水工学論文集　第37巻　1993年2月

レーダ雨量の時空間分布のフラクタル解析

Fractal Analysis of Temporal and Spatial Distributions for Radar Rain

小川進*・平野宗夫**・森山聡之***・安道竜也****

By Susumu OGAWA, Muneo HIRANO, Toshiyuki MORIYAMA and Tatsuya ANDO

The temporal and spatial distributions for radar rain can be analysed by fractal theory. The fractal dimensions of the storm are calculated by the box counting with an average 1.38 for the perimeters of rain , and the range between 1.5 and 1.9 for the contours of rain rate. Moreover, the dimensions for the spatial and temporal distributions are derived from the scaling of rain field with the range 2.7 to 2.8, and the range 1.6 to 2.0, respectively. The latter values coinside with those for the contours of rain rate. By using the above results,the predictional simulations for rain random process are calculated with the midpoint displacement technique.

Keywords: fractal, fractional Brownian motion, radar rain

1．はじめに

降雨現象は，予測困難な確率論モデルで記述される事象である．一方，Mandelbrot[1,2]が提起したフラクタルは，自然の形態の観察から決定論モデルが確率論モデルに代り得る可能性を示した．すなわち，自然の形態は，その複雑な形態がフラクタル次元というパラメータで簡便に記述できる．Lovejoy[3]は降雨と雲の形状をフラクタル次元解析により，そのフラクタル次元が1.35であることを見出した．さらに，Lovejoyら[4]は降雨の時空間分布がフラクタルで特徴づけられるベキ分布にしたがい，その時空間分布がフラクタルの簡単なモデルでシミュレートできることを示した．すなわち，非整数ブラウン運動[5]と呼ばれるフラクタル次元で特徴づけられる不規則過程により，降雨の時空間分布は記述される．森山ら[6-10]は，レーダ雨量の解析にフラクタルを用い，雨雲のフラクタル次元を求め，その空間分布のスケーリングを確認した．

本論では，以上の結果を踏まえ，レーダ雨量における空間分布ならびにその時系列のフラクタル次元を算出し，両者の関係を検証し，あわせて降雨の時系列のフラクタルモデルによるシミュレーションを行い，その妥当性を検討するものである．

*　正会員　工博　東京都水道局水質センター主任
（〒113　東京都文京区本郷2-7-1）
**　正会員　工博　九州大学工学部教授
***　正会員　同大学助手，****　学生会員　同大学大学院生
（〒812　福岡県福岡市東区箱崎6-10-1）

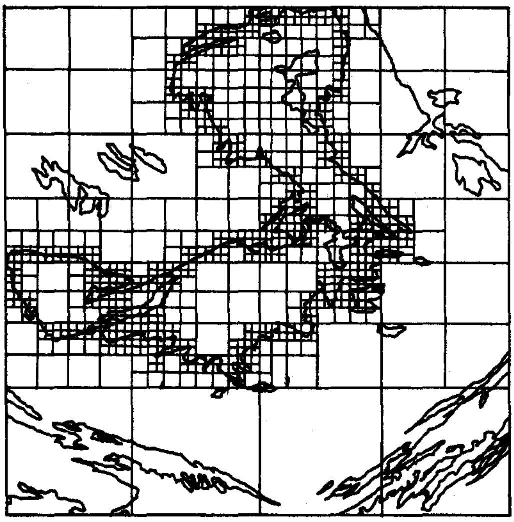

Fig.1. Box counting method for rainfall area.

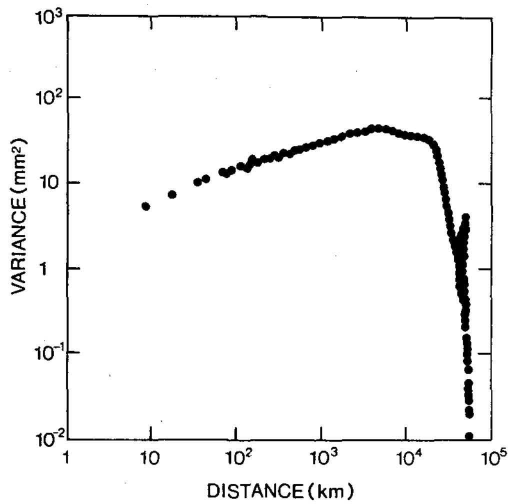

Fig.2. Semivariogram for rainfall rate

2．フラクタルモデル

フラクタル図形は，大別して自己相似集合とそれを拡張した自己アフィン集合とに分けることができる．さらに自己相似集合は，基本図形の縮小写像により描かれる自己相似集合と，分岐により描かれる内部自己相似集合とに分けられる．自己相似集合は，その統計的自己相似性により，例えば，ボックスカウンティング法で，被覆する図形の長さ r とその数 N の関係からフラクタル次元 D が求められる（Fig.1参照）．

$$N \propto r^{-D} \tag{1}$$

逆に(1)式が成立つとき，この図形はフラクタルであり，特徴的長さをもたない，スケーリングという性質を示す．一方，時空間分布において，そのスペクトルが自己相似性を示すとき，自己アフィンといい，スペクトルのセミバリオグラム（Fig.2参照）より，フラクタル次元が次のように求められる．

$$2\gamma(h)=E[z_{x+h}-z_x]^2=h^{2H} \tag{2}$$

$$D=2-H \tag{3}$$

ここで，$\gamma(h)$：セミバリオグラム，E：期待値（分散），z_{x+h}，z_x：観測点 $x+h$，x における観測量，h：2点間の距離，H：Hurst数である．ただし，(3)式は確率変数が2変量の場合，右辺が3－Hとなる．

Mandelbrotは，(2)式にしたがうスペクトルを非整数ブラウン運動と名付け，次式で定義した[1,2)]．

$$B_H(x)=I^{H-1/2}(B(x)) \tag{4}$$

ここで，$B_H(x)$：非整数ブラウン関数，I：積分演算子で指数は積分の階数，$B(x)$：ブラウン運動で，その1階微分が白色雑音である．Fig.3に示すように，この関数はHの増加にともない，激しい変動から滑らかな変動まで連続的に表現できる．

非整数ブラウン関数を実際に描くには，種々のアルゴリズムがあるが，ここでは中点変位法を示す．すなわち，(2)式で表す右辺の分散 σ^2 に対して，平均値0，分散1の正規分布する確率変数 r との積に置き換える方法である．例えば，空間分布する平面格子内の中点の物理量 $R(x,y)$ を次式のように記述する．

$$R(x,y)=[R(x-\delta,y+\delta)+R(x-\delta,y-\delta)+R(x+\delta,y-\delta)+R(x+\delta,y+\delta)]/4+\sigma^2 r \tag{5}$$

ここで，δ：平面格子間隔の1/2である．

このように，フラクタルによるシミュレーションでは簡便なアルゴリズムで，複雑な形状を描きだす特徴をもつ．時系列についても，同様なアルゴリズムがある[4,11,12)]．

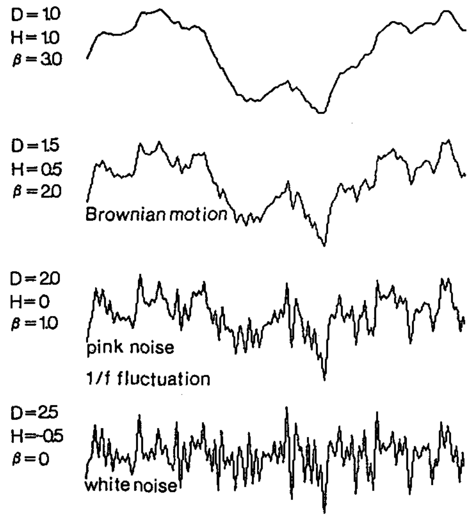

Fig.3. Fractional Brownian Functions.

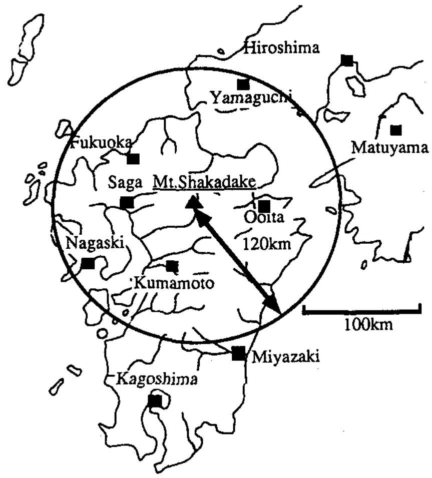

Fig.4. Radar site at Mt.Shakadake.

3．レーダ雨量データ

建設省九州北部レーダ（Fig.4参照）により観測された1988年5月3日12時00分から23時55分の前線性集中豪雨を対象とした（Fig.5参照）．このレーダは，釈迦ヶ岳山頂にあり，時間解像度5分で空間解像度が半径方向3km，水平方向2.8125°で観測している．反射因子Ｚと降雨強度Ｒとの関係は次式で示される．

$$Z = BR^{\beta} \qquad (6)$$

ここで，$\beta=1.58$, $B=224.4$である．これより，レーダ・エコーを5分ごとの降雨強度に換算したものを入力として使用した．また，観測データは極座標表示から直交座標に変換し，しきい値処理ならびにセルごとの領域分割とラベル付けを行った．さらに，対象データとして，気象庁気象衛星ひまわりの当日の写真および時間降雨データも同時に解析した．当日の気象状況は，南北に走る停滞前線が九州上空に停滞し，熊本を中心に豪雨をもたらした．

4．降雨の空間分布のフラクタル解析

降雨の空間分布のフラクタル解析は，２通りの方法で行った．すなわち，２次元平面上の雨雲の形態をボックスカウンティング法（Fig.1参照）によるものと，降雨強度の空間分布のセミバリオグラム（Fig.2参照）からフラクタル次元を導出する解析法である．前者に類似した手法で，雨雲の面積と周縁長との次元解析からもフラクタル次元は導出できる．Lovejoy[3]は，この手法でレーダ雨量と気象衛星赤外写真から熱帯降雨域のフラクタル次元を求め，1～1.2×10^{6}km^{2}の範囲でＤ＝1.35であることを算出した．そこで，1988年5月3日の12時および18時の気象衛星赤外写真からボックスカウンティング法で雨雲の平面形状のフラクタル次元を算出した．同次元はＤ＝1.37および1.39となり，Lovejoyの結果とほぼ等しかった．さらに，レーダ雨量の降雨強度の等値線のしきい値から同様に雨雲の平面形状のフラクタル次元を算定したところ，Ｄ＝1.5～1.7と広く分布し，その様子は降雨が層状から対流性に変るにつれて，フラクタル次元が減少し，極小値をとった．さらに降雨が再び層状に移るにつれて，フラクタル次元は増加に転じた[7]．

一方，降雨強度の平面空間分布のセミバリオグラムより，フラクタル次元を算定したところ，12時にＤ＝2.73，18時にＤ＝2.68となった．こちらは狭い分布で，変動が小さいが，やはり層状と対流性とでフラクタル次元に差が認められ，前者に比べ後者の方が小さいという，同様の傾向が表われた．ただし，平面空間分

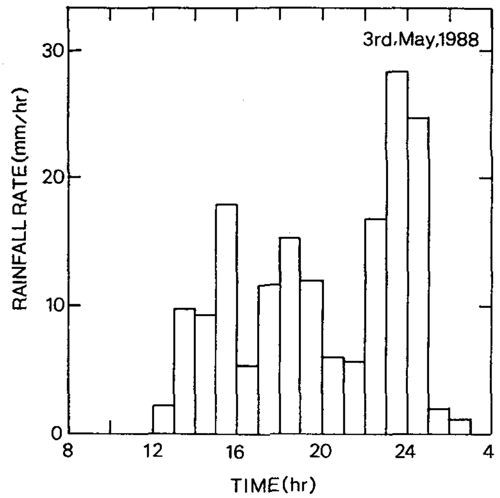

Fig.5 Hyetograph of total rainfall

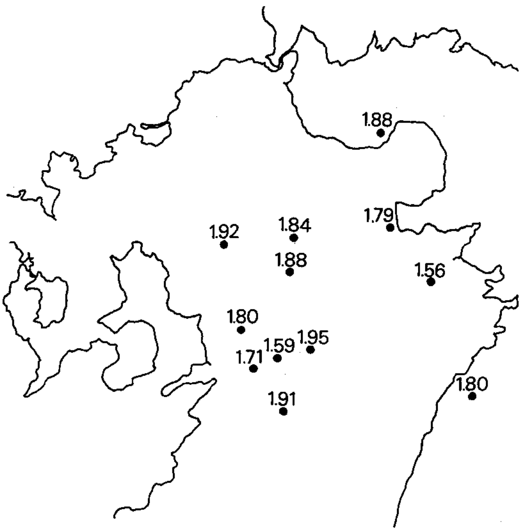

Fig.6 Fractal dimensions of temporal distribution

Table 1 Fractal dimensions for rain and cloud

RAIN TYPE	PERIMETER*	CONTOUR	SPATIAL DISTRIBUTION	TEMPORAL DISTRIBUTION
LAMINAR	1.37	1.5-1.9	2.73-2.75	1.6-2.0
CONVECTIVE	1.39	1.5-1.7	2.68-2.69	1.6-1.8**

*:Fractal dimension calculated from the weather satellite.**:Refer to 13).

布のフラクタル次元は，１次線形の次元より1.0だけ大きいが，小数部の数値の物理的意味は等価である．

５．降雨の時系列のフラクタル解析

降雨の時系列のフラクタル次元を12地点について求めた．Fig.6に示すように，Ｄ＝1.6～2.0，平均1.8と広く分布した．この値は，空間分布の平均Ｄ＝2.7と比べて，やや大きい．しかし，降雨強度の等値線から求めたフラクタル次元と範囲が一致し，強い雨が降った地点では，フラクタル次元が2.0に近い値をとった．なお，時系列のデータの一部は，気象庁の降雨観測値を使用した[13]．以上の結果をTable 1 に示す．

６．考察

6.1.雲の乱流構造とフラクタル次元

乱流構造のスケーリングについては，多くの研究があるが，フラクタルとの関係では，リチャードソン（Richardson）の4/3乗則とコルモゴロフ（Kolmogorov）の5/3乗則が特に有名である[11]．リチャードソン4/3乗則とは，乱流の時間に関するスケーリングで，２点間の距離Ｒが時間ｔについて次式を満たすというものである．

$$d\langle R^2\rangle/dt \propto R^{4/3} \qquad (7)$$

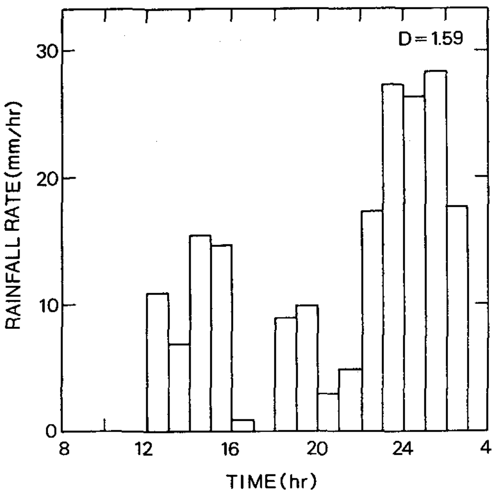

Fig.7 Computer simulation in one dimension

すなわち，乱流の面積が時間とともに直径の4/3乗で増加することで，雲の面積が直径の4/3乗であることが推定される．事実，衛星写真より平均D＝1.38と求められ，平面形状について4/3乗則が成り立つ．

一方のコルモゴロフの5/3乗則は，乱流のエネルギースペクトルにおいて，慣性領域が波数kの5/3乗にしたがって，エネルギーの散逸が生じるというものである．エネルギースペクトルの勾配$-\beta$とDとの関係は次式を満たす．

$$\beta=2E-2D+3 \qquad (8)$$

ここで，E：位相次元である．すなわち，1次元ではD＝5/3≒1.67となり，2次元ではD＝8/3≒2.67となる．対流性降雨の等値線の1.5～1.7および空間分布の2.68～2.69は，まさに乱流構造そのものが反映している．ところで，乱流のエネルギースペクトルは，慣性領域を過ぎ，粘性小領域ではエネルギーが熱として主に遷移するようになると，k^{-1}に比例する．すなわち，1次元では，D＝2.0となる．層状の降雨あるいは降雨の時系列でのD＝2.0は，熱によるエネルギーの遷移が活発化したものと考えられる．つまり，乱流の慣性領域がまさに対流セルそのものの形状が反映されており，それが有効なエネルギーを失い，層状の雨雲に遷移して行く過程が，フラクタル次元の変化として表われているといえる．

6.2.時系列のシミュレーション

空間分布している雨がある地点に落下し，降雨の時系列として観測される．雨雲の移動と雨滴の落下が線形であれば，空間分布がそのまま時系列となる．しかし，雨雲のフラクタル性と熱の移動が，時系列のフラクタル次元を2.0に近づける．Fig.7には，フラクタル次元をパラメータとして与えた場合のコンピュータ・シミュレーション[4]を示す（D＝1.59の場合）．これ自体，降雨予測に使用するにはまだ改善の余地がある．しかしながら，他の方法で求めた降雨波形を補正したり，検証するには有効ではないかと考える．特に，フラクタル次元ないしはハースト数は，流体力学的な乱流構造に基づく，降雨の種類等の条件から規定されるので，簡便な判断材料になりうる．例えば，複数の降雨データを入手した場合，その情報価値の判定は重要である．雨雲の平面形状のフラクタル次元は，D＝4/3≒1.33に近いものでなければならない（リチャードソン則）．また，降雨強度の2次元的空間分布もD＝8/3≒2.67に近いものでなければならない（コルモゴロフ則）．さらに，今回は取扱わなかったが，降雨波形のフラクタル次元の再現期間は正規分布し，コルモゴロフ則が成り立ち，ほぼ平均D＝1.68である[13]．こうした物理法則にのっとる幾何学的制約としてのフラクタル次元はその意味で，情報の真偽の判定の基準になりうるであろう．

ところで，フラクタルは内外挿関数としても有効である．現在，レーダ雨量は3kmメッシュで情報が与えられるが，都市部の雷雨性の集中豪雨ではやや粗いと考えられる．数メッシュが豪雨の生成域にすぎないからである．こうした場合，降雨域の最適形状を判定し，被害域を予測するのにフラクタルの内外挿関数が使うことができる．

7．結論

レーダ雨量の時空間分布のフラクタル解析の結果から次のような結論に至る．

(1)降雨域の平面形状のフラクタル次元は，約1.38でLovejoyの結果ともほぼ一致し，Richardsonの4/3乗則

にしたがうもの（≒1.33）と考えられる.

(2)降雨強度の空間分布のフラクタル次元は，約2.71で，Kolmogorovの5/3乗則にしたがうもの（≒2.67）と考えられる.

(3)降雨強度の等値線および降雨の時系列のフラクタル次元は，ともに1.5～2.0と広く分布し，前者では層状よりも対流性の降雨で値が低く，後者では長時間降雨が継続するほど値が高くなる傾向が認められた.

現在のところ，フラクタル理論に基づく降雨シミュレーションはまだ不十分であるが，今後，フラクタルによる降雨予測のアルゴリズムの開発がレーダ雨量の較正の上でも重要になると考えられるので，課題としたい.

参考文献

1) Mandelbrot,B.B.:The Fractal Geometry of Nature, W.H.Freeman and Company, New York, 1983.
2) Mandelbrot,B.B. and J.W.Van Ness:Fractal Brownian motions,fractional noises and applications, SIAM Review,10,4,422-437,1968.
3) Lovejoy,S.:Area-perimeter relation for rain and cloud area, Science,216,9,185-186,1982.
4) Lovejoy,S. and B.B.Mandelbrot:Fractal properties of rain,and a fractal model, Tellus,37A,209-232,1985.
5) Peitgen,H.-O. and D.Saupe:The Science of Fractal Images,Springer-Verlag,New York,1988.
6) 森山聡之・安道竜也・平野宗夫：フラクタル次元を用いた降雨形状の解析，土木学会西部支部研究発表会,Ⅱ-100,298-299,1991.
7) 安道竜也・森山聡之・平野宗夫：フラクタル次元を用いた雨域の空間特性に関する研究，土木学会第46回年次学術講演会,Ⅱ-11,62-63,1991.
8) 森山聡之・平野宗夫・安道竜也：フラクタルモデルを用いた降雨の空間スケールについて，土木学会西部支部研究発表会,Ⅱ-82,318-319,1992.
9) 森山聡之・平野宗夫・安道竜也：距離と降雨強度の関係に着目した降雨域の空間スケールについて，土木学会第47回年次学術講演会,Ⅱ-245,540-541,1992.
10) Moriyama,T.,T.Ando and M.Hirano:Fractal dimensional analysis for the spatial distribution of the rainfall rate,1993,to be submitted.
11) 高安秀樹：フラクタル，朝倉書店，1986.
12) Olsson,J.,J.Niemczynowicz,R.Berndtsson and M.Larson:An analysis of the rainfall time structure by box counting - some practical implications,J.of Hydrology,137,261-277,1992.
13) Ogawa,S.:1993,to be submitted.