*$.

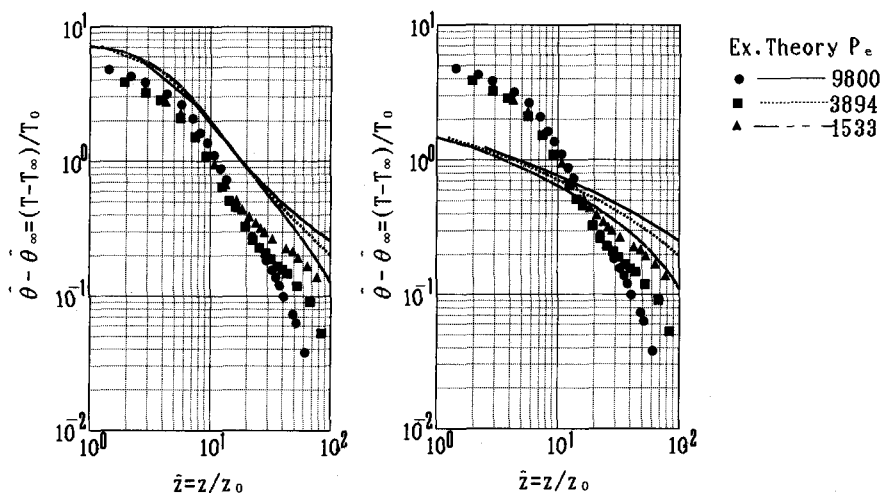
Fig-3: Mean Temperature Profiles, $P_e \tilde{\theta} = P_e (\theta/\theta_*)$ vs. $\tilde{z}/z_*$.

(External Parameterization)



(a) with damping function (b) without damping function

Fig-4: Turbulent Heat Flux Profiles with Experimental Results from Adrian(1986)



(a) with damping function (b) without damping function

Fig-5: Mean Temperature Profiles with Internal Parameterization

Figs.6~8には各々、乱れ強度の鉛直速度成分 $\tilde{w}^2$ ，水平速度成分 $\tilde{u}^2$ ，水温変動強度 $\tilde{\theta}^2$ の平方根 $\tilde{w}$ ， $\tilde{u}$ ， $\tilde{\theta}$ を外部変数により表示する。なお以降の諸量において粘性効果を考慮した場合としない場合とでは、解析結果にほとんど差異がなく理論曲線がほぼ重なるため、特に両者を区別せず考察を行う。図から判断できるようにいずれの変動強度も P_0 にはほとんど依存せず、相似な関数形を保つ。さらに底部境界付近（全水深のおよそ3割の領域）を内部変数表示でクローズアップするとFig-9, Fig-10のようである。

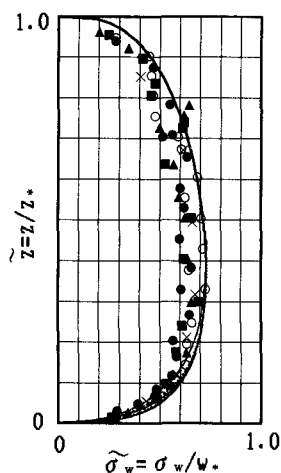


Fig-6: r.m.s. of Vertical Component of Turbulence Intensity

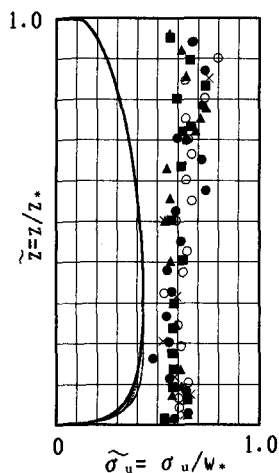


Fig-7: r.m.s. of Horizontal Component of Turbulence Intensity

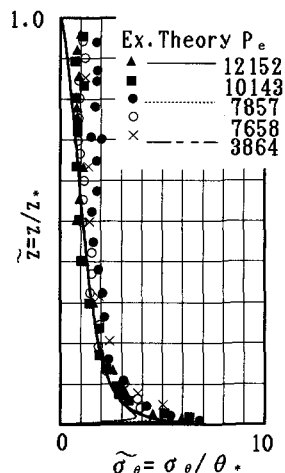


Fig-8: r.m.s. of Temperature Fluctuation Intensity

乱れエネルギー平衡式 Eq.(5)の各成分，(I)拡散項，(II)粘性拡散項，(III)浮力項，(IV)逸散項の分布についての解析結果とAdrianの実験値(1986)との比較をFig-11に各々示す．なお，Fig-4において考察したように浮力項については，計測精度が悪いため，Adrianは全浮力フラックスの理論値 ($\overline{F_\theta} = \overline{w\theta} = 1 - \tilde{z}$) を用いて拡散項，粘性拡散項，逸散項を算出している．乱れ強度 $\tilde{q}^2$ が P_θ にほぼ依存しないのと同様，TKE方程式各項の収支関係もまた P_θ とほぼ独立で相似形を保つ．なお粘性拡散項(II) (実験値のシンボルは△)は，ほぼ全域で0であるが，底部付近でわずかに負の値を示し，解析値もこれを良好に表している．

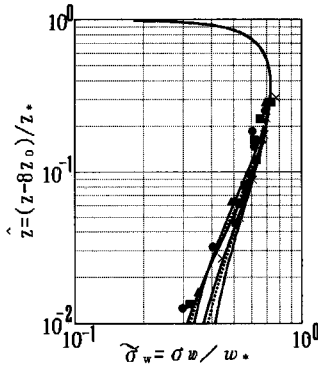


Fig-9: r.m.s. of Vertical Component of Turbulence Intensity with Internal Parameterization

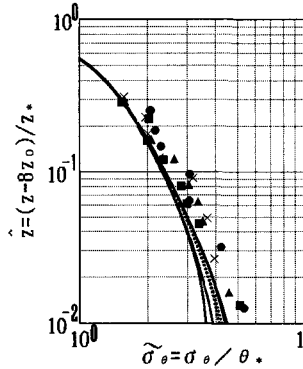


Fig-10: r.m.s. of Temperature Fluctuation Intensity with Internal Parameterization

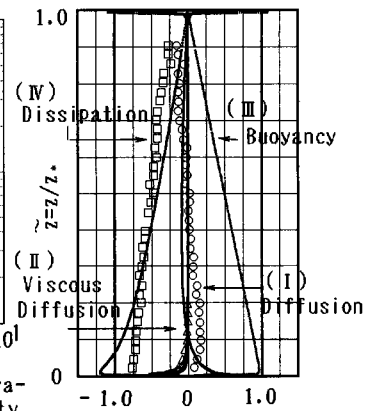


Fig-11: Turbulent Kinetic Energy Components

6. むすび

Rayleigh-Bénard 型の乱流熱対流場の自己相似解を二次相関関数完結モデルによって求めた．著者らの目的は自然系の境界面における熱交換量を評価することにある．例え，大気や水域のように大スケールの系においても，熱交換量を議論するためにはSub-Layer Scaleの熱輸送／乱流構造を的確に表現する必要がある．しかしながら，本文中に示したように低レベルの乱流対流のモデルを構築するにあたり，その背景となる実験データが現在のところ十分に得られていない．

現在，熱交換量評価のための乱流解析と水理実験を行っている．

謝辞

本研究を遂行するに当たり，Mellor and Yamada model の開発者の一人である山田哲二博士には数値計算ならびに現象面について極めて有益な助言を頂いた．データ整理に関して神戸大学柳川知道君に協力頂いた．ここに記して謝意を表する．

参考文献

- 1) Mellor, J. and Yamada, T.: A hierarchy of turbulence closure model for planetary boundary layer, J. Atmos. Sci., Vol. 31, pp. 1791~1806, 1974.
- 2) Adrian, R. J.: Turbulent thermal convection in wide horizontal fluid layers, Experiments in Fluids Vol. 4, pp. 121~141, 1986.
- 3) Noris, L. H. and Reynolds, W. C.: Turbulent channel flow with a moving wavy boundary, Rept. NO. FM-10, Stanford University, Dept., Mech., Eng., 1985.
- 4) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: Conduction of heat in solids, Oxford Science Publications, pp. 112~113, 1959.