

不飽和層中の水みち流れのフラクタル次元と 水みち侵入モデルによるシミュレーション

Fractal Dimension of Water Path through Unsaturated Media
and Its Simulation using Water Path Invasion Model

坂本 康*

By Yasushi SAKAMOTO

Water path through unsaturated media was examined for its fractal dimension by experiments with glass-beads and by computer simulations using 'water path invasion model' which involves the effects of capillary force and gravity.

Experimental results showed that the water path developed fractal pattern and its fractal dimension decreased as particle size increased. Computer simulations showed that the model can produce the similar nature of fractal water path to the experimental results, if it is supposed that smaller pores can play no role for water path development.

Keyword: fractal dimension, water path, unsaturated media, invasion model.

1. はじめに

著者らは、マクロな構造が均一な不飽和層にできる水みち流れについて、水みちの形成条件、水みち流下速度を実験により検討してきた(坂本・渡辺(1991))。本研究では視点をかえて、フラクタル次元の考え方により、水みちの形状と不飽和層の構造との関係を検討した。本研究では、まず実験により不飽和層にできる水みちのフラクタル次元を測定した。次に、侵入型浸透(invasion percolation)モデルに基礎を置く「水みち侵入モデル」を作り、水みち形成をシミュレーションした。そして、実験によりできた水みちのフラクタル次元とシミュレーションによりできた水みちのフラクタル次元を比較、検討した。

2. 実験による水みちのフラクタル次元

2.1 実験方法

実験装置は、幅20cm、奥行き5mmの槽と水の滴下装置よりなる。装置の概要を図-1に示す。この槽の下部に直径4.0mmと2.8mmのガラスビーズを敷き、次に精製水で満水状態にし、さらに実験対象とするガラスビーズを、少しずつ締め固めながら76cmの高さまで詰めた。次に、装置からの流出管の出口の高さを下げ、重力により約30分間排水し、不飽和層とした。不飽和層の奥行きは幅の1/40なので、疑似二次元流れと考えた。ガラスビーズは、粒子径が均一なもの(均一粒子)と二種の径の粒子を混合したもの(混合粒子)とを用

* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木環境工学科
(〒400 甲府市武田 4-3-11)

いた。粒子層の物理特性を表-1に示す。表-1中の ψ_a （水頭表示）と b は、以下の水分特性曲線式の定数である。水分特性曲線は砂柱法（土壌物理性測定法委員会(1980)）により求めた。

$$\psi = \psi_a \left(\frac{\theta}{\theta_s} \right)^{-b} \quad (1)$$

ここに、 ψ :毛管ポテンシャル[L]、 ψ_a :空気侵入ポテンシャル[L]、 θ :不飽和体積含水率[L³/L³]、 θ_s :飽和体積含水率[L³/L³]、 b :定数[-]である。混合粒子Aは1.41-1.71と0.84-1.00mmの粒子（平均粒子径比=1.69:1）を、混合粒子Bは0.84-1.00と0.50-0.60mmの粒子（平均粒子径比=1.67:1）を、それぞれ個数比が5:2になるように混合したものである。

以上のようにして作った不飽和層にNaCl溶液を一定降雨強度で約2時間滴下して、定常的水みちを作った。滴下水量は、定量ポンプで制御し、降雨強度45～200mm/hrに相当する量とした。水みちが定常状態に達したところで、滴下液をKMnO₄溶液に切り替えて水みちを可視化した。可視化した水みちは、写真撮影し、フラクタル次元を求めた。

2.2 フラクタル次元の測定方法

フラクタル次元にはいくつかあり、その測定方法は異なる（宝・高樺・杉原(1991)）。本研究では、フラクタル次元としてボックスカウンティング次元を採用した。これは、図面を間隔 r の格子によって一辺が r の正方形に分割し、少しでも水みちを含む正方形（以後、被覆正方形と呼ぶ）の数 $N(r)$ を数えて求める次元である。 r と $N(r)$ とに次の関係があれば、その水みちはフラクタルであり、フラクタル次元 D が定まる。

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (2)$$

用いた r の大きさは、0.59、1.18、1.77、2.36cmである。これは写真プリント上で1、2、3、4mmにあたる。また、被覆正方形を計数する範囲は上から40cmまでとした。実際の水みちを正方形で覆った例を図-2に示す。

2.3 実験結果

(a) 種々の条件での水みちのフラクタル次元

観測された水みちの例を図-3に示す。図は、(a)小さな均一粒子（0.71-0.84mm）、(b)大きな均一粒子（1.41-1.70mm）、(c)混合粒子A、(d)混合粒子Bについての結果である。図によると、粒子が小さいほど網目状の水みちとなる。図-4、5には、異なる降雨強度、粒子径での水みち被覆正方形の辺長と個数との関係を、両対数グラフで示す。図によると、どの条件でも水みちはフラクタル構造であるといえる。また、フラクタル次元、つまり図の直線の傾きは、降雨強度による差はないが、粒子径により差が現れた。

(b) フラクタル次元と粒子径との関係

ガラスビーズの平均粒子径と水みちのフラクタル次元との関係を図-6に示す。混合粒子については、

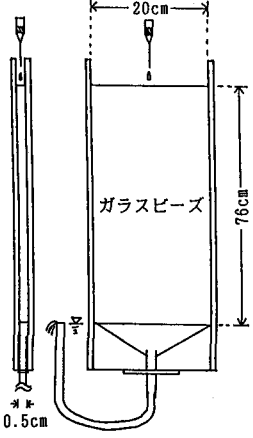


図-1 実験装置概要

表-1 粒子層の物理特性

粒径 (mm)	空隙率 (%)	飽和透水係 数(cm/s)	水分特性の定数 ψ_a (cm)	b (-)
0.50-0.60	39.7	0.186	-14.5	0.23
0.71-0.84	39.3	0.304	-6.4	0.33
0.84-1.00	39.0	0.370	-5.3	0.38
1.00-1.41	40.2	0.536	-3.7	0.44
1.41-1.70	40.2	0.622	-2.8	0.47
混合粒子A	38.7	0.595	-4.7	0.24
混合粒子B	35.8	0.278	-7.0	0.25

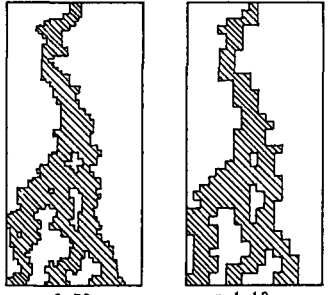


図-2 水みち被覆正方形の例

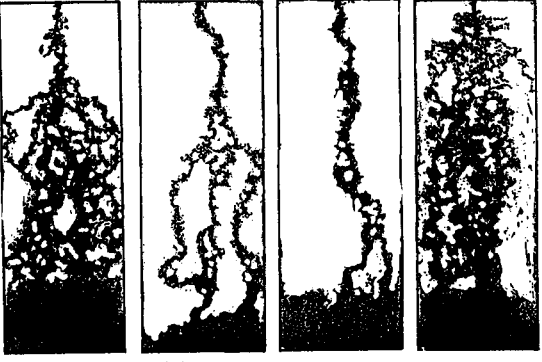


図-3 実験による水みちの例

二種のガラスビーズそれぞれ
 の平均径を△と□で
 示した。図によると、均
 一粒子では粒子径が大き
 いほど水みちのフラクタル
 次元は小さくなる。また、
 混合粒子では小さい方
 の粒子の大きさがフラク
 タル次元をほぼ決定し
 ている。

実験条件を設定した時
 点では、均一粒子の4種
 類は同じように詰まり、

また混合粒子の2種類も同じように詰まり、それぞれ空隙の
 構造、形状が統計的に相似になると想定していた。そのため、
 均一粒子では一つのフラクタル次元、混合粒子では別の一つ
 のフラクタル次元になると予想していた。しかし、実際には、
 粒子が大きいほどフラクタル次元は小さく、水みちはより直
 線的になった。このように空隙の構造、形状が似ていても大
 きな粒子、つまり大きな空隙で水みちが直線的になるのは、
 重力が影響するためと考えられる。

3. シミュレーションによる水みちのフラクタル次元

3.1 水みち侵入モデル

(a) 侵入型浸透モデル

本研究では、水みち形成のシミュレーションに、水みち侵入モデルと名づけたモデルを用いた。水みち侵入
 モデルとは、以下に述べる侵入型浸透 (invasion percolation) モデルを、水みちに適用できるよう改定
 したものである。

多孔質媒体中の流体 (被浸透流体) 中に別の流体 (浸透流体) が浸入して置き換わるとき、二流体間の界
 面の形状は、(1) 直線的な界面、(2) 高粘性流体を低粘性流体で置き換えるときに見られるフィンガー状の
 界面 (viscous fingering)、(3) 細孔分布の局所的ゆらぎに起因する不規則な界面 (capillary fingering
)、の三種類のいずれかとなる (Lenormandら(1988))。このうち(3)は、毛管力が界面の移動を支配するよ
 うな条件で起こり、フラクタルな形状となる (Lenormand(1989a,b))。侵入型浸透モデルは、(3) のような
 界面ができる浸透現象をシミュレーションするモデルである (Chandlerら(1982)、Wilkinson and Willemsen
 (1983)、Lenormandら(1988))。このモデルでは、多孔質媒体を「小孔」と「小孔間をつなぐ細管」のネッ
 トワークで置き換え、各細管には浸透流体の侵入しやすさの指標値を割り当てる。そして、界面に接する小
 孔のうち、その小孔につながる細管の指標値がもっとも大きな小孔に浸透すると仮定する。この侵入型浸透
 モデルでは、毛管力以外の力は無視する。そのため、毛管力の具体的大きさは知る必要がなく、毛管力の
 大きさの順番さえ分かればよい。その場合、侵入しやすさの指標値には一様乱数を用いる。これに対し、本研
 究の実験条件でできた水みちでは、重力の影響も大きいと考えられる。したがって、毛管力と重力をあわせ
 て侵入しやすさの指標値を設定する必要がある。本研究では、この点を改定したモデルを水みち侵入モデル
 と名づけ、シミュレーションに用いた。

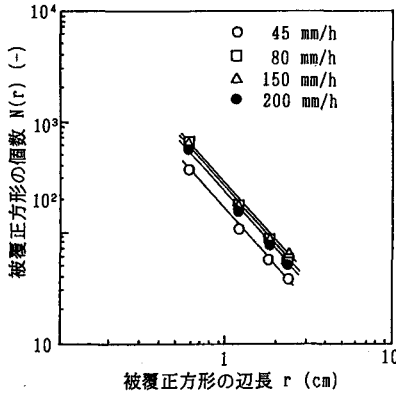


図-4 被覆正方形の辺長と個数
 (実験: 降雨強度の影響)

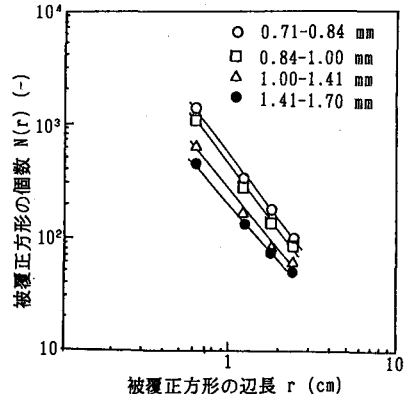


図-5 被覆正方形の辺長と個数
 (実験: 粒子径の影響)

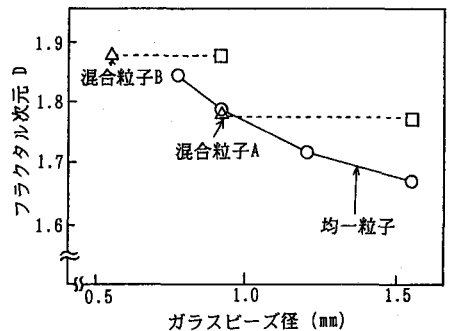


図-6 粒子径とフラクタル次元
 の関係 (実験)

(b) 水みちへの適用方法

水の移動の駆動力として、細管の毛管力と重力のみを考え、細管内の流れをポワジューユ流と仮定した。各細管で起こりうる流量 q [L^3/T] を、細管での移動方向により以下のように設定した。

水平方向: $q = F_1$ (3) 鉛直下方向: $q = F_1 + F_2$ (4) 鉛直上方向: $q = F_1 - F_2$ (5)

上式で、 F_1 : 毛管力の寄与に関する項、 F_2 : 重力の寄与に関する項であり、それぞれ次式となる。

$$F_1 = \left(\frac{\pi 2 \gamma \cos \alpha}{8 \mu} \right) \cdot \frac{a^3}{l} \quad (6) \quad F_2 = \left(\frac{\rho g \pi}{8 \mu} \right) \cdot \frac{a^4 h}{l} \quad (7)$$

ここに、 a : 細管の半径 [L]、 l : 細管の長さ [L]、 h : 細管の両端間の高度水頭の差 [L]、 ρ : 水の密度 [M/L^3]、 μ : 水の粘性係数 [$M/L/T$]、 γ : 水の表面張力 [M/T^2]、 α : 接触角、 g : 重力加速度 [L/T^2] である。上式で $h = 1$ として、() 内の定数部分の比をとり整理すると、毛管力の相対的寄与 f_1 、重力の相対的寄与 f_2 は次式となる。

$$f_1 = \frac{a^3}{l} \quad (8) \quad f_2 = 68.2 \times 10^3 \times a^4 \quad (9)$$

ただし、 $\gamma = 0.072752$ [kg/s^2]、 $\alpha = 9^\circ$ とした。また、 f_1 、 f_2 の単位は、 $[1/m^2]$ である。上式の値を用いて、侵入しやすさの指標値を、水平方向への移動では f_1 、鉛直方向の移動では $f_1 \pm f_2$ と設定した。

3.2 シミュレーション方法

(a) 管径と管長の設定

上記の f_1 、 f_2 を算出するためには、細管の半径と長さを設定する必要がある。本研究では、シミュレーションの条件として、細管半径 a と粒子の半径 r との比、および細管の長さ l と r との比の範囲を、表-2 のように設定した。表中の定数は、それぞれ六方配列内空隙 ($a/r=0.155$ 、 $l/r=1.15$)、正方配列内空隙 ($a/r=0.414$ 、 $l/r=2.0$)、六方配列で粒子の大きさと同じ大きさの空隙があるとき ($a/r=1.0$ 、 $l/r=3.46$) の値を参考に決定した。

表-2 シミュレーションで用いた細管半径 a 、細管長 l と粒子半径 r との比の範囲 (一様乱数)

	$d=2r$ (mm)	a/r (-)	l/r (-)	Comments
Case A1.1	1.56	0.155-1.000	1.15-3.46	
Case A1.2	1.56	0.414-1.000	2.00-3.46	
Case A1.3	1.56	0.707-1.000	2.73-3.46	
Case A1.4	1.56	0.800-1.000	3.00-3.50	
Case A2	1.56	0.707-1.000	2.73-3.46	No Trap
Case A3	1.56	0.707-1.000	2.73-3.46	No Gravity
Case A4	1.56	0.285-1.000	1.58-3.46	Vertical
(Anisotropy)		0.155-0.707	1.15-2.73	Horizontal
Case B	1.21	0.707-1.000	2.73-3.46	
Case C	0.92	0.707-1.000	2.73-3.46	6000 Steps

各細管の具体的値は表-2の範囲の一様乱数となると想定し、計算機で発生させた $[0,1]$ の一様乱数数列を用いて決定した。また、太さと長さについて同じ乱数を用いることで、管が太いときは長く、細いとき短くなるように設定した。

(b) シミュレーション条件

粒子の直径 d mm に対し小孔の数は、水平方向 $n = 100/d$ 個、鉛直方向 $2.5n$ 個とした。小孔を結ぶ細管は、各小孔から鉛直方向の上下と水平方向の左右へ伸びる管とした。また、水は左右の境界を越えては移動できないとした。シミュレーションは、水みちが下端の小孔に達するまで行なった。ただし、Case Dでは計算時間の都合で 6,000step で打ち切った (処理速度 24.0MIPS の計算機で 6,000step に要した CPU 時間は 4 時間 10 分)。さらに、水によりトラップ (封入) された空気の部分には、それ以上水みちは侵入できないとし、トラップされた空気の圧縮性は無視した。

a/r 、 l/r 、 d 以外の特殊な条件として、トラップがないとき (Case A2)、重力の影響がないとき (Case A3)、異方性があるとき (Case A4) もシミュレーションした。異方性は、鉛直方向、水平方向にそれぞれ別の範囲の a/r 、 l/r を設定して表現した。また Case A.1 では、シミュレーションは同じ条件で異なる 2 あるいは 3 種の乱数数列を用いて行い、フラクタル次元の値はそれぞれの乱数数列での値の平均値を採用した。異なる乱数数列でのフラクタル次元の差は、 a/r が大きいほど大きい傾向があった。その他の Case では、シミュレーションは一つの乱数数列についてのみ行なった。

3.3 シミュレーション結果および実験結果との比較

(a) 水みちのフラクタル構造

いくつかのシミュレーション例について、水みち被覆正方形の辺長と個数との関係を、両対数グラフで図-7に示す。図の横軸の値は、辺長を細孔の数で表したものである。また、被覆正方形を計数する範囲は上部の2n列目までとし、出口の近くは対象外とした。図によると辺長が3以上では、フラクタルな構造といえる。この結果は、他のすべてのシミュレーションでも同じであった。以下では、大きい方から4点について求めた直線の傾きをフラクタル次元とする。

(b) トラップ、重力の影響

粒子径が1.56mmで、(a) トラップ、重力ともあるとき (Case A1.3)、(b) トラップがないとき (Case A2)、(c) 重力の影響がないときの水みちシミュレーション結果を図-8に示す。また、それぞれのフラクタル次元は、(a)1.63、(b)1.67、(c)1.73であった。図によると、トラップがなくても大きな形状の変化はないが、重力の影響がないときには大きく横に広がった形になることが分かる。また、重力がないときのフラクタル次元は実験結果の値に比べて大きい。以上のことから、水みち形成に対する重力の寄与がシミュレーションによっても確かめられた。

(c) 細管の相対的大きさの影響

粒子径1.56mmとしたときについて、 a/r の中央値とフラクタル次元との関係を図-9に示す。また図-9には、トラップがないとき、重力の影響がないとき、異方性があるときの結果も示した。さらに、細管の相対的大きさが小さいとき (Case A1.1) の水みちを図-8の(d)に、異方性があるときの水みちを図-8の(e)に示す。図-9によると、Case A1.1のように小さな空隙があるときには実験でえられたような小さなフラクタル次元は得られないことが分かる。また、小さな空隙があるときには水みちの形状 (図-8、(d)) は重力の影響がないとき (図-8、(c)) に非常に似た形となる。さらに、異方性を持たせたときの水みちの形状 (図-8、(e)) は、トラップ空気部分の形が縦長となり実験結果と異なる。以上のシミュレーション結果から、実験のような小さなフラクタル次元を持つ水みちができるためには、六方配列でできるような小さな管は水の通りみちとならないと仮定する必要がある。この仮定が正しいかどうかは現時点では不明である。

(d) 粒子の大きさの影響

粒子径0.92mmのとき、シミュレーションの6,000 step目、つまり細孔のうちの6,000個が水みちとなった

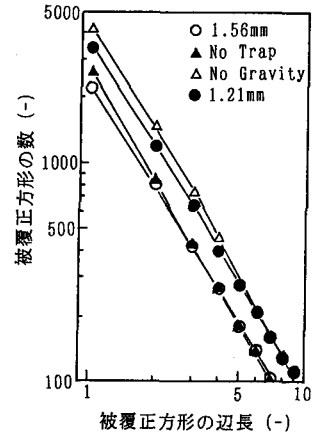


図-7 被覆正方形の辺長と個数 (シミュレーション)

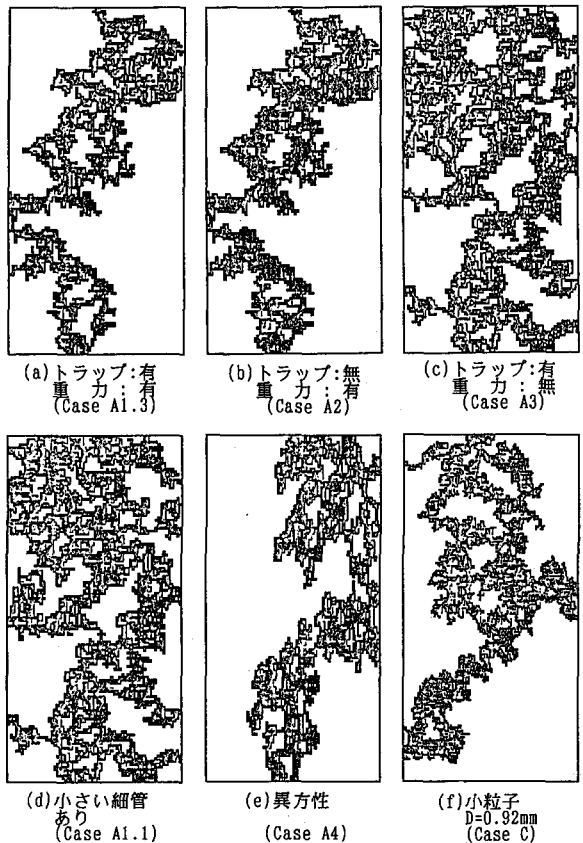


図-8 シミュレーションによる水みちの例

ときの水みち形状を図-8の(f)に示す。このときのフラクタル次元は1.71となり、1.56mmのときの値1.61よりも大きくなった。図-8の(f)やフラクタル次元の値から、粒子が小さいほどフラクタル次元が大きくなる実験結果をシミュレーションでも再現できると考えられる。ただし、粒子径を1.21mmとしたシミュレーションではフラクタル次元は1.60となり、1.56mmのときの値と同程度であった。これはシミュレーションが一つの乱数列についてだけであり、その乱数列の影響が出たと考えられる。

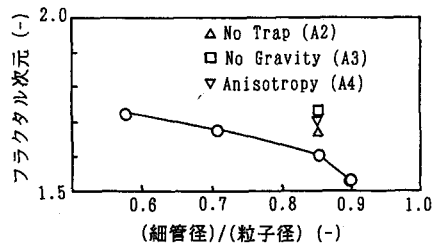


図-9 細管の相対的大きさと水みちフラクタル次元の関係 (シミュレーション)

4.まとめ

本研究では、マクロな構造が均一な不飽和層にできる水みちについて、そのフラクタル次元、形状と不飽和層の構造との関係を、実験とシミュレーションにより検討した。シミュレーションでは、空隙への水の侵入のしやすさを毛管力と重力の大きさによって指標化する水みち侵入モデルを用いた。本研究で、得られた主な結論は、以下の通りである。

○実験結果について

- (1) ガラス・ビーズで作った不飽和層中にできる水みちはフラクタル構造である。
- (2) 水みちのフラクタル次元は、降雨強度にはよらず、粒子が大きいほど小さい。また混合粒子では、小粒子の径でほぼ決定される。粒子の大きさに左右されるのは重力の影響があるためと考えられる。

○シミュレーション結果について

- (3) 水みち侵入モデルにより、フラクタルな水みちを再現できる。このことから重力の影響が確認できた。
- (4) 水みち侵入モデルを用いて実験で観測された小さなフラクタル次元を得るためには、小さな管は水の通りみちとならないと仮定する必要がある。
- (5) 水みち侵入モデルにより、粒子が大きいほどフラクタル次元が小さくなる傾向を再現できる。

謝辞

本研究の実験の実施においては、山梨大学工学部環境整備工学科卒業生、柴田博君（現、菱和設備株式会社）の多大なる協力を得た。記して謝意を表したい。

参考文献

- 坂本康・渡辺和彦(1991): 不飽和層中での水みち形成と水みち流下速度についての実験的研究、水工学論文集、Vol.35、pp.111-116。
- 宝馨・高棹琢磨・杉原宏章(1991): 数値地形情報に基づく河川流域のフラクタル次元について、水工学論文集、Vol.35、pp.135-142。
- 土壌物理性測定法委員会(1980): 「土壌物理性測定法」、pp.138-139。
- Chandler, R., Koplik, J., Lerman, K., and Willemsen, J.F.(1982): Capillary displacement and percolation in porous media, J. Fluid Mech., vol.119, pp.249-267。
- Lenormand, R., Touboul, E., and Zarcone, C.(1988): Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media, J. Fluid Mech., Vol.189, pp.165-187。
- Lenormand, R.(1989a): Flow through porous media: limits of fractal patterns, Proc. R. Soc. London, A423, pp.159-168。
- Lenormand, R.(1989b): Capillary Fingering: Percolation and Fractal Dimension, Transport in Porous Media, 4, pp.599-612。
- Wilkinson, D., and Willemsen, F.(1983): Invasion percolation: a new form of percolation theory, J. Phys. A:Math. Gen., 16, pp.3365-3376。