

射流分岐水路における跳水の発生条件

Generation Conditions of Hydraulic Jump in Bifurcated
Channel with Supercritical Flow

長谷川和義*・納 弘**・石川 伸***

by Kazuyoshi HASEGAWA, Hiroshi OSAME and Shin ISHIKAWA

When supercritical flow rush into a bifurcated channel with different discharge ratio from its width ratio, a hydraulic jump is forced to occur under some conditions. This paper investigate these conditions. First, a valid condition for Bernoulli equation applied to before and after points of a bifurcation was derived and compared with experimental data with jumping states. The outer region of the condition was roughly corresponding to the generation condition of hydraulic jumps. Second, a condition for an entrance of bifurcated channel to provide for jump was obtained from the gradually varied flow equation with lateral inflow. The result shows that the condition satisfy the experimental data.

Key words: bifurcation channel, hydraulic jump, Bernoulli equation, momentum equation

1. はじめに

山地河川には流路の分岐・合流が発達しており、出水時に大きな変動をとげる。現地を調査すると、図-1のような流路を塞ぐPlug（閉塞堆積）がしばしば見いだされる。著者ら(1991)は、これが分岐部に起こる跳水によるものと考え、射流の分岐水路実験を試みたところ確かに跳水が起こり流下礫がその場で急激に止まることを確認した。しかし、中島を設けた実験であり一般的な発生因、発生条件を特定することができなかった。一方、数値シミュレーションによってもこの現象の解析を試みた(長谷川・石川(1991))が、土砂の堆積とともに跳水が消滅するなど、閉塞に至るまでの過程を再現するにはいたらなかった。こうした経緯から、分岐部跳水のより基本的な水理を明らかにする必要性が生じた。

本研究は、最も単純な平行分岐水路における跳水の発生条件を、1次元解析と実験によって明らかにしようとするものである。分岐・合流に関する研究は古くからおこなわれており、かなりの数にのぼるが、大部分は常流についてのものである。射流に関しては、合流水路の研究(Hager(1989)など)はあるものの、分岐水路についてはほとんど見あたらない。これは、流量配分比が水路幅比と同じ場合、分岐水路中には何事も起こらないためではないかと推察される。本研究が対象にしている流れは、これらの比が互いに異なる場合であり色々興味深い現象が見いだされる。



図-1分岐部の閉塞堆積例

2. 流量配分比率が幅比率と異なる流れの成立条件

2・1 保存形運動量式とベルヌイ式

* 正会員 工博 北海道大学助手 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

** 学生員 北海道大学 工学部土木工学科 (同 上)

*** 正会員 北海道開発局 帯広開発建設部 (〒089 幕別町札内西町145)

図-2のように、矩形直線水路の途中にスリット壁を置き、平行に分岐させた水路を想定する。b-水路入口に大きめの粗度を配置すると、図のようにa-水路に流入がおこる。この問題は、a-水路の幅が上流に向かって広がっている問題に似ている。しかし、幅の変わる流れに置き換えた場合、運動量の流入効果を十分表現できない。そこで、スリットを延長してa-を独立した直線水路と見なし、保存形の運動量式を適用すると(1)式になる。

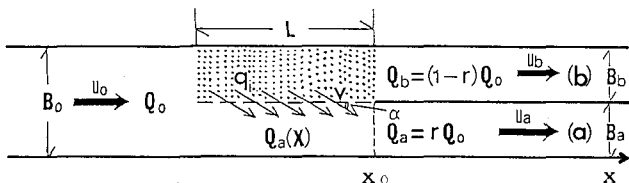


図-2平行分岐水路の概要と記号の定義

連続式は(2)式となる。(例えば、椿(1975)など)

$$\frac{1}{gA} \frac{d}{dx} (\beta u^2 A) = -\frac{dH}{dx} - \frac{u^2}{gR\psi^2} + \frac{q_i v \cos \alpha}{gA} \quad (1), \quad \frac{dQ_a}{dx} = q_i \quad (2)$$

ここに、 A =流水断面積 R =径深 H =基準点からの水位 u =断面平均流速 v =b-水路からの流入流速 α =流入角 q_i =単位長さあたりの流入流量 ϕ =流速係数 β =運動量係数 g =重力加速度 Q_a =流量

この式は、流速不連続の場合にも運動量保存が保証されるので、跳水発生を問題にするには都合がよい。しかし、ここでは、流線連続の仮定と連続式の援用により左辺を

$$\frac{d}{dx} (\beta u^2 A) = \beta \left(u q_i + \frac{A}{2} \frac{du^2}{dx} \right)$$

のように分解する。これが可能なのは、あくまでも $\partial u / \partial x$ の存在が保証されるとき、すなわち流線が連続する場合である。これにより、(3)のベルヌイ式が得られる。

$$\beta \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g} \right) + \frac{dH}{dx} + \frac{u^2}{gR\psi^2} + \frac{q_i (\beta u - v \cos \alpha)}{gA} = 0 \quad (3)$$

さらに、 $\beta \approx 1$ 、河床勾配と損失勾配の和がゼロになっていると考えた、後にも仮定するように $v \approx u$ 、 $\alpha \approx 0$ (平行合流) とみなし分岐点の前後を挟んで x で積分すると、

$$\frac{u_0^2}{2g} + h_0 = \frac{u_a^2}{2g} + h_a \quad (4)$$

となる。また、次の定義が可能である。

$$u_0 = \frac{Q_0}{B_0 h_0}, \quad u_a = \frac{r Q_0}{B_a h_a} = \frac{r}{\eta} \frac{h_0}{h_a} u_0, \quad r = \frac{Q_a}{Q_0}, \quad \eta = \frac{B_a}{B_0}, \quad F_0^2 = \frac{u_0^2}{g h_0}$$

ただし、 u_0 、 h_0 =横流入発生点前の等流流速および等流水深、 u_a 、 h_a =横流入終了点(スリット先端)後のa-水路内流速および水深、 Q_0 =分岐前の合計流量、 Q_a =a-水路流量、 r =a-水路への流量配分率、 η =全幅に対するa-水路幅の割合、 F_0 =分岐前等流のフルード数。今、 $y = h_a / h_0$ として、上式に代入すると、

$$y^3 - \left(\frac{1}{2} F_0^2 + 1 \right) y^2 + \frac{1}{2} F_0^2 \left(\frac{r}{\eta} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

本式が、常流射流解を含む3実根をもつのは不還元の場合であり、判別式が負になる必要がある。これより、

$$r < \frac{2\sqrt{6}}{9} \frac{\eta}{F_0} \left(\frac{1}{2} F_0^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

をうる。図-3に、式(6)の満たす範囲が斜線で示されている(ただし、 $\eta=0.5$)。今、限界勾配を越える水路に対する議論をおこなっているので、以下、 $F_0 > 1$ について考える。

式(6)の領域の内側では流線の連続する解が存在するが、運動量式の解の存在領域と跳水実験値この条件が破れるところでは、解が存在しないか流線の不連続な解があることになる。山田ら(1986)は、底面に突起がある流れに対して同様な解析をおこない、シュート&プールの発生条件を明かにして実験結果がきれいに整理されることを示している。

図-3中の描点は後に述べる実験($\eta=0.5$)の結果であるが、跳水の起こったものを黒色で、起こらなかったも

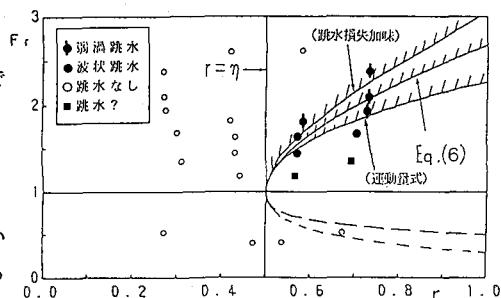


図-3ベルヌイ式、

運動量式の解の存在領域と跳水実験値

のを白色で示している（図-5、8にも同じマークが使われている）。跳水が発生した実験は式(6)の周りに集まっているが、斜線内に存在しているものもある。これについては山田らの考えにならい、一度跳水が起こるとその損失が無視できなくなるものとして式(4)に加え、解の存在条件を求めると図の上側の斜線領域になり境界は実験点に近づく。以上によれば、式(6)の外側は跳水が改めて起きる領域、図-3中の跳水損失を加味した解の存在領域は、一度起きた跳水が消滅する領域を表しているものといえる。

2・2 運動量解の存在領域

流線不連続に際しても保存則が成り立つ運動量式については解の制限がどのように現れるであろうか。a-水路につき、式(1)を直接積分して解を吟味することは、横流入項が明確になっていなければ困難である。そこで、図-4のように分岐部を含む全体に対して検査断面をとり、運動量式を立てると次式になる。

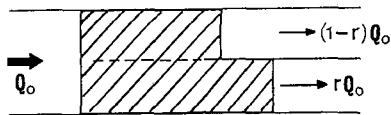


図-4運動量式における検査断面

$$\rho r Q_0 u_a + \rho (1-r) Q_0 u_b - \rho Q_0 u_0 = \frac{1}{2} \rho g h_0^2 B_0 - \frac{1}{2} \rho g h_a^2 B_a - \frac{1}{2} \rho g h_b^2 B_b \quad (7)$$

ただし、 u_b 、 h_b =b-水路の流速および水深、 ρ =水の密度であり、摩擦項は省略してある。前項と同様に y の3次式に直すと以下ようになる。

$$y^3 + \frac{1-\eta}{\eta} \left\{ y_b^2 + 2F_0^2 \left(\frac{1-r}{1-\eta} \right)^2 \frac{1}{y_b} - \frac{2F_0^2+1}{1-\eta} \right\} y + 2F_0^2 \left(\frac{r}{\eta} \right)^2 = 0 \quad (8)$$

ここに、 $y_b = h_b/h_0$ である。この式が3実根をもつためには、判別式が負になることを要し、式(9)で表される。

$$D = 4F_0^4 \left(\frac{r}{\eta} \right)^4 + \frac{4}{27} \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^3 \left\{ y_b^2 + 2F_0^2 \left(\frac{1-r}{1-\eta} \right)^2 \frac{1}{y_b} - \frac{2F_0^2+1}{1-\eta} \right\}^3 < 0 \quad (9)$$

式中の y_b をあたえる必要があるが、これをベルヌイ式から推定することにする。b-水路について式(5)と同様の関係を導けば、次式になる。

$$y_b^3 - \left(\frac{1}{2} F_0^2 + 1 \right) y_b^2 + \frac{1}{2} F_0^2 \left(\frac{1-r}{1-\eta} \right)^2 = 0 \quad (10)$$

(9)、(10)両式を解析的に解くことは難しいので、数値計算をおこない境界線を描くと図-3の下側の線になる。斜線域が解の存在範囲であり、式(6)よりも広がっている。逆にいえば、この境界線の外には跳水解も存在できないと考えられ、境界線は跳水発生（フルード数に対する）下限を表すものと言える。しかし、実験値は、境界の外にも存在しており、外力評価に問題があるように思える。

2・3 分岐部跳水発生の必要条件

これまでの考察をまとめると、跳水が新たに発生する場合の必要条件は、式(6)の不等号を逆にした次式が妥当なようである。

$$r > 0.54 \frac{\eta}{F_0} \left(\frac{1}{2} F_0^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

流量配分率 r を推定するために、主水路、b-水路各々の代表河床粗度高を d_0 、 d_b とし、等流流速が Manning・ストリックラー式で表されるものと仮定する。すなわち、

$$u_0 = 7.66 \left(\frac{h_0}{d_0} \right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{g \sin \theta h_0} \quad (12), \quad u_b = 7.66 \left(\frac{h_b}{d_b} \right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{g \sin \theta h_b} \quad (13)$$

これより、b-水路の流量配分率は、おおよ次のようになる。

$$1-r = \frac{Q_b}{Q_0} = \left(\frac{h_b}{h_0} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{d_0}{d_b} \right)^{\frac{1}{6}} (1-\eta) \approx \left(\frac{d_0}{d_b} \right)^{\frac{1}{6}} (1-\eta) \quad (14)$$

式(11)、(14)から跳水発生必要条件がまとめられる。

$$\frac{d_b}{d_0} > \left[\frac{1}{1-\eta} \left\{ 1 - 0.54 \frac{\eta}{F_0} \left(\frac{1}{2} F_0^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \right]^{-6} \quad (15)$$

図-5は、式(15)と実験値をあらためて描いたものである。実験値($\eta=0.5$)が、跳水を起こす限界において取られているわけではないこと、実験数が少ないことなどのために明確ではないが、式(15)が一つの目安になることがわかる。これによれば、 η の小さい、狭い水路ほど、もう一つの水路の粗度高があまり大きくなくても跳水にいたることになる。

3. 水面形方程式による検討

前節までに流量配分率のみに着目した検討をおこなってきたが、実際に跳水にいたるためには、分岐部の入口条件が重要になる。これを明らかにするためには、遷移過程に対する解析が必要である。

3.1 水面形の性質と跳水条件

再び式(3)にもどり、a-水路についての水面形方程式に変形すると、式(16)になる。

$$\frac{dh_a}{dx} = \frac{\left(\sin \theta h_a^3 - \frac{Q_a^2}{g \psi^2 B_a^2} - \frac{Q_a q_i}{g B_a^2} h_a \right)}{\left(\cos \theta h_a^3 - \frac{Q_a^2}{g B_a^2} \right)} \quad (16)$$

ただし、 θ =河床傾斜角であり、 $R \approx h$ 、 $\phi = \text{const}$ とおいている。また、 $v \approx u$ 、 $\alpha \approx 0$

を仮定しているが、 α に対して最大の $\pi/2$ をとっても最終的な結果はあまり変わらない。分子に現れている横流入項は、摩擦項とともに主流に対する抵抗となって働いている。

水面の遷移を知るためには、式(16)の分子をゼロとする疑似等流水深が必要になる。これを h^* と表せば、おおよそ次の形をもつ。おおよそ言うのは、この三次式が、 $q_i \cdot h_{ac}$ 、 $\langle Q_a$ を条件として正の1実根をもち、厳密解が得られるが、これを見やすい形に近似表現したからである。

$$h^* \approx \frac{h_{a0}}{\sqrt[3]{2}} \left[2 - \frac{2}{9} \left(1 - \frac{4}{27} \frac{\psi^4 q_i^3}{g B_a^2 \sin \theta Q_a} \right) \right], \quad h_{a0} = \left(\frac{Q_a^2}{g B_a^2 \psi^2 \sin \theta} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (17)$$

一方、限界水深は、

$$h_{ac} = \left(\frac{Q_a^2}{g B_a^2 \cos \theta} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (18)$$

となる。いま、横流入流量を次の形で表す。

$$q_i = (r - \eta) Q_0 f(x), \quad \int_{x_0-L}^{x_0} f(x) dx = 1 \quad (19)$$

ここに、 $f(x)$ =横流入流量の x 軸方向分布関数、 L =横流入の起こる長さ、 x_0 =分岐先端の x 座標である。このとき、a-水路流量は式(20)になる。

$$Q_a(x) = Q_0 \left\{ \eta + (r - \eta) \int_{x_0-L}^{x_0} f(x) dx \right\} Q_0 \quad (20)$$

これらをもちいておおよその水面形を推定する。

一樣流入の時、すなわち、 $f(x) = 1/L$ であれば、 h^* と h_{ac} が交わることはなく、いかなる特異点も現れない。すなわち、図-6に概略を示したように h^* 、 h_{ac} とも x に対してほぼ直線的に増加するが、 h^* の傾きは常に小さい。このときの水面は、射流の続いた図の実線のようになる。したがって、横流入が一樣に近い入り込み方をする限り跳水は起こらないということができる。

特異点は、 $h^* = h_{ac}$ の場所で現れる。式(17)を式(18)にて割り、 $=1$ とおくとともに近似化を施すと次の関係が得られる。ただし、 x について $\chi = x - (x_0 - L)$ の変換をおこなっている。 f は、そのままの記号を用いた。

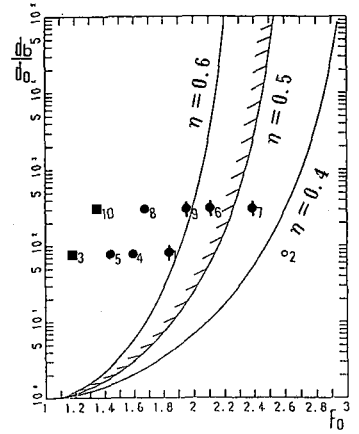


図-5 跳水発生に要する入口粗度条件と実験値

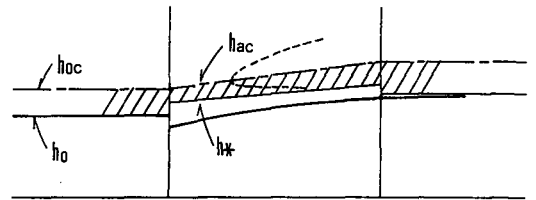


図-6 一樣横流入時の水面形概念図

$$(h_0 f(x))^3 = c_1 \frac{F_0^{\frac{2}{3}} - c_2}{\left(\frac{r}{\eta} - 1\right) \psi^6} \times \frac{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{r}{\eta} - 1\right) \int_0^x f(x) dx}{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{\eta} - 1\right) \int_0^x f(x) dx} \quad (21) \quad c_1 = \frac{243\sqrt{2}}{8} = 38.3, \quad c_2 = \frac{16}{9 \cdot 3\sqrt{2}} = 1.41,$$

c_2 は、近似化の過程ででてきた値であるが、物理的な観点から考えると、本来1とおくべきであろう。この式の分母の値が常に正になるには、条件 $1 < r/\eta < 4$ が必要である。しかし、現実問題でこの条件を越えることはほとんどありえないであろう。上式の積分が0.5の時、すなわち横流入流量が全体の横流入流量の5割になる場所ですべての特異点が現れるとしたとき、

$$h_0 f(x_{0.5}) = \frac{3.4}{\psi^2} \left[\frac{\left(F_0^{\frac{2}{3}} - 1\right) \left\{6 + 2\left(\frac{r}{\eta} - 1\right)\right\}}{\left(\frac{r}{\eta} - 1\right) \left\{6 - \left(\frac{r}{\eta} - 1\right)\right\}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (22)$$

となる。通常起こりうる値によって右辺を計算すると、0.02~0.05となるので、このような $f(x)$ は十分存在しうるものといえる。ただし、図-7のような渦状点が起こるためには特異点にむかう過程で、 $h_* < h_{*c}$ および $dh_*/dx < dh_{*c}/dx$ ($x \rightarrow 0$ において) が保障されねばならない。前者は、 $f(x)$ が0から緩やかに増加する関数であることを要請するが、これは実際の場合ほとんどがそうであろう。後者の条件は、 $f(x) = 2x/L^2$ (三角形分布) を仮定し、式(21)および式(18)に(19)を入れた式に代入後、 x にて微分し $x \rightarrow 0$ とすることにより、大略の形をうることができる。

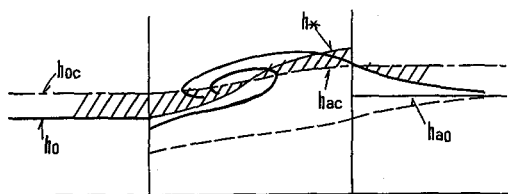


図-7 跳水発生時の水面形概念図

$$\frac{L}{h_0} > \sqrt{\frac{3}{F_0^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad (23)$$

この式は、横流入の範囲がある程度大きくなければならないことを教えている。なお、特異点の性質については、岩佐・井上 (1972) らにより詳しく検討されているが、比較的簡単な横流出の問題においても相当複雑である。一般的な横流入分布をもつ問題の特異点解析は、本論文の任を越えているものとする。

また、流出の起こるb-水路においては、式(16)の分子第2項における ϕ が大きな粗度のために小さくなるが、第3項が正となるために、この粗度に対する限界勾配が河床勾配を大きく越えない限り特異点は現れない。

3.2 跳水の維持条件

分岐点の上流に跳水が形成されたときに、それが安定に存在し続けるためには、通常知られる跳水長が区間内に保障されねばならないであろう。スメタナの式と共役水深を用いてこれを表せば、

$$\frac{L}{h_0} > 3(\sqrt{1 + 8F_0^2} - 3) \quad (24)$$

式(23)、(24)を加えて、b-水路における入口条件が最終的に次のように表される。

$$\frac{L}{h_0} > 3(\sqrt{1 + 8F_0^2} - 3) + \sqrt{\frac{3}{F_0^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad (25)$$

図-8は、これを実験値とともに描いたものである。Run-2は、図-5において非発生領域にあるものであり、矛盾はないものと考えられる。

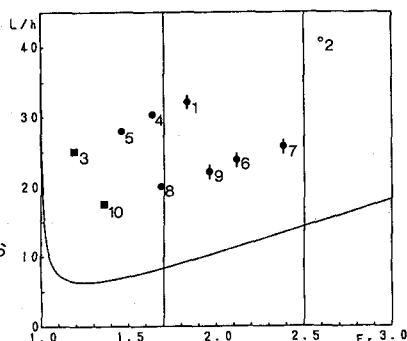


図-8 跳水維持に要する横流入長条件と実験値

4. 実験の概要

検証実験は、幅80cm、長さ15mの可傾斜水路を用いておこなわれた。上流端より5mの位置から厚さ5mmの薄板にて中央を仕切り、分岐モデ

ルとしている。すなわち、 $\eta=0.5$ である。分岐前の主水路とa-水路の底面は、錆止めペイントを塗ったままであるが、マニング-ストリックラー式から逆算した粗度高は、平均0.053mmであった。b-水路の入口部分には、4.2mmおよび16.1mmの碎石を、それぞれ75cmおよび50cmの範囲にわたってはりつけた。この状態でほぼ15. l/s の流量を流し、勾配を種々に変えて跳水の発生状況を調べた。分岐流量は、水路下流端に容器を置き、満杯になる時間を測って求めた。条件および測定水量を表にまとめて示す。このうち、 h/d_0 の小さなRun-7では、b-水路においても跳水の発生がみられた。河床勾配が相対的に急であるにもかかわらず ϕ が小さくなったために限界勾配を下回ったためと考えられる。

発生跳水は、フルード数が1.7までのものは波状跳水、それ以上のものは弱渦跳水と認められ、教科書どおりの結果になっている。跳水の端部は衝撃波の頂部につながることが多く、両者の関連を調べる必要がありそうである。

表 実験条件および主要水量

	全流量 Q_0 (l/s)	底面勾配 i	主水路等流 水深 h_0 (cm)	主水路 フルード数 F_0	a水路配分 流量比 r	粗度高 d_0 (mm)	粗度付長 L (cm)	跳水の状態	主水路幅 B_0 (cm)	a水路幅 B_a (cm)	幅比 η
run 1	16.19	1/106	2.32	1.83	0.58			弱渦跳水			
run 2	16.81	1/41.7	1.87	2.6	0.58						
run 3	15.29	1/247	2.99	1.18	0.56	4.2	75	跳水?			
run 4	15.85	1/128	2.47	1.63	0.57			波状跳水			
run 5	15.76	1/185	2.67	1.44	0.57			波状跳水			
run 6	15.66	1/72.99	2.07	2.1	0.73			弱渦跳水	80	40	0.5
run 7	15.81	1/55.56	1.915	2.38	0.73			弱渦跳水			
run 8	16.39	1/122	2.48	1.675	0.70	16.1	50	弱渦跳水			
run 9	16.52	1/84.39	2.25	1.95	0.725			波状跳水			
run 10	16.01	1/193	2.82	1.35	0.69			弱渦跳水			
								跳水?			

5. 結論

- (1) 直線平行分岐水路における跳水は、流量配分比が幅比に対してある条件以上に大きくなる場合に生ずる。ベルヌイ式の成立が破れるときに跳水が起こる考えると、式(11)がその必要条件となる。検証実験の結果は、概ねこの条件で跳水が発生している。
- (2) 流量配分比を粗度高比で表すと発生条件は式(15)となり、この条件式も実験値を満たす。
- (3) 実際に跳水が発生するのは、一方の流量の一部が他方に流入して渦状点を生み出す場合である。またそれが安定に存在するのは、水面形遷移の原因となる粗度長が跳水長を越えた場合である。これらより、跳水発生 of 十分条件として式(25)が導かれる。跳水実験値はこの条件の範囲内にある。
- (4) 一方の流量が他方に流入し必要条件を満たす場合でも、式(25)の条件からはずれる時には渦状点が生まれず、跳水は起こらない。一様流入はこの例であり、分岐入口の粗度状態で発生・非発生が生じうる。

参考文献 1)岩佐義朗・井上和也(1972):漸変流の水利とその応用、水工水理学(石原藤次郎編)、丸善
2)Harger W.H.(1989):Supercritical Flow in Channel Junction, Jour.of Hyd.Eng., ASCE Vol.115, No. 5, May(595-616)
3)長谷川和義・石川伸・大高道夫(1991):分岐・合流を含む急勾配流れの特性に関する実験的研究、土木学会北海道支部論文報告集、平成2年度(401-406)
4)長谷川和義・石川伸(1991):山地河川における分岐・合流流路の突然変動機構、土木学会北海道支部論文報告集、平成2年度(407-412)
5)椿東一郎(1975):水理学1 第5章開水路の定流、森北出版
6)池内正幸・山田正・村上良宏(1986):溪流を模擬した開水路流れの水面形遷移と抵抗則に関する研究、第30回水理講演会論文集(73-78)