水工学論文集　第37巻　1993年2月

貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について

Theoretical Analysis of Higher Order Moments
in a Storage Function Model for Flood Runoff

藤田睦博*・中尾隆志**・篠原伸和***

By Mutsuhiro FUJITA, Takashi NAKAO and Nobukazu SHINOHARA

For real runoff process, rainfall input, output (discharge) and its transformation system of the input to the output may be represented by a stochastic process. Therefore, the runoff system can be described by random differential equations. In this paper, authors theoretically derive differential equations to calculate the first four moments of the stochastic response from a storage function model to a stochastic rainfall input.

Keywords:stochastic response, random differential equation, storage function model

1.はじめに

降雨量は流域変換系を介して、流量に変換される。流域系への入力である降雨量を不規則関数と考えると当然、流域からの流出量も不規則関数となっている。著者らはこれまで貯留型流出モデルの確率応答とし流出量の1次および2次のモーメントを求める理論式を提案してきた[1]。工学上の諸問題は多くの場合相関理論によって解決できるものが多い。しかしながら、相関理論だけでは満足すべき解が得られない場合がある。降雨量の確率特性が既知のとき流出量の確率分布を求める問題は、これの典型的な例である。この他、超過確率、信頼性問題を解くには不規則過程の確率分布を必要とする。任意の不規則過程に関して上述した問題を解くことは、一般に極めて難しい。不規則過程がMarkov過程であるならば、Fokker-Planck方程式を解くことによって確率分布を知ることが可能である。Markov過程に従う不規則関数だけを対象とするのでは一般性に欠けるので、ここでは、降雨量が互いに独立な任意の確率分布に従う不規則関数とし、その1,2,3,4次モーメントが既知という条件下で、貯留型流出モデルにおける流出量の3,4次モーメントを理論的に求める手法を提案する。降雨量の分布型が時間単位によって変化することを考慮すると、この利用価値は大きいものと思われる。

*　正会員　工博　北海道大学教授　工学部土木工学科　（〒060　札幌市北区北13条西8丁目）
**　正会員　北見工業大学助手　工学部開発工学科　（〒090　北見市公園町165番地）
***　学生員　北海道大学大学院　（〒060　札幌市北区北13条西8丁目）

2. 基礎理論

最も簡単な貯留型流出モデルは、次式で与えられる。

$$\frac{dS}{dt}=r-q \quad (2.1) \qquad S=Kq^{P} \quad (2.2)$$

S：貯留量(mm), q：流出量(mm/hr)

r：降雨強度(mm/hr)

r(t)が不規則関数の時Sもまた不規則関数となる。

2.1 線形系(P=1)

この場合、流出量q(t)を容易に計算できて、式(2.3)で与えられる。

$$q(t)=\exp\left\{-\frac{1}{K}t\right\}\int_0^t\frac{1}{K}r(\tau)\times\exp\left\{\frac{1}{K}r(\tau)\right\}d\tau \quad (2.3)$$

r(τ)を互いに独立な不規則関数とし、その統計量を以下のように定義する。

$$E\{r(\tau)\}=\overline{r}$$

$$E\{(r(\tau_1)-\overline{r})(r(\tau_2)-\overline{r})\}=\sigma_r^2\delta(\tau_1-\tau_2) \quad (2.4)$$

$\delta(\tau)$:デルタ関数, σ_r^2:rの分散

$$E\{(r(\tau)-\overline{r})^3\}=\mu_{r3}$$

$$E\{(r(\tau)-\overline{r})^4\}=\mu_{r4}$$

式(2.3)の両辺の期待値をとると、

$$E\{q(t)\}=\overline{r}\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{K}t\right\}\right) \quad (2.5)$$

2, 3, 4次モーメントの導出に関して、$\overline{r}=0$ としても一般性を失わない。

$$\sigma_q^2=E\{q(t)^2\}=\frac{C}{2K}\sigma_r^2\left(1-\exp\left\{-\frac{2}{K}t\right\}\right) \quad (2.6)$$

式(2.6)の係数Cは、時間の次元をもつ定数である。これはデルタ関数を積分することにより生じると考える。すなわち、式(2.6)において、σ_q^2、σ_r^2は同一の次元をもっており、貯留係数は時定数に相当しており時間の次元をもっているので、両辺の次元を揃えるための係数Cを定義する必要がある。次にq(t)の3、4次モーメントμ_{q3}、μ_{q4}を求めてみよう。

$$\mu_{q3}=E\{q(t)^3\}=\exp\left\{-\frac{3}{K}t\right\}\iiint\frac{1}{K^3}E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)\}\exp\left\{\frac{\tau_1+\tau_2+\tau_3}{K}\right\}d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \quad (2.7)$$

$$E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)\}=\begin{cases}\mu_{r3} & \tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau\\ 0 & \tau_1=\tau_2=\tau,\ \tau_3\neq\tau\\ 0 & \tau_1\neq\tau_2\neq\tau_3\end{cases} \quad (2.8)$$

従って式(2.7)を次のように書くことができる。

$$\mu_{q3}=\frac{C^2}{3K^2}\mu_{r3}\left(1-\exp\left\{-\frac{3}{K}t\right\}\right) \quad (2.9)$$

μ_{q4}は、式(2.10)のように定義されるので式(2.11)を考慮して式(2.12)を得る。

$$\mu_{q4}=E\{q(t)^4\}=\exp\left\{-\frac{4t}{K}\right\}\iiiint\frac{E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)r(\tau_4)\}}{K^4}\exp\left\{\frac{1}{K}(\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)\right\}d\tau_1d\tau_2d\tau_3d\tau_4 \quad (2.10)$$

$$E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)r(\tau_4)\}=\begin{cases}0 & \tau_1\neq\tau_2\neq\tau_3\neq\tau_4\\ 0 & \tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau,\quad \tau_4\neq\tau\\ \mu_{r4} & \tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau_4=\tau\\ \sigma_r^4 & \tau_1=\tau_2=\tau,\quad \tau_3=\tau_4\neq\tau\\ 0 & \tau_1=\tau_2=\tau,\quad \tau_3\neq\tau_4\neq\tau\end{cases} \quad (2.11)$$

$$\mu_{q4}=\frac{C^3}{4K^3}\mu_{r4}\left(1-\exp\left\{-\frac{4}{K}t\right\}\right)+\frac{C^2}{4K^2}3\sigma_r^4\left(1-\exp\left\{-\frac{2}{K}t\right\}\right)^2-\frac{C^3}{4K^3}3\sigma_r^4\left(1-\exp\left\{-\frac{4}{K}t\right\}\right) \quad (2.12)$$

r(t)が正規性の不規則関数のとき、$\mu_{r3}=0$, $\mu_{r4}=3\sigma_r^4$を式(2.9), (2.12)に代入して

$$\mu_{q3}=0, \qquad \frac{\mu_{q4}}{\sigma_q^4}=3 \quad (2.13)$$

P=1の時、流出量は式(2.3)に示されているように降雨量の重み付き和で与えられるので正規分布の

再生性よりも式(2.13)の結果は明らかである。

2.2 非線形系(P≠1)

P≠1になると式(2.2)のq^Pの項がネックとなり、前節に説明した手法を利用できない。式(2.1),(2.2)を貯留量Sに関する式に書き改める。

$$\frac{dS}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{(1/p)}S^{(1/p)}=r \qquad (2.14)$$

r,q,sを平均値と平均値からの偏差で表す。

$$\begin{aligned} r(t)&=\overline{r}(t)+\widetilde{r}(t) & E\{\widetilde{r}(t)\}&=0\\ q(t)&=\overline{q}(t)+\widetilde{q}(t) & E\{\widetilde{q}(t)\}&=0\\ S(t)&=\overline{S}(t)+\widetilde{S}(t) & E\{\widetilde{S}(t)\}&=0 \end{aligned} \qquad (2.15)$$

一方、Bras[2]らはベキ乗型の確率変数$S^{(1/P)}$に関して次式を提案している。

$$S^{(1/P)}=\alpha\overline{S}+\beta\widetilde{S} \qquad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\alpha=\overline{S}^{(m-1)}\Big\{&1+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E\{\widetilde{S}^2\}}{\overline{S}^2}\\ &+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\\ &\times\frac{E\{\widetilde{S}^3\}}{\overline{S}^3}+\cdots\Big\}\end{aligned} \qquad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\beta=\frac{\overline{S}^m}{E\{\widetilde{S}^2\}}\Big\{&m\frac{E\{\widetilde{S}^2\}}{\overline{S}}+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E\{\widetilde{S}^3\}}{\overline{S}^2}\\ &+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E\{\widetilde{S}^4\}}{\overline{S}^3}\\ &+\cdots\Big\}\end{aligned} \qquad (2.18)$$

$m=1/p$

式(2.15),(2.16)を式(2.14)に代入し次式を得る。

$$\frac{d(\overline{S}+\widetilde{S})}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)(\alpha\overline{S}+\beta\widetilde{S})=\overline{r}+\widetilde{r} \qquad (2.19)$$

両辺の期待値をとると式(2.20)のようになり、式(2.19)から式(2.20)を引くと式(2.21)を得る。

$$\frac{d\overline{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S}=\overline{r} \qquad (2.20)$$

$$\frac{d\widetilde{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\widetilde{S}=\widetilde{r} \qquad (2.21)$$

βと$\widetilde{S}$の関係は式(2.18)に示すように期待値の演算子E{}を通じて結ばれている。従って、βと$\widetilde{S}$は厳密には独立ではないが、その従属性が極めて小さいものとして式(2.21)の解を求める。

$$\begin{aligned}\widetilde{S}=&\exp\left\{-\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\int\widetilde{r}(\tau)\\ &\times\exp\left\{\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1\right\}d\tau\end{aligned} \qquad (2.22)$$

式(2.22)が前節の式の(2.3)に相当しており、式(2.22)の両辺を2乗、3乗、4乗して期待値をとることにより$\widetilde{S}$に関する2,3,4次モーメントが得られる。流出量q(t)の1~4次モーメントは、次式より得られる。式(2.2)に式(2.16)を適用して

$$\overline{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S},\qquad \widetilde{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\widetilde{S} \qquad (2.23)$$

$$\begin{aligned}E\{\widetilde{q}^2\}&=\left(\frac{1}{K}\right)^{2m}\beta^2E\{\widetilde{S}^2\},\\ E\{\widetilde{q}^3\}&=\left(\frac{1}{K}\right)^{3m}\beta^3E\{\widetilde{S}^3\},\\ E\{\widetilde{q}^4\}&=\left(\frac{1}{K}\right)^{4m}\beta^4E\{\widetilde{S}^4\}\end{aligned} \qquad (2.24)$$

ここでは、式(2.14)に示すように流出量qを消去して貯留量Sに関する基本式を採用し、得られたSのモーメントを式(2.24)を用いて、流出量のモーメントに置換している。貯留量を消去して流出量に関する式にすると次式になり、微分項に含ま

$$K\frac{dq^P}{dt}+q=r \qquad (2.25)$$

れているq^Pに式(2.16)を適用せざるを得ない。α,βは式(2.17),(2.18)に示されるように時間の関数になっているので、$\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, $\frac{\partial\beta}{\partial t}$ などの項が現れて式の展開が非常に複雑になる。式(2.22)の両辺を2乗して期待値をとると式(2.26)を得る。

$$\begin{aligned}\sigma_q{}^2(t)=&E\{\widetilde{q}(t)^2\}\\ =&\exp\left\{-2\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\\ &\times\iint E\{\widetilde{r}(\tau_1)\widetilde{r}(\tau_2)\}\\ &\times\exp\left\{\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1\right\}\\ &\left\{+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_2\right\}d\tau_1d\tau_2\end{aligned} \qquad (2.26)$$

r(τ)の統計量を式(2.4)と同一とすると次式を得る。

$$\sigma_q(t)^2=\exp\left\{-2\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\int\sigma_r{}^2C\exp\left\{2\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1\right\}d\tau \tag{2.27}$$

すなわち、式(2.27)は式(2.28)の微分方程式の解になっている。

$$\frac{d\sigma_S{}^2}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\sigma_S{}^2=C\sigma_r{}^2 \tag{2.28}$$

次に、式(2.22)の両辺を3乗して期待値をとる。

$$\mu_{S3}=\exp\left\{-3\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\iiint E\{\widetilde{r}(\tau_1)\widetilde{r}(\tau_2)\widetilde{r}(\tau_3)\}$$

$$\times\exp\left\{\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_4+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_5+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_6\right\}d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \tag{2.29}$$

式(2.8)の関係式を用いて3次モーメントを得る。

$$\mu_{S3}=\exp\left\{-3\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\int C^2\mu_{r3}\exp\left\{3\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1\right\}d\tau \tag{2.30}$$

従って、μ_{S3}は次の微分方程式の解である。

$$\frac{d\mu_{S3}}{dt}+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{S3}=C^2\mu_{r3} \tag{2.31}$$

式(2.22)の両辺を4乗して期待値をとる。

$$\mu_{S4}=E\{\widetilde{S}^4\}=\exp\left\{-4\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\iiiint E\{\widetilde{r}(\tau_1)\widetilde{r}(\tau_2)\widetilde{r}(\tau_3)\widetilde{r}(\tau_4)\}$$

$$\times\exp\left\{\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_5+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_6+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_7+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_8\right\}d\tau_1d\tau_2d\tau_3d\tau_4 \tag{2.32}$$

式(2.11)の関係を用いて、次式を得る。

$$\mu_{S4}=\exp\left\{-4\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\left[\int\mu_{r4}C^3\exp\left\{4\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1\right\}d\tau\right.$$

$$\left.+3\sigma_r{}^4C^2\left(\int\exp\left\{2\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1\right\}d\tau\right)^2-3\sigma_r{}^4C^3\int\exp\left\{4\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_2\right\}d\tau\right] \tag{2.33}$$

式(2.33)は、次の連立微分方程式の解になっている。

$$\frac{dz}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta z=6\sigma_r{}^4C^2 \qquad \frac{d\mu_{S4}}{dt}+4\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{S4}=(\mu_{r4}-3\sigma_r{}^4)C^3+z \tag{2.34}$$

これまで誘導した式を整理してまとめると次のようになる。

平均値　$\dfrac{d\overline{S}}{dt}+\left(\dfrac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S}=\overline{r}$

$$\overline{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S} \qquad (2.35)$$

分散　$\dfrac{d\sigma_S^2}{dt}+2\left(\dfrac{1}{K}\right)^m\beta\sigma_S^2$

$$=C\sigma_r^2$$

$$\sigma_q^2=\left(\frac{1}{K}\right)^{2m}\beta^2\sigma_S^2 \qquad (2.36)$$

3次モーメント　$\dfrac{d\mu_{S3}}{dt}+3\left(\dfrac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{S3}$

$$=C^2\mu_{r3}$$

$$\mu_{q3}=\left(\frac{1}{K}\right)^{3m}\beta^3\mu_{S3} \qquad (2.37)$$

4次モーメント　$\dfrac{dz}{dt}+2\left(\dfrac{1}{K}\right)^m\beta z$

$$=6\sigma_r^4C^2$$

$$\frac{d\mu_{S4}}{dt}+4\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{S4},$$

$$=(\mu_{r4}-3\sigma_r^4)C^3+z$$

$$\mu_{q4}=\left(\frac{1}{K}\right)^{4m}\beta^4\mu_{S4} \qquad (2.38)$$

α,βは$\overline{S}$，σ_S^2，μ_{S3} の関数になっているので、式(2.35)～(2.38)を連立微分方程式として、貯留量Sの4次モーメントまでを計算できる。

3.シミュレーション法による検討

前節で誘導した貯留量の1～4次モーメントを求める基礎式は、いずれも降雨量r(t)を連続な不規則関数と定義している。多くの場合、降雨量の実測値は離散化された量である。降雨量の離散化過程は、次式に示す不規則関数の積分と考えられる。

$$R(t)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t}r(\tau)d\tau \qquad (3.1)$$

ここでは、積分の操作を経た統計量には大文字のRの添え字、連続な不規則関数の統計量には小文字のrの添え字を付して区別する。式(3.1)のr(τ)の統計量とR(t)のそれは、一般に異なっているので両者の関係は式(2.35)～(2.38)を利用するにあたって極めて重要である。r(τ)の統計量として、式(2.4)を用いる。式(3.1)の両辺の期待値をとると式(3.2)となり、1次モーメントは不変で

$$E\{R(t)\}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t}E\{r(\tau)\}d\tau=\overline{r} \qquad (3.2)$$

ある。2次モーメント以上の計算において、$\overline{r}=0$とおいても一般性を失わない。

$$\sigma_R^2=E\{R(t)^2\} \qquad (3.3)$$
$$=\frac{1}{\Delta t^2}\iint E\{r(\tau_1)r(\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2$$
$$=\frac{1}{\Delta t}C\sigma_r^2$$

3次モーメントは、式(2.8)を考慮して

$$\mu_{R3}=E\{R(t)^3\} \qquad (3.4)$$
$$=\frac{1}{\Delta t^3}\iiint E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)\}$$
$$d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$
$$=\frac{1}{\Delta t^2}C^2\mu_{r3}$$

4次モーメントは、式(2.11)を考慮し次式になる。

$$\mu_{R4}=\frac{C^3}{\Delta t^3}\{\mu_{r4}-3\sigma_r^4\}+\frac{C^2}{\Delta t^2}3\sigma_r^4 \qquad (3.5)$$

すなわち、1次モーメントを除いてシミュレーション法から得られる流出量q(t)の2,3,4次モーメントと式(2.35)～(2.38)で得られる理論解を比較するには、式(3.3)～(3.5)で求まるσ_r^2，μ_{r3}，μ_{r4}を式(2.35)～(2.38)に与えなければならない。計算は、式(2.1)のr(t)に乱数列を与えq(t)を時間の刻みをΔtとする数値計算で求める。3000組標本$q_i(t)$, i=1,2・・・・,3000の各時刻毎に4次モーメントまでを計算した。降雨の分布型としては、指数分布と正規分布を採用した。式(3.6)はこれらの統計量を示している。

指数分布　$\overline{R}$ =5(mm/hr), σ_R^2=25

　　　　　($\mu_{R3}=2\sigma_R^3$　, $\mu_{R4}=9\sigma_R^4$)

正規分布　$\overline{R}$ =5(mm/hr), σ_R^2=0.05

　　　　　($\mu_{R3}=0$　　　, $\mu_{R4}=3\sigma_R^4$)　(3.6)

降雨量が正規分布に従う場合、シミュレーション法では変動係数$\sigma_R/\overline{R}$ を大きくすると降雨量に負値を生ずることがあり式(3.6)に示すように正規分布ではσ_R^2を小さくしている。

図-3.1,図-3.2は、貯留係数K=20, Δt=0.1(hr)として降雨量が指数分布の場合の貯留指数Pを変化させたときのシミュレーション法(高周波成分に富む線)と式(2.35)～(2.38)による流出量の3,4次

モーメントを示している(実線)。理論式による計算では、式(3.3)～(3.5)よりσ_r^2, μ_{r3}, μ_{r4}を求めて、これらを式(2.35)～(2.38)に用いている。また、式(2.35)～(2.38)の係数α, βについては式(2.17),(2.18)で降雨量が指数分布の場合、第3項まで採用している。降雨量が正規分布の場合は、3,4次モーメントを計算するのにα, βの第1項まで採用すれば十分であった。これは、式(2.6)に示すように降雨量の変動係数の大小に依存していると考えられる。なお、流出量の平均値、分散については紙面の関係で省略するが、降雨量が指数分布、正規分布のいずれの場合もα, βの第1項まで採用すると、理論値とシミュレーション値は十分な適合度で一致していることを付記しておく。

4.まとめ

貯留型流出モデルにおいて、降雨量が時間的に確率変動する場合の過渡状態における流出量の1～4次モーメントを求める理論式を誘導した。流出量の4次モーメントまでが理論的に求めることが出来るので、流出量の分布型の推定が可能になる。図-4.1,4.2は、式(3.6)の条件下で得られた理論解について規準化した3,4次モーメントの関係を図示したものである。降雨量が指数分布で与えられている場合、流出量は貯留指数Pが小さくなると共に流出量は対数正規分布に近い形状を示していることがわかる。また、P=1(線形)の場合、流出量が定常になるまではガンマ分布の線上にプロットされ、正規分布に近づくことがわかった。降雨量が正規分布の場合には、Pの値によらず3次モーメントが理論上0となり図の左側の縦軸上にその関係がプロットされる。

参考文献

1)藤田睦博,中尾隆志:貯留型流出モデルの確率応答に関する研究、水工学論文集、第36巻、pp.561～566,1992

2) Bras,R.I. and Georgakakos K.P.:Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting:A statistical linearization approach, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, pp.95～105, 1980

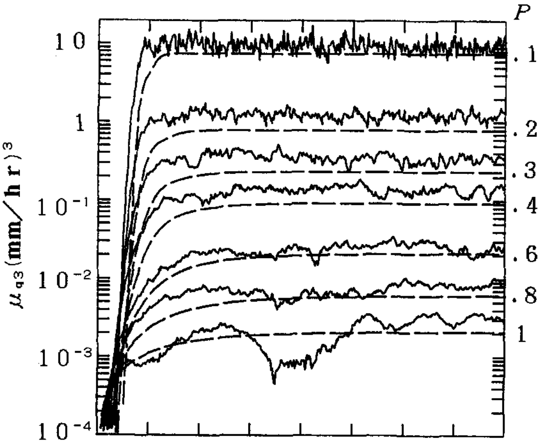

図-3.1 3次モーメント

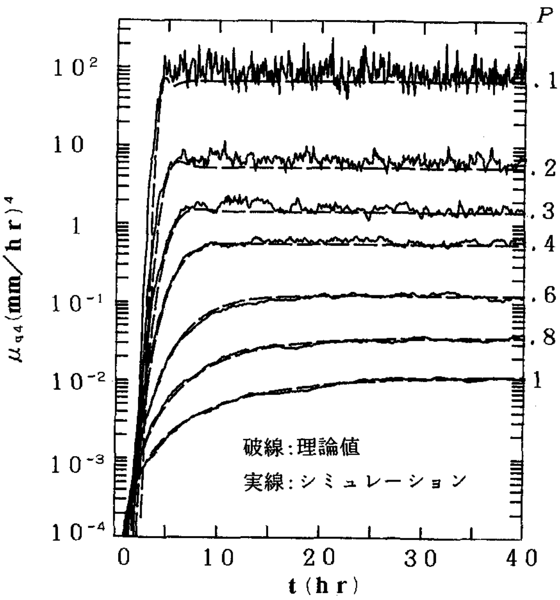

図-3.2 4次モーメント

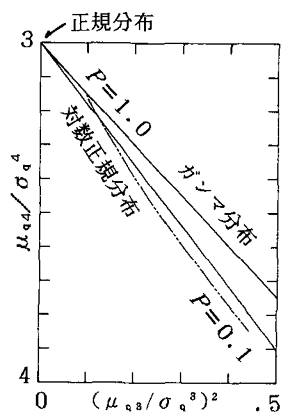

図-4.1 Δt=0.1(hr)

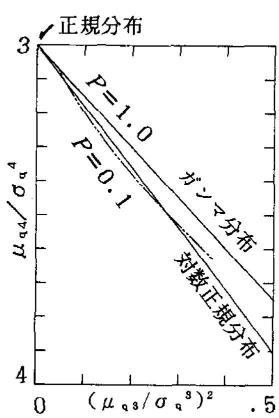

図-4.2 Δt=0.05(hr)