

貯留型流出モデルの確率応答に関する研究

Stochastic Response in a Storage

Function Model for Flood Runoff

藤田睦博^{**}・中尾隆志^{**}

By Mutsuhiro FUJITA and Takashi NAKAO

For real runoff process, the inputs, the output and the transformations of the inputs to the output may be represented by the stochastic process. Therefore, the runoff system can be described by the random differential equations.

In this paper, we examine the stochastic response of runoff outputs(q) to inputs(r) that is random process in the runoff system that is described by the storage function model.

The results may be summarized as follow.

The variance(σ_q^2), increases as the value of the storage coefficient(p) and average rainfall input increase.

Keywords:stochastic response, runoff, storage function model

1. はじめに

一般に降雨流出系のモデルを構築する場合、流出に関係する諸要素の中で特に重要である要素のみを取り上げたり、あるいはこれら要素を単純化、理想化して取り扱う場合が多く、これらの要素が均一化して取り扱える範囲、即ちスケールが重要な問題となる。しかし、これらの要素は時間的にも空間的にも変動しており本来は決定論的な取扱いよりはむしろ確率論的に取り扱われるべきであろう。このような観点に立つと必然的に流出量も確率論的に取り扱われなければならない。

流出系が微分方程式によって記述されているなら、基礎式は確率微分方程式となる。基礎式の確率変動成分を整理すると、1)流出系の強制項である降雨量の確率変動成分。2)流域の地形、地質に関する流出系のパラメータの確率変動成分。3)降雨開始時における流域の湿潤度などに関与する初期条件の確率変動成分に分けられ、これら全ての確率変動成分が流出量の確率変動成分に関係している。

基礎式が線形の場合、流出量の確率特性は容易に求めることが出来るが、一般に流出系は非線形微分方程式で表現される場合が多い。従って、流出量の確率変動成分は上述の1)～3)の各確率変動成分のみならず、

* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科
(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

** 正会員 北見工業大学助手 工学部開発工学科
(〒090 北見市公園町165番地)

その平均値のレベルも関係することになり、簡単に解を得ることは難しい。工学的には流出量の各種のモーメントが重要となるが、本論文では特に平均、分散を解析的に求める手法について述べる。また、1)～3)までの全ての確率変動成分を考慮することは現段階では容易ではなく、1)の確率変動成分に限定して解析を進める。実際には降雨量の確率変動成分が白色雑音である場合について流出量の平均、分散を求めるための理論式を誘導した。

2. 基礎式¹⁾

貯留関数法の基礎式は、周知のように次式で与えられる。

$$\frac{dS}{dt} + q = r(t) \quad (2.1) \quad S = K q^p \quad (2.2)$$

S : 貯留量 (mm) q : 流出量 (mm/hr) r : 降雨強度 (mm/hr)

さて、降雨量 $r(t)$ が確率的に変動するならば、式(2.1)、(2.2)の S 、 q も、また、確率的に変動していることになる。いま、これらの量の平均値には $\bar{}$ 印を平均値からの偏差には $\sim$ 印を付して区別する。

$$\begin{aligned} r(t) &= \bar{r}(t) + \tilde{r}(t) \quad , \quad E\{\tilde{r}(t)\} = 0 \\ q(t) &= \bar{q}(t) + \tilde{q}(t) \quad , \quad E\{\tilde{q}(t)\} = 0 \\ S(t) &= \bar{S}(t) + \tilde{S}(t) \quad , \quad E\{\tilde{S}(t)\} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$P=1$ (線形) の場合は、式(2.1)、(2.2)より

$$K \frac{dq}{dt} + q = r(t) \quad (2.4)$$

と書けるので、 $r(t)$ が定常(2次の定常)な確率変数の時、定常状態における q の分散は、式(2.5)で与えられる。²⁾ $H(j\omega)$ は周波数伝達関数を示し、式(2.4)の場合は式(2.6)となる。

$$\sigma_q^2 = \int |H(j\omega)|^2 S_r(\omega) d\omega \quad (2.5) \quad |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{K^2 \omega^2 + 1} \quad (2.6)$$

また、 $S_r(\omega)$ は、 $r(t)$ のスペクトル密度関数である。過渡状態における q の分散を求めようとする

$$\sigma_q^2(t) = 2 \int_0^t \int_0^t \int_0^\infty S_r(\omega) \cos\{\omega(\tau_1 - \tau_2)\} h(t - \tau_1) h(t - \tau_2) d\omega d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.7)$$

を計算すればよい。 $h(t)$ はインパルス応答関数で、式(2.4)の場合式(2.8)で与えられる。 $r(t)$ が分散 σ_r^2 の白色雑音とするとその $S_r(\omega)$ は、式(2.9)となる。

$$h(t) = \exp\{-t/K\}/K \quad (2.8) \quad S_r(\omega) = \sigma_r^2/(2\pi) \quad (2.9)$$

式(2.6)、(2.8)、(2.9)を式(2.5)、(2.7)に代入して、式(2.10)、(2.11)を得る。

$$\sigma_q^2 = \sigma_r^2/(2K) \quad (2.10) \quad \sigma_q^2(t) = \sigma_r^2/(2K) (1 - \exp\{-2t/K\}) \quad (2.11)$$

式(2.11)において $t \rightarrow \infty$ とすると、当然、式(2.10)に一致する解が得られている。

$P \neq 1$ の場合、上述した手法は式(2.2)の q^p の項がネックとなって全く無力である。式(2.1)、(2.2)を貯留量 S に関する式に書き直すと、次式を得る。

$$dS/dt + (1/K)^{(1/p)} S^{(1/p)} = r(t) \quad (2.12)$$

一方、Brasら³⁾はベキ乗型の確率変数 $S^{(1/p)}$ に関して、次式を提案し、式(2.13)の2乗平均誤差を最小にするように係数 α 、 β を求めている。

$$S^{(1/p)} \approx \alpha \bar{S} + \beta \tilde{S} \quad (2.13)$$

$$\alpha = \bar{S}^{n-1} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (m-j) E \left\{ \left(\frac{\tilde{S}}{\bar{S}} \right)^n \right\} \right] \quad (2.14)$$

$$\beta = m \bar{S}^{m-1} \left[1 + \frac{1}{\sigma_s^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} E \left\{ \frac{\tilde{S}^{n+1}}{\bar{S}^{n+1}} \right\} \Gamma \Gamma (m-j) \right] \quad (2.15)$$

$$m = 1/P \quad (2.16)$$

式(2.3), (2.13)を式(2.12)に代入して次式を得る。

$$d(\bar{S} + \tilde{S})/dt + (1/K)^{(1/P)} (\alpha \bar{S} + \beta \tilde{S}) = \bar{r} + \tilde{r} \quad (2.17)$$

上式の期待値をとると式(2.18)のようになり、式(2.17)から式(2.18)を引くと式(2.19)を得る。

$$d\bar{S}/dt + (1/K)^{(1/P)} \alpha \bar{S} = \bar{r} \quad (2.18) \quad d\tilde{S}/dt + (1/K)^{(1/P)} \beta \tilde{S} = \tilde{r} \quad (2.19)$$

β と $\tilde{S}$ の関係は、式(2.15)に示すように期待値の演算子 $E(\cdot)$ を通じて結ばれている。したがって、 β と $\tilde{S}$ は厳密には独立の関係ではないが、その従属性が極めて小さいとして、式(2.19)の解 $\tilde{S}$ を求めると

$$\tilde{S} = \exp \left\{ - \int (1/K)^{(1/P)} \beta dt \right\} \int \tilde{r}(\tau) \exp \left\{ \int (1/K)^{(1/P)} \beta d\tau_1 \right\} d\tau \quad (2.20)$$

式(2.20)の両辺を2乗して両辺の期待値をとると

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 = E(\tilde{S}^2) &= \exp \left\{ -2 \int (1/K)^{(1/P)} \beta dt \right\} \int_0^t \int_0^t E \{ \tilde{r}(\tau_1) \tilde{r}(\tau_2) \\ &\times \exp \left\{ \int (1/K)^{(1/P)} \beta d\tau_3 + \int (1/K)^{(1/P)} \beta d\tau_4 \right\} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$E \{ \tilde{r}(\tau_1) \tilde{r}(\tau_2) \} = \sigma_r^2 \rho_r(\tau_1 - \tau_2) \quad (2.22)$$

式(2.22)において $\rho_r(\tau_1 - \tau_2)$ は、 $\tilde{r}(\tau)$ の自己相関関数を示している。 $\tilde{r}(\tau)$ が白色雑音の場合には式(2.23)のようにおけるので、

$$E \{ \tilde{r}(\tau_1) \tilde{r}(\tau_2) \} = \sigma_r^2 C \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (2.23)$$

$\delta(\tau)$:デルタ関数 C :次元を補正するための係数

ここに、式(2.23)において次元を補正するため係数 C を定義したのは次のような理由による。デルタ関数に関しては、次式が成立している。

$$\int f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau) \quad (2.24)$$

式(2.24)の両辺の次元を同一にするためには $\delta(t)$ は T^{-1} の次元を持っていなければならない。従って、式(2.23)で $C \delta(t)$ で無次元とするために補正係数 C を定義している。また、後述するように式(2.26)の左辺は $[L^2 T^{-1}]$ の次元を有している。式(2.26)の右辺で係数 C を省略すると右辺の次元は $[L^2 T^{-2}]$ となり両辺の次元が一致しないことになる。式(2.23)を考慮すると式(2.21)は簡略化され次のようになる。

$$\sigma_s^2 = \exp \left\{ -2 \int (1/K)^{(1/P)} \beta dt \right\} \int_0^t \sigma_r^2 C \exp \left\{ 2 \int (1/K)^{(1/P)} \beta d\tau_1 \right\} d\tau \quad (2.25)$$

すなわち、分散 σ_s^2 は次の微分方程式を満足していることがわかる。

$$d\sigma_s^2/dt + 2(1/K)^{(1/P)} \beta \sigma_s^2 = \sigma_r^2 C \quad (2.26)$$

平均値 $\bar{S}$ に関する方程式は、すでに式(2.18)に与えられている。

流出量の平均値 $\bar{q}$ 、分散 σ_q^2 は、式(2.2), (2.3), (2.13)を考慮するとにより次式が得られる。

$$\bar{q} = (1/K)^{(1/P)} \alpha \bar{S} \quad (2.27) \quad \sigma_q^2 = (1/K)^{(2/P)} \beta^2 \sigma_s^2 \quad (2.28)$$

ここでは過渡状態における流出量の平均値 $\bar{q}$ 、分散 σ_q^2 を求めるのに一度貯留量の平均 $\bar{S}$ 、分散 σ_s^2 を求めて、式(2.27), (2.28)により流出量の平均、分散を求めている。このような煩雑な方法をとっているのは、以下の理由による。式(2.1), (2.2)において、 S を消去して

$$K dq^p/dt + q = r \quad (2.29)$$

式(2.29)の q^p の項にBrasの式を用いると、結局、次式を得る。

$$K d(\alpha \bar{q})/dt + \bar{q} = \bar{r} \quad (2.30) \quad K d(\beta \tilde{q})/dt + \tilde{q} = \tilde{r} \quad (2.31)$$

式(2.14)、(2.15)に示すように $q^{1/p}$ を $\bar{q}$ と $\tilde{q}$ に分解すると β は $\bar{q}$ 、 σ_s^2 の関数になっているので式(2.31)に $d\bar{q}/dt$ 、 $d\sigma_s^2/dt$ などの項が現れることになり、式の展開が非常に複雑になる。

$\bar{r} = \text{const.}$ として式(2.18)、(2.26)の定常解 $\bar{S}$ 、 σ_s^2 を求めると

$$\bar{S} = \bar{r} / \{ (1/K)^{(1/p)} \alpha \} \quad (2.32) \quad \sigma_s^2 = \sigma_r^2 C / \{ 2 (1/K)^{(1/p)} \beta \} \quad (2.33)$$

また、この時の流出量の平均 $\bar{q}$ 、分散 σ_q^2 は、式(2.27)、(2.28)を考慮すると次式を得る。

$$\bar{q} = \bar{r} \quad (2.34) \quad \sigma_q^2 = 0.5 (1/K)^{(1/p)} \beta \sigma_r^2 C \quad (2.35)$$

次に問題となるのは、式(2.14)、(2.15)の α 、 β の展開項数である。白色雑音を仮定した場合、1, 2次モーメントが既知であれば高次のモーメントを全て定義できるので展開項数を多くできるが、実用的な面、あるいは、有色雑音の場合にまで適用範囲を広げようとするとなすべく展開項数を少なくしたい。ここでは、 $\tilde{S}$ の1次モーメントまでを用いた場合(第1近似と呼ぶ)、1, 2モーメントまでを用いた場合(第2近似と呼ぶ)さらに、高次のモーメントまでを用いた場合について検討する。それぞれの近似における α 、 β を表-2.1に示す。第3近似は、 S が白色雑音で近似できるとして $E\{\tilde{S}^3\} = 0$ 、 $E\{\tilde{S}^4\} = 3\sigma_s^4$ とおいた。いずれの近似においても分散が $r(t)$ の平均値に依存していることを示唆している。

表-2.1 近似式における α と β

	第1近似	第2近似	第3近似
α	$\bar{S}^{(m-1)}$	$\bar{S}^{(m-1)} \{1 + m(m-1) (\sigma_s/\bar{S})^2\}$	$\bar{S}^{(m-1)} \{1 + m(m-1) (\sigma_s/\bar{S})^2\}$
β	$m \bar{S}^{(m-1)}$	$m \bar{S}^{(m-1)}$	$m \bar{S}^{(m-1)} \{1 + 0.5(m-1)(m-2) (\sigma_s/\bar{S})^2\}$
$m = 1/P$			

式(2.34)は当然の結果として、式(2.35)に第1近似の α 、 β を採用すると次式となる。

$$\sigma_q^2 = 0.5 (1/K P) \bar{r}^{(1-p)} \sigma_r^2 C \quad (\text{第1近似}) \quad (2.36)$$

この式で $P=1$ とすると、この結果は式(2.10)に一致している。

第1近似を採用するか、あるいは、第2, 3近似を採用すべきかは、表-2.1の $(\sigma_s/\bar{S})^2$ の値に依存している。

第1近似値を用いて $\bar{S}$ 、 σ_s^2 を式(2.32)、(2.33)から計算すると

$$\bar{S} = K \bar{r}^p \quad (2.37) \quad \sigma_s^2 = P C \sigma_r^2 K \bar{r}^{p-1} / 2 \quad (2.38)$$

$1 < m < 2$ 、 $K = 5 \sim 50$ 、 $\sigma_r/r = 0.1 \sim 0.2$ の範囲の値をとるものにとすると $(\sigma_s/\bar{S})^2$ は1に比較して極めて小さい値をとっており、第1近似で十分であることを示唆している。もちろん、これは $\bar{r} = \text{const.}$ の場合を対象にしたもので、詳しくは次節で述べる。

3. シミュレーション法による検討

前節では、流出量の平均値、分散を求めるための基礎式を誘導したが、これらの式は近似式であるのでシミュレーション法により適合度の検討をする。計算は、初期条件が0のもとに式(2.1)の $r(t)$ に平均 $\bar{r}$ 、分

散 σ_r^2 の正規乱数を与え、 $q(t)$ を求める。このような操作を繰り返し、 $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), n=1000$ の標本関数の時刻 t 毎の平均値 $\bar{q}(t)$ 、分散 $\sigma_q^2(t)$ の過渡状態における値を求めた。

シミュレーション法は Δt 時間毎の離散化された量で計算される。他方、上述した理論計算は降雨量 $r(t)$ は連続的な不規則関数として取り扱っている。従って、 $r(t)$ を時間間隔 Δt で離散化すると

$$R_t = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t r(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

また、 $r(\tau)$ の確率変動特性は式(2.23)と同じであるとして式(3.1)の期待値をとると式(3.2)となり、分散 $\sigma_{R_t}^2$ は式(3.3)となる。

$$E(R_t) = \bar{r} \quad (3.2) \quad \sigma_{R_t}^2 = \frac{1}{\Delta t} \sigma_r^2 C \quad (3.3)$$

従って、理論解とシミュレーション値との比較を行う場合、式(3.3)を考慮する必要がある。

シミュレーションとの比較は次に示す場合について行った。なお、本計算では全て $\Delta t=0.05\text{hr}$ として計算を行っている。降雨の分布型は以下に示す場合について計算を行い、それぞれシミュレーション結果と解析解の比較を行った。

1) 降雨量の平均値、分散が一定の場合

図-3.1は、式(2.18)、(2.26)～(2.28)を用いた $\bar{r}=5\text{mm/hr}$ 、 $\sigma_{R_t}^2=0.05(\text{mm/hr})^2$ 、 $K=20$ として P の値を0.1～0.5の範囲に変動させた場合の流出量の平均値、分散の過渡応答を示している。 α, β としては、表-2.1の第1近似を採用している。 P 値の減少(非線形性の増大)にともない、分散が定常になる前にピークが出現している。ピーク時刻は、到達時間に相当している。貯留関数法は集中定数系のモデルなのでこのままでは到達時間を定義できないが、藤田⁴⁾が矩形斜面流域を対象にした kinematic wave モデルより理論的に誘導した貯留関数によると

$$K = \frac{1}{1+P} \left\{ \frac{1000^{(1/P-2)} L}{3.6 \varepsilon} \right\}^P \quad L: \text{斜面長 (km)} \quad \varepsilon: \text{定数 (m, sec単位)} \quad (3.4)$$

式(3.4)では貯留量、流出量をそれぞれ(mm)、(mm/hr)で表している。また、定数 ε は斜面上の流れが Manning 則に従っているとすると $\varepsilon = \sqrt{i}/n$ (i : 斜面勾配, n : 等価粗度係数)に相当している。一方、到達時間 t_c は式(3.5)で与えられる。

$$t_c = (L \bar{r}^{P-1} / \varepsilon)^P \quad (3.5)$$

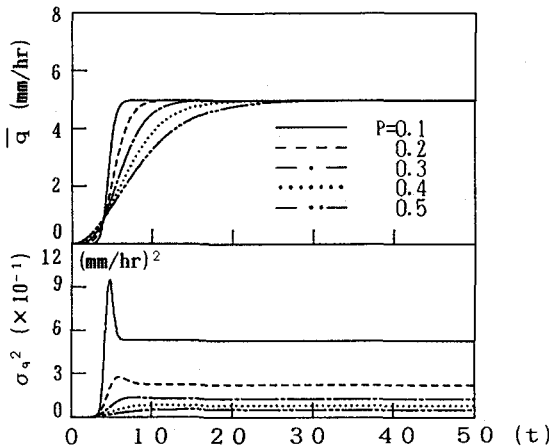


図-3.1 P の変化による流出量の平均、分散の過渡応答

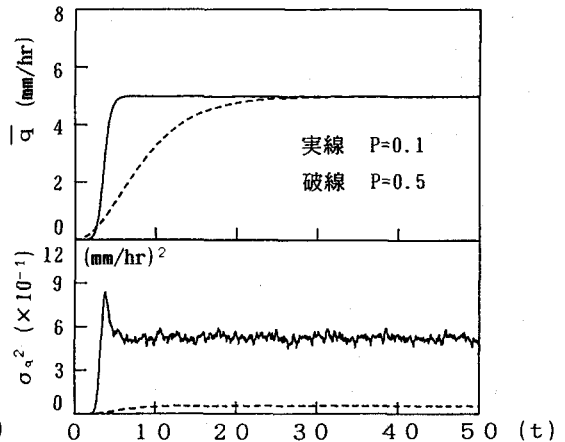


図-3.2 シミュレーションによる計算結果

例えば、式(3.4)、(3.5)に $K=20, r=5 \text{ (mm/hr)}, p=0.1$ を代入して到達時間を求めると $t_c=5.2 \text{ (hr)}$ となり、この値は図-3.1に符合している。図-3.2は、シミュレーション法による計算結果を示している。 K, r の値は図-3.1と同じであるが、 $P=0.1, 0.5$ 、また、このときの降雨量の分散は式(3.3)を考慮して $\sigma_{Rt}^2=1 \text{ (mm/hr)}^2$ としている。図-3.1の結果とよく一致している。

2) 平均降雨量が時間的に変化し、分散が一定の場合

図-3.3, 3.4は、 $\bar{r}=5 \text{ mm/hr}, \sigma_{rt}^2=0.05 \text{ (mm/hr)}^2, K=20, P=0.6$ として式(2.18)、(2.26)～(2.28)を用いた計算結果とシミュレーション法による結果を示している。図中には平均降雨量も示しているが、単純な三角形の波形ではなくベースをつけ加えている。これによって降雨の初期、終了時に降雨が負の値をとらないようにしている。

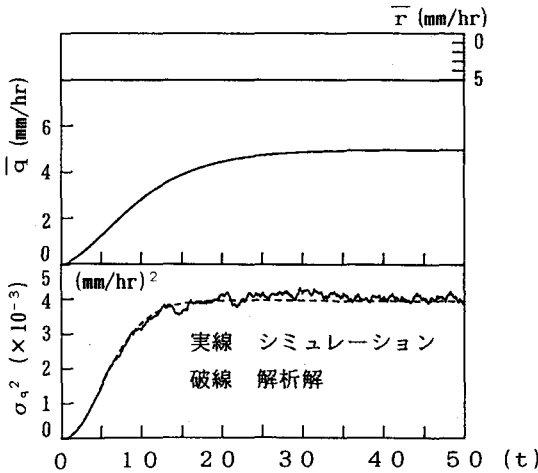


図-3.3 シミュレーションと解析解の比較
(平均降雨量、分散とも一定)

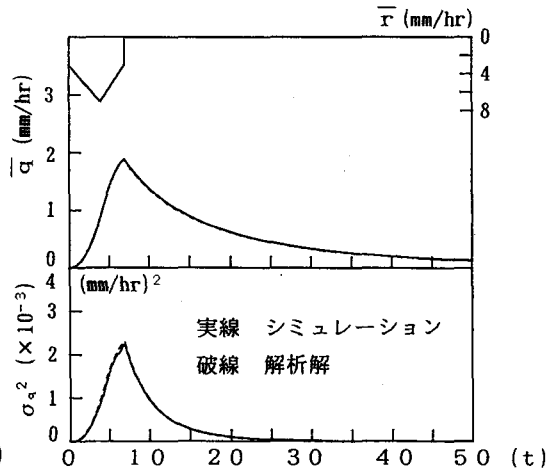


図-3.4 シミュレーションと解析解の比較
(平均降雨量:時間的に変化、分散一定)

4. まとめ

貯留型流出モデルにおいて降雨量が時間的に確率変動する場合について、過渡状態における流出量の平均値、分散を求める基礎式を誘導した。ここでは、降雨が白色雑音で表される場合について検討したが、流出量の分散には降雨の分散のみならず降雨の平均値が関与していることを明らかにした。また、貯留指数 P が減少(非線形性の増大)にともない流出量の分散も増加することがわかった。

参考文献

- 1) 藤田陸博, 山岡勲, 羽山芳則: 貯留関数法における確率応答に関する研究、土木学会北海道支部論文報告集、37号、pp. 231～236、1980
- 2) 例えば 高岡宣善: 工学のための応用不規則関数論、共立出版株式会社、1975
- 3) Bras, R. I. and Georgakakos K. P.: Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting: A statistical linearization approach, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, pp. 95～105, 1980
- 4) 藤田陸博: 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究、土木学会論文報告集、第314号、PP. 75～86、1980