

洪水調節用ダムにおける n 時間先予測降雨・流量・貯水量の 条件付き確率分布関係について

Prediction of conditional probabilities of runoff and water storage at
a flood control reservoir given several hour lead forecasted rainfall

國方美規義*, 端野道夫**

BY Mikiyoshi KUNIKATA and Michio HASHINO

Conditional probability distributions of runoff discharge and water storage at a flood control reservoir given several hour lead forecasted rainfall intensities are theoretically derived using expectation techniques on the linearized relationship of storage function between rainfall and runoff intensities and on the relationship between runoff (inflow), outflow, and water storage of the flood control reservoir. By simulation based on this theory, significance of rainfall forecasts with various levels of accuracy is investigated.

keywords: flood control, conditional-probability-forecast of runoff and water storage

1. まえがき

洪水時のダム操作を行う場合、限られた時間内に、気象・水文および流域に関する情報の収集、今後の気象、水象の予測、関係各機関への通知・通報の各手続きおよび検討を行わなければならない、またかつての遊水地は造成され、人口・資産の集積が進み、ダメージポテンシャルが上昇しており、ダム操作の重要性は日増しに向上している一方、ダム操作員の定員の削減、また頻度の多い配置転換によりダム操作に関するノウハウの継承も難しくなっている。また、多くのダムの場合、多目的であることが一層ダム操作を難しくしている。

著者らは、この問題に対して、ダム操作員をサポートするシステムに関する基礎的検討として、時系列モデルによる降雨予測モデルの提案¹⁾を行ってきた。しかしながら、通常行われている平均値予測では、その信頼区間が不明確であり、また信頼区間が設けられている場合には、正規分布の仮定がなされているのが常である。短時間の降雨量分布には正規分布の仮定は成立しないことはよく言われていることであり、その意味では目安にすぎないと言えた。また、降雨は流出現象を生ぜしめ、ダムに流入し、ダムの調節により貯水位の変動を生ずる。これらの現象は、ひとつらなりのものであり、それぞれ確率現象である。よって、降雨予測から流出予測、ダム操作に至る水文量を予測するには、その現象を確率分布で記述し、それを基に予測を行うことが重要と考える。

* 正会員 工修 四電技術コンサルタント 土木第2部 (〒761-01 高松市屋島西町2 1 0 9-8)

** 正会員 工博 徳島大学教授 工学部建設工学科 (〒770 徳島市南常三島町2-1)

そこで、本報告では、時間雨量の確率分布（複合ポアソン分布）を設定し、これを基に、流量、ダム貯留量の条件付き確率分布を理論的に誘導する。そして、モデルダムを想定し、この理論の検証を行う。なお、今回の検討で用いた雨量資料は、吉野川水系左支川銅山川中流部に位置する柳瀬ダム流域の流域平均雨量（富郷地点上流）である。

2. 条件付き確率分布の理論的誘導

2-1. 時間雨量の確率分布

現時点 t から n 時間先の雨量の真値 x_{t+n} の確率分布は、今までの雨量を考慮した今後 n 時間先の雨量の分布として、ポアソン分布とガンマ分布の複合分布で定義される α , β , Λ_{t+n} をパラメータとする複合ポアソン分布に従うとする。確率密度関数 $f(x)$, 積率母関数 $H(\theta)$ および t 時点までの値が全て与えられた場合 (Ω) の積率 (期待値 E , 分散 V , 歪係数 C) は、次式で示される^{2) 3)}。

$$f(x_{t+n}) = \frac{\exp(-\Lambda_{t+n}) \exp(-\beta x_{t+n})}{x_{t+n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{t+n}^n (\beta x_{t+n})^{n\alpha}}{n! \Gamma(n\alpha)} \quad (1)$$

$$H(\theta) = \exp[\Lambda_{t+n} \{ \frac{1}{(1-\theta/\beta)^\alpha} - 1 \}] \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} E(x_{t+n} | \Omega) &= \Lambda_{t+n} \alpha / \beta, & V(x_{t+n} | \Omega) &= \Lambda_{t+n} \alpha \cdot (\alpha+1) / \beta^2 \\ C(x_{t+n} | \Omega) &= (\alpha+2) / \sqrt{\Lambda_{t+n} \alpha (\alpha+1)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なお、分散、歪係数と期待値との関係は、式(3)より次のように示される。

$$\left. \begin{aligned} V(x_{t+n} | \Omega) &= E(x_{t+n} | \Omega) (\alpha+1) / \beta \\ C(x_{t+n} | \Omega) &= (\alpha+2) / \sqrt{E(x_{t+n} | \Omega) \beta (\alpha+1)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

現時点 t から n 時間先の雨量を推定する場合に真値 x_{t+n} と予測値 $\hat{x}_{t+n}$ および予測誤差 ε_{t+n} との関係は式(5)で表わす。

$$\hat{x}_{t+n} = x_{t+n} + \varepsilon_{t+n} \quad (5)$$

式(5)の両辺の期待値をとり、式(4)に代入すると、予測値の期待値と真値の期待値、分散、歪係数との関係が次のように示される。

$$\left. \begin{aligned} E(x_{t+n} | \Omega) &= E(\hat{x}_{t+n} | \Omega) \\ V(x_{t+n} | \Omega) &= E(\hat{x}_{t+n} | \Omega) (\alpha+1) / \beta \\ C(x_{t+n} | \Omega) &= (\alpha+2) / \sqrt{E(\hat{x}_{t+n} | \Omega) \beta (\alpha+1)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

予測誤差 ε_{t+n} の確率分布は、 a , b , d をパラメータとするガンマ分布に従うとする。確率密度関数 $f(\varepsilon)$ および積率は、次式で示される。

$$f(\varepsilon_{t+n}) = b^a / \Gamma(a) \cdot \exp[-b(\varepsilon_{t+n}-d)] \times (\varepsilon_{t+n}-d)^{a-1} \quad (7)$$

$$E(\varepsilon_{t+n}) = a/b+d=0, \quad V(\varepsilon_{t+n}) = a/b^2, \quad C(\varepsilon_{t+n}) = 2/a^{0.5} \quad (8)$$

2-2. 流量の確率分布

流量の確率分布は、雨量と流量との関係を貯留関数法により記述し、この関係を線形化し、期待値計算により流量の積率を求め、条件付きガンマ分布を適用する。

貯留関数法は、 k , p をパラメータ、 x を時間雨量(mm/hr), q を流出高(mm/hr), f_x を流出率, S を貯留高(mm/hr)として、一般に次のように示される。

$$dS/dt = f_x x - q \quad (9), \quad S = k q^p \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入することにより式(11)を得る。

$$dS/dt = k p q^{p-1} \cdot dq/dt = f_x x - q \quad (11)$$

ここで、現時点 t から n 時間先の時点で差分化し、簡単のために $i = t+n$ とし、

$$dq/dt = (q_i - q_{i-1}) / \Delta t, \quad q = (q_i + q_{i-1}) / 2, \quad q^{p-1} = q_{i-1}^{p-1}, \quad x = x_i$$

とおくと、式(11)は次のように示される。

$$k p q_{i-1}^{p-1} (q_i - q_{i-1}) / \Delta t = f_x x_i - (q_i + q_{i-1}) / 2$$

よって、 q_i で整理すると式12を得る。

$$q_i = \phi_1(q_{i-1}) - x_i + \phi_2(q_{i-1}) \quad (12)$$

ここに、

$$\phi_1(q_{i-1}) = \frac{f_x}{k p q_{i-1}^{p-1} / \Delta t + 1/2}, \quad \phi_2(q_{i-1}) = \frac{(k p q_{i-1}^{p-1} / \Delta t - 1/2) q_{i-1}}{k p q_{i-1}^{p-1} / \Delta t + 1/2}$$

ここで、 $\phi_1(q_{i-1})$ と $\phi_2(q_{i-1})$ の分母にテーラー展開を第3項まで適用すれば、式12は式13のようになる。

$$q_i = f_x \phi_{a, i-1} x_i + (1 - \phi_{a, i-1}) q_{i-1} \quad (13)$$

ここに、

$$\phi_{a, i-1} \equiv \kappa q_{i-1}^m - \frac{\kappa^2}{2} q_{i-1}^{2m} + \frac{\kappa^3}{4} q_{i-1}^{3m} \quad (\kappa \equiv \Delta t / (k p), m \equiv 1 - p) \quad (14)$$

式13の両辺の1～3次の積率を求め、以下の式を得る。これは q_{i-1} が与えられたときの条件付き期待値である。

$$\left. \begin{aligned} E(q_i | q_{i-1}) &= f_x \phi_{a, i-1} E(x_i | \Omega) + [1 - \phi_{a, i-1}] q_{i-1} \\ V(q_i | q_{i-1}) &= (f_x \phi_{a, i-1})^2 V(x_i | \Omega) \\ C(q_i | q_{i-1}) &= C(x_i | \Omega) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

よって、条件付き期待値は、 g を流量の確率密度関数とすると、式16で表される。

$$\begin{aligned} E(q_i | \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(q_i | q_{i-1}) g_{i-1}(q_{i-1} | \Omega) dq_{i-1} \\ &= f_x E(x_i | \Omega) E(\phi_{a, i-1}) + E(q_{i-1} | \Omega) - E(q_i \phi_{a, i-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $E(\phi_{a, i-1}) \approx \phi_{E(a, i-1)}$ 、 $E(q_i \phi_{a, i-1}) \approx \phi_{E(a, i-1)} E(q_{i-1} | \Omega)$ と近似すると、

$$\begin{aligned} E(q_i | \Omega) &= f_x E(x_i | \Omega) \phi_{E(a, i-1)} + E(q_{i-1} | \Omega) [1 - \phi_{E(a, i-1)}] \\ \text{同様に} \quad \left. \begin{aligned} V(q_i | \Omega) &= (f_x \phi_{E(a, i-1)})^2 V(x_i | \Omega) + (1 - \phi_{E(a, i-1)})^2 V(q_{i-1} | \Omega) \\ C(q_i | \Omega) V(q_i | \Omega)^{3/2} &= (f_x \phi_{E(a, i-1)})^3 C(x_i | \Omega) V(x_i | \Omega)^{3/2} \\ &\quad + (1 - \phi_{E(a, i-1)})^3 C(q_{i-1} | \Omega) V(q_{i-1} | \Omega)^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

2-3. 貯水量Sの確率分布

流入量 q (mm/hr)、貯水量 S (mm)および放流量 D (mm/hr)との関係式は、次のように示される。

$$dS/dt = q - D \quad (18)$$

なお、この放流量は、次式のようにモデル化する。

$$D = \theta_a q + \theta_s S \quad (19)$$

ここに、係数 θ_a 、 θ_s は微小時間 Δt について一定と考える。現時点 t から n 時間先の時点で式18を差分化し簡単のために $i = t + n$ とおき、式19を代入した後、両辺の期待値計算を行う。

$$\begin{aligned} E(S_i | \Omega) &= \Delta t / 2 \cdot E(q_i | \Omega) + \Delta t (0.5 - \theta_a) E(q_{i-1} | \Omega) + (1 - \theta_s \Delta t) E(S_{i-1} | \Omega) \\ \text{同様に} \quad \left. \begin{aligned} V(S_i | \Omega) &= V(q_i | \Omega) (\Delta t / 2)^2 + (1 - \theta_s \Delta t)^2 V(S_{i-1} | \Omega) + \Delta t^2 (0.5 - \theta_a)^2 V(q_{i-1} | \Omega) \\ C(S_i | \Omega) V(S_i | \Omega)^{3/2} &= (\Delta t / 2)^3 C(q_i | \Omega) V(q_i | \Omega)^{3/2} + \Delta t^3 (0.5 - \theta_a)^3 C(q_{i-1} | \Omega) V(q_{i-1} | \Omega)^{3/2} \\ &\quad + (1 - \theta_s \Delta t)^2 C(S_{i-1} | \Omega) V(S_{i-1} | \Omega)^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

2-4. まとめ

以上をまとめると次のようになる。①対象雨量に複合ポアソン分布を適用し、実績雨量を用いて式(3)によりパラメータ α 、 β を求める。②何らかの方法により雨量の予測を行い予測値の期待値 $E(\hat{x}_{i+n} | \Omega)$ が得られると、これを真値の期待値 $E(x_{i+n} | \Omega)$ に等しいと見なし、式(6)から各リードタイムに対する降

雨強度の期待値、分散、歪係数と条件付き確率分布を決める。③これらの各リードタイムに対する降雨強度の期待値、分散、歪係数と式(17)により各リードタイムに対する流量の条件付き確率分布を決定する。④これらの各リードタイムの流量の期待値、分散、歪係数が決定されると、式(20)によりダム貯留量の条件付き確率分布が決定される。

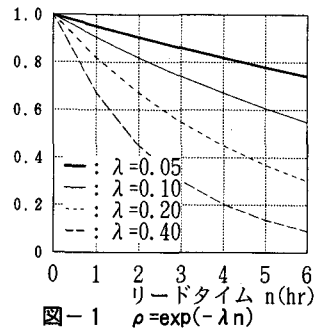
3. モデルダムでの理論の検討

上記の確率分布に関する理論をダム流域に適用し検証する。なお、検証において、ダムは特定せず、また任意の予測精度を持つ予測雨量を乱数を用いて発生させることから降雨予測モデルは用いない。検証の対象とするダムは、治水容量 100mm を持ち、洪水調節方法は一定量放流方式とし、洪水調節開始流量は 20mm/hr とする。また、流量の計算に用いる貯留関数法の定数は、 $k=40$ 、 $p=0.5$ 、 $f_x=1.0$ とする。

3-1. 予測雨量についての仮定

(a). 予測精度

今回の検討においては、予測モデルを用いないかわりに予測精度の設定を行う。予測精度はリードタイムにより精度の低下を生ずる。そこで、式(21)のように、予測精度 ρ (実績値と予測値との相関係数)、リードタイム n (hr) および定数 λ との関係モデル化する。 λ と ρ との関係は図-1 になる。



$$\rho = \exp(-\lambda n) \quad \text{----- (21)}$$

(b). 真値の確率分布

真値を実績雨量の11時間移動平均値とし、この真値の確率分布として複合ポアソン分布を採用する。なお、この複合ポアソン分布に内在する定数 α 、 β は、柳瀬ダム流域の流域平均雨量（富郷地点上流）に適用し得た $\alpha=0.05$ 、 $\beta=0.21$ を用いる。定数 Λ は時間的に変化すると考える。

(c). 予測誤差の期待値、分散、歪係数

式(9)のように、母集団における予測誤差の期待値の真値は 0 であるが、シミュレーションでの予測誤差の標本平均 $E(\hat{\varepsilon})$ は、標準正規乱数 ξ 、母集団における予測誤差分散 $V(\varepsilon)$ および標本平均を求める際に用いた標本数 m により、次式で与えられるとする⁴⁾。

$$E(\hat{\varepsilon}) = \xi \sqrt{V(\varepsilon)/m}$$

なお、標本数 m は、実績雨量を11時間移動平均としたことから11とする。

予測誤差の分散は、予測精度の定義から、母集団における雨量の分散 $V(x)$ を用いて

$$V(\varepsilon) = (1 - \rho^2) V(x)$$

予測誤差の歪係数は、母集団における雨量の歪係数 $C(x)$ に等しいと置く。

$$C(\varepsilon) = C(x)$$

3-2. 雨量の発生方法

雨量の発生方法は以下の手順で行う。

- ①. 11時間移動平均をした実績雨量に複合ポアソン分布を適用し、式(6)より実績雨量の11時間移動平均値を真値の期待値とし、雨量の分散、歪係数を求める。
- ②. 予測精度 ρ を設定する。具体的には式(21)の λ を設定する。
- ③. 予測精度と実績雨量の分散、歪係数から、予測誤差の分散、歪係数を式(22)より推定する。
- ④. 予測誤差の標本平均は、標準正規乱数と予測誤差の分散から式(22)より計算する。
- ⑤. 予測誤差の分布形を式(22)の積率を持つ3変数ガンマ分布で近似し、ガンマ乱数を発生させ、予測誤差とする。
- ⑥. 予測値は、式(5)から、予測誤差と真値（11時間移動平均値）の和として得る。

⑦. 流量および貯水量の積率（平均，分散，歪係数）計算には，この雨量予測値の積率（平均，分散，歪係数）を用いる。

3-3. 検証

今回提案理論の検証は，昭和50年8月台風5号を対象洪水として，信頼区間および流量，貯水量の期待値について行う。

(a). 信頼区間と正規性について

今回提案理論の信頼区間および正規性について検討した。

提案理論の適用結果の一例を図-2～3に示す。図中には実績雨量と，この雨量を基に貯留関数法により計算した実績流量および実績貯水量と，今回の理論による信頼区間(80%)を表示した。予測精度は，式(21)の λ が $\lambda=0.0$ （予測値として真値を与えた場合）と $\lambda=0.1$ で，リードタイム6時間の場合である。これによると，信頼区間は，雨量が最も広く設定されており，流量，貯水量に至るほどに狭まっている。また，精度が低下すると，誤差の混入により予測結果に乱れが生じており，一部80%の信頼区間に実績値が収まらない場合がある。

次に，雨量，流量および貯水量の正規性について歪係数を用いて考察する。

①雨量の分布については，式(6)から明らかのように，雨量の期待値が大きいと歪

係数は小さくなる傾向があり，雨量の規模が20mm/hrで歪係数は約1.0であるが，5mm/hrとなると分布は指数分布（歪係数が2）に近い値を示すようになる。②流量については，雨量および前時点の流量の分布が関係するが，予測が進むほどに歪係数は遞減の傾向がある。予測を開始した時点での歪係数が1程度であっても6時間先においては状態により異なるが0.2程度まで小さくなる。③貯水量についても流量と同様にリードタイムが長くなるほどに，歪係数は小さくなり正規分布に近づき，予測を開始した時点での歪係数が1程度で水位が高い場合であっても6時間先の状態では0.03程度にまで達し，ほぼ正規分布の仮定が成立し得るようになる。この貯水量の歪係数は，貯水池の状態により変化し，水位が高いほどに大きな値を持つ。

以上の結果は，通常言われている事項と一致するものである。

(b). ピーク流量とその発生時刻（流量の期待値）

乱数500組により発生させた雨量予測値を用いて，今回提案理論による流量の期待値について検討した。

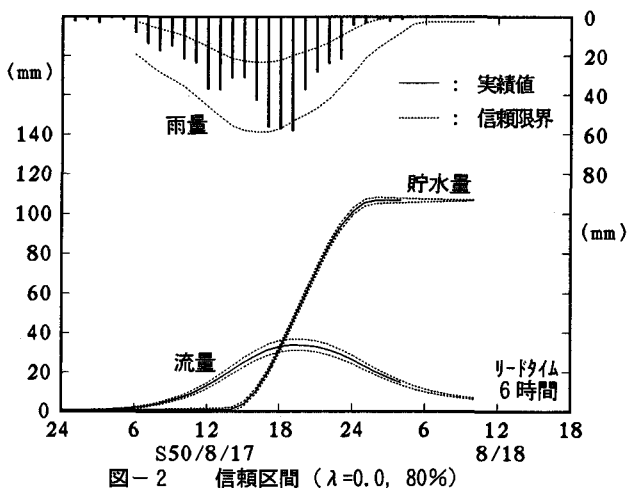


図-2 信頼区間 ($\lambda=0.0$, 80%)

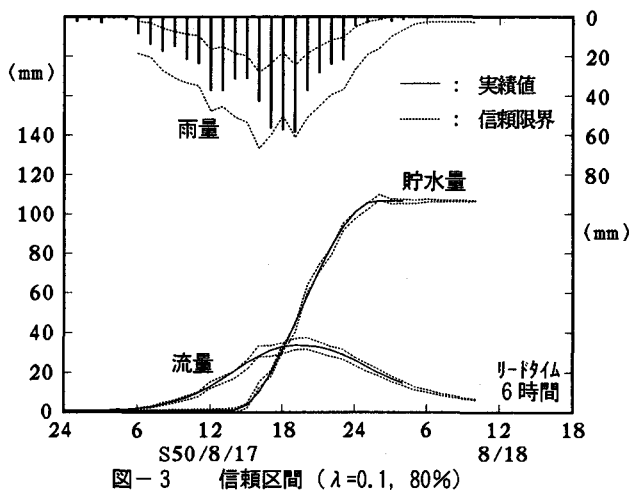


図-3 信頼区間 ($\lambda=0.1$, 80%)

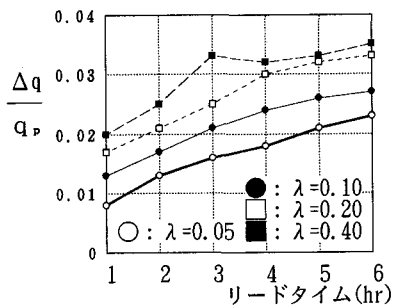


図-4 ピーク流量

まず今回提案理論により得た流量の期待値のピーク値と実績のピーク値を比較し、リードタイムとピーク流量の絶対誤差との対比図を作成し図-4に示す。ここで、リードタイム ℓ 時間の値とは、実績のピーク流量発生時刻の ℓ 時間前の時点を予測時点とした予測値とする。そして、予測値のピーク流量およびその発生時刻は、予測時点での予測値（1時間前から7時間先まで）のうちの最大値およびその発生時刻とする。これによると、予測精度が悪化するほどに、またリードタイムが長くなるにつれ、誤差は大きくなってはいるが、予測精度が今回設定した最も劣る $\rho=0.1$ （ $\lambda=0.4$, $n=6\text{hr}$ のとき）程度でも、ピーク流量の予測誤差は3.5%程度である。なお、予測精度の劣るケースにおいて乱れが存在している。

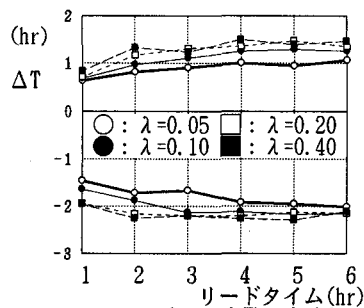


図-5 ピーク流量発生時刻

次に、流量の期待値のピーク発生時刻の予測精度について、リードタイムと『誤差の平均値±標準誤差の2倍』の対比図を作成し、図-5に示す。これによると、乱数の個数が十分でないためか、リードタイムの長い予測精度の劣るケースにおいて、乱れが存在しているが、リードタイムが長くなるほどに、また予測精度が劣るほどに、ピーク発生時刻の予測誤差は大きくなる。しかし、リードタイムおよび予測精度の違いによる予測誤差の差は小さなものであり、ピーク流量の発生時刻の予測誤差は+1.5〜2.3時間程度である。

このことは、雨量の予測精度が多少劣ったとしても平均雨量の把握が行われておればピーク流量およびその発生時刻の予測精度は確保されることを示すものである。

(c). 8割水位到達時刻（貯水量の期待値）

雨量予測値から求めたダム流入量を用いて、今回提案理論によりダムの貯水量を求め、このダムの貯水量が、総貯水量の8割となる水位（8割水位）に到達する確率が10%を越える時刻の予測を行った。この時刻の予測精度は、リードタイムと『誤差の平均値±標準誤差の2倍』の対比図として図-6に示す。ここで、リードタイム ℓ 時間の値とは、実績の8割水位到達時刻の ℓ 時間前の時点を予測時点とした予測値とする。これによると、予測誤差は、リードタイムおよび予測精度と比例関係があることが分かる。なお、対象とした洪水が大きいためか予測誤差は、ピーク流量発生時刻の誤差に比べ小さい。

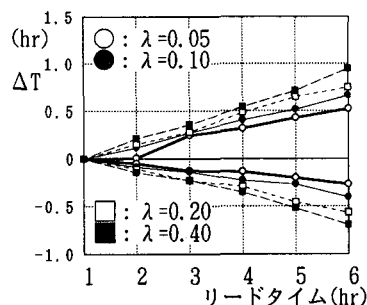


図-6 8割水位到達時刻

4. あとがき

雨量の確率分布から、流量そして貯水量へ至る条件付き確率分布関係を、正規分布の仮定を行わず、理論的に誘導した。その後、モデルダムにて理論の検証を信頼区間と期待値について行い、理論の有効性を確認した。ただ、乱数による雨量の予測値の設定において真値をベースに行ったことが、流量、貯水量の予測結果を実際の予測モデルを用いたよりも幾分良すぎる結果に傾けているように思われる。今後、この点の見直しを図りたい。

参考文献

- 1) 國方美規義, 端野道夫, 大下勲: 多地点データを用いた時系列モデルによる降雨予測手法に関する研究, 水工学論文集, 第37巻, 1993 (投稿中)
- 2) 宇田川銑久: 応用確率論入門, オーム社書店, 1964
- 3) 竹内啓, 藤野和建: 2項分布とポアソン分布, 東京大学出版会, 1981
- 4) 岸根卓郎: 理論・応用統計学, 養賢堂, 1966