水工学論文集　第36巻　1992年２月

一次元保存則系差分法による数値解析の際に生ずる数値振動の除去法について

Taking off Techniques of the Numerical Oscillations Which Occur in Numerical Analyses by Using a Difference Scheme for One Dimensional System of a Conservation Law

潮田智道*，河村三郎**
By Tomomichi SHIOTA, Saburo KOMURA

Calculations of sub- and super-critical flows with unsteady hydraulic jump are important to investigate the planning or design of a river system. When we use the governing equation with conservative type and apply the defference method, the numerical oscillations have happened in the case of unsteady flow with discontinuities. Accordingly, in this paper, we will introduce the TVD-MacCormack scheme and analyze the surface water profile with the hydraulic jump. Finally, taking off techniques of the numerical oscillations are considered by using computed results for practical examples.

Keyword : numerical analysis, TVD-MacCormack method, numerical schemes, free-surface flow

１．はじめに

近年、土地需給の逼迫化などに起因した山地丘陵部における人口・資産の集積や、価値観の多様化に伴う景観や生態系への配慮の必要性の増大等により、河川や水理構造物に求められる機能も多様化し、親水機能や自然生態系への配慮などを欠く河道計画は、世論の支持を得られにくい動向にある。このため、複雑な地形における流況を把握し、流況を積極的に制御し景観性に優れた流況を創出することも従来にも増して求められている。従って、跳水を伴う流れや段落ち等を含む渓流河川の洪水時の流況の解析は重要となりつつあり、地形が急峻で浸透性が少ない流域では、降雨による突発的な流量の増大が生ずる可能性もあって、常・射流混在場に適用可能な非定常数値計算法の確立と、渓流河川における水理機構の解明が必要である。さて、St. Venant形式の一次元浅水流方程式に対して 二次精度の保存則差分法であるMac Cormack法を適用する方法は、定常流に対しては時間進行法による収束解を求めることで、水路勾配の急変による跳水の発生領域、段落ち、段上がり等を含む流れなど、従来の方法では支配断面や跳水の発生位置の特定と、それによる常流区間・射流区間の分割の必要性から容易ではなかった場所にも適用可能で、とりわけ、漸変流の仮定が成立する場所においては高精度のシミュレーションが可能であることが知られている。この手法は、二次元に拡

* 学生会員　岐阜大学大学院　工学研究科　土木工学専攻（〒501-11 岐阜市柳戸１－１）
**正 会 員　工博　岐阜大学教授　工学部　土木工学科　（　　　　同上　　　　）

張すれば、ミャッピングを利用することにより、境界に沿って生成されたbody-fitting座標系に対して差分化することが可能で、漸縮に伴う交差波を含む流れなど、二次元的効果が重要となる水理現象にも適用可能となりつつある。ところで、この手法は非定常現象への拡張が可能であるため、常射流混在場における段波や移動跳水の計算も可能である。しかしこれらの計算を行う場合、定常流と比較して、差分スキームの打切り誤差の影響と考えられる数値振動が発生が顕著となり、数値解の信頼性が著しく失なわれる。この傾向はＣＦＬ条件にも関係し、Ｃaurant数の減少により増大する。さて、数学モデルによる解析結果と物理現象との差異は、支配方程式系そのものに含まれる仮定によるものと、数値解法の導入により混入する打切り誤差や丸め誤差の２種に大別されると考えられる。従って、両者は区別して論ぜられるべきなので、解析法による誤差がいずれの原因によるものかを特定し、適切な方法でその誤差を除去する必要がある。前者の例としては、段落ちに伴う再循環流領域の発生の影響による非一様性の下流への波及などがあり、後者の例としては前述の数値振動がある。そこで、本研究では、数値解法の導入による誤差に着目し、ＴＶＤ形式の導入により打切り誤差による数値振動を除去する手法を提案し、さらに、この手法の特性及び利点と欠点について論ずる。

２．解析法

支配方程式系として、次に示す一次元浅水流モデルに対する保存則形の連続式及び運動方程式

$$U_t + E_x = C \tag{1}$$

を採用する。ただし、上式中の添え字は偏微分を表し、

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix},\quad E = \begin{bmatrix} Q \\ \left(\dfrac{P}{\rho}\right)_b + \dfrac{Q^2}{A} \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(i_0 - I_f) \end{bmatrix},\qquad P = \frac{1}{2} g h^2,\quad I_f = \frac{n^2 Q\,|\,Q\,|}{A^2 R^{4/3}} \tag{2}$$

である。上式では、流線の湾曲の影響を考慮せず、静水圧分布を仮定している。底面剪断力は等流状態の乱流粗面水路においてよく成立するManningの平均流速公式により考慮している。

また、Mac Cormack法[1) 3)]は、

予測子段階：
$$\bar{U}_j = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(E_j^n - E_{j-1}^n\right) + \Delta t\, C^n \tag{3.a}$$

修正子段階：
$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_j^n + \bar{U}_j\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\bar{E}_{j+1} - \bar{E}_j\right) + \frac{\Delta t}{2} C_j^n \tag{3.b}$$

ただし、
$$\bar{E}_j = E(\bar{U}_j),\quad \bar{C}_j = C(\bar{U}_j)$$

である。

従来、数値振動を抑制し非線形による不安定性を除去するため、陽的に人工粘性を付加することによってなされてきたが、この方法には数値拡散によるなまりを発生するという欠点がある。これは、人工粘性を、領域全体に一律に効かせることが原因であると考えられ、人工粘性を場所に応じた強さで効かせることが必要となっている。1980年代、多くの研究者が、このことに対し系統的な基礎づけを行い、特筆すべき成果としてHartenによるＴＶＤ法が登場した。この方法は、節点ごとに、人工粘性による修正量が適切なものとなるよう調節することによってなされる。そこで、ＴＶＤ法の、基本的な考えについて述べる。線形保存則は、

$$u_t + f_x = 0 \qquad f = a\,u \tag{4}$$

ただし、a は実定数である。U_j^nが上式の数値解であるとすると、時刻ｎにおける数値解の空間的な変化量の合計TVを定義すると、

$$TV\,[U_j^n] = \sum_j |\, U_{j+1}^n - U_j^n \,| \tag{5}$$

上式を用いると、ＴＶＤ条件は、

$$TV\left[U_j^{n+1}\right] \leq TV\left[U_j^{n}\right] \tag{6}$$

と書くことができる。上式から理解できるように、数値振動が発達すれば、TVは時間発展に伴い増加することになる。式(4)を三点保存則差分法で解くために差分化すると、

$$U_j^{n+1}=U_j^{n}-C_{j-1/2}\Delta U_{j-1/2}^{n}+D_{j+1/2}\Delta U_{j+1/2}^{n} \tag{7}$$

$$\Delta U_{j+1/2}^{n}=U_{j+1}^{n}-U_j^{n},\quad \Delta U_{j-1/2}^{n}=U_j^{n}-U_{j-1}^{n} \tag{8}$$

である。このとき、係数C, Dに関するつぎの条件

$$0\leq C_{j-1/2},\quad 0\leq D_{j+1/2},\quad 0\leq C_{j-1/2}+D_{j+1/2}\leq 1 \tag{9}$$

を満たしていれば、ＴＶＤ条件を満たすことになる。上式の条件をみたしていない二次精度スキームはＴＶＤではなく衝撃波の前後に数値振動を発生する。Ｓwebyは，Ｌax－Wendroff法が一次精度の式に拡散抑制フラックス項を付加したものになっていることに着目し、”flux limiter”という概念を導入して二次精度のＴＶＤ法を確立した。すなわち、数値振動を起こさない一次精度のスキームに、拡散抑制フラックス項をフラックス制御関数Φで修正した式を付け足すことにより、ＴＶＤ条件を満たすスキームを導くことが出来る。ここで、ＴＶＤの条件を満たすためには、Φ(ｒ)は

$$0\leq \Phi(r)/r\leq 2\ ,\quad 0\leq \Phi(r)\leq 2 \tag{10}$$

なる条件を共に満たしていなければならない。また、Ｈarten やＳwebyに続いて，Ｄavis は、ＬＷ法はＴＶＤに修正することが可能であることを示した。ＬＷ法の係数C, Dは、(9)式の条件を満たさないので、式を満たすように付加項を導入することによって解決しようとした。すなわち、(3)式は修正子段階の右辺に次の項を付加することによって、容易にＴＶＤ形になおすことができる[3]。

すなわち、付加項は、

$$TVD_j=\left[G^{+}(r^{+}_{j})-G^{-}(r^{-}_{j+1})\right]\Delta U_{j+1/2}^{n}-\left[G^{+}(r^{+}_{j-1})-G^{-}(r^{-}_{j})\right]\Delta U_{j-1/2}^{n} \tag{11}$$

である。ここに、

$$G^{+}(r^{+}_{j})=0.5C(\nu)\left[1-\Phi(r^{+}_{j})\right] \tag{12.a}$$

$$G^{-}(r^{-}_{j})=0.5C(\nu)\left[1-\Phi(r^{-}_{j})\right] \tag{12.b}$$

$$C(\nu)=\begin{cases}\nu(1-\nu) & ,\ \nu\leq 0.5\\ 0.25 & ,\ \nu>0.5\end{cases} \tag{13}$$

フラックス制御関数としては，次のものを用いる。

$$\Phi(r)=\begin{cases}\min(2r,1) & ,\ r>0\\ 0 & ,\ r\leq 0\end{cases} \tag{14}$$

ただし，ｒとしては、

$$r^{+}_{j}=1/r^{-}_{j}=\Delta U_{j-1/2}^{n}/\Delta U_{j+1/2}^{n} \tag{15}$$

である。すると、式(3)はＴＶＤ法の条件を満足する。

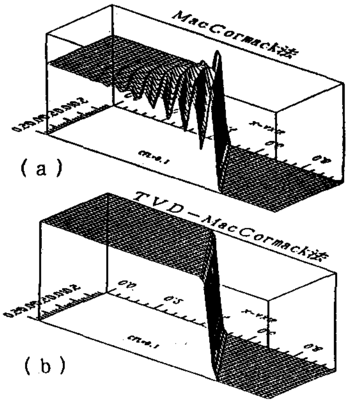

図-1 保存則系差分法の、不連続部における特性
ＭａｃＣｏｒｍａｃｋ法は、時間発展とともに、数値振動が発達する。
(ａ)ＭａｃＣｏｒｍａｃｋ法
(ｂ)ＴＶＤ－ＭａｃＣｏｒｍａｃｋ法

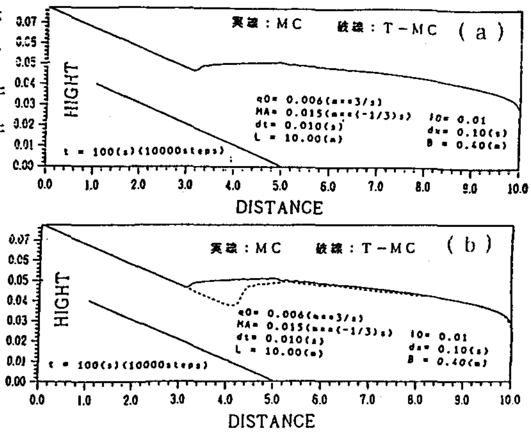

図-2 ＴＶＤ－ＭａｃＣｏｒｍａｃｋ法による、跳水を含む流れの計算例
(ａ)ＭＣ法と連続式にＴＶＤ法を適用したもの
(ｂ)連続式にＴＶＤ法を適用したものと、連続式および運動方程式に適用したもの。

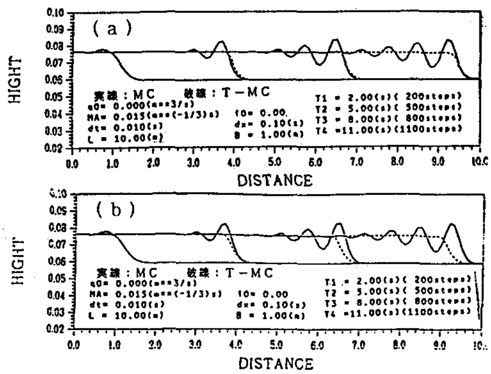

図-3 ＴＶＤ－ＭａｃＣｏｒｍａｃｋ法による、段波の計算例
(ａ)ＭＣ法
(ｂ)連続式および運動方程式にＴＶＤ法を適用したもの

3．計算結果

図－１は、Burgers方程式のMacCormack法及びＴＶＤ－MacCormack法による数値解の時間発展を示したものであるが、ＴＶＤ法の効果が明確に表れている。すなわち、MacCormack法は、時間発展とともに数値振動が増幅しているが、ＴＶＤ－MacCormack法は、抑制されており、ＴＶＤ法の有効性が示されている。次に、跳水を含む一次元浅水流に同じ方法を適用し、時間進行法で数値解を求めたのが図－２である。時間進行法は、定常状態の諸量を計算するのに、非定常現象を追跡するための支配方程式と数値計算法を利用し、境界条件と想定初期条件を与えて収束計算を行う方法で、物理的に定常状態が存在する場合、漸近的に定常解を得ることができる。このとき、想定初期条件として適当な水深と流量を与え、流量が定常になるまで計算する。この結果、ＴＶＤ法を利用したものとしないものとでは際だった相違は見られなかった。従って、MacCormack法を１次元の浅水流モデルに適用した場合、定常状態においては、実用上問題がないことからＴＶＤ－MacCormack法を利用しても比較的よい精度で計算できると考えられる。図－３は、左端の水位が急激に増大した場合の、計算例である。MacCormack法の結果は、著しい数値振動を伴っているが、ＴＶＤ－MacCormack法では、数値振動が全く生じていない。この結果から、ＴＶＤ法の導入により、効果的に数値振動を制御することができると考えられる。

計算スキームの衝撃波捕獲特性を検証するための例題として、Garciaら[2]は､ダム決壊波問題を採用している。そこで本研究でも、ＴＶＤ法に対してこの例題を使用し有効性を確認する。図－４に示すように、ＴＶＤ法を適用したものと、しないものとでは、数値解が陥没部の有無という点で異なった挙動を示す。従って、ＴＶＤ法は、厳密解における凹凸のうち、抑制の必要性のない部分を抑制してしまう疑いがもたれる。そこで、このことを確認するための考察を行う。ダム決壊波は、ダムの決壊に類似した、理想化された現象であるが土砂崩壊などの影響により発生する表面波の追跡に使用されることも考えられる。実際、静水面に衝撃を与えて発生した波の特性を把握する数値シミュレーション手法を開発するため、実験用ポンドの水面直上からブロックを落下させて発生させた波の実験値と、ブロック重量に相当する水柱をブロック投下箇所に初期水深として与えた計算値とを比較された例がある。ダム決壊波問題を、水平水路において、２つの著しく異なる初期水深と初期流速ゼロを与える非定常問題と定義すれば、そのような計算例も広義の二次元ダム決壊波問題に類似した状況であるといえる。しかしダム決壊波問題は、瞬間的な現象であるため、少ないＣＰＵ時間で不連続部の現象に対する計算スキームの有効性を検討するのに利用できるという長所がある。一方、物理現象としては、決遮板を急激に除去するか、無重力状態から瞬間的に重力場へと遷移する状況に相当するため、全く同様の現象を水理実験により再現するのは容易ではない。従って、水圧分布の非静水圧性の考慮と、鉛直二次元の水理現象の追跡が可能な、ＭＡＣ法による計算結果との比較を行う。同手法による前水深を有する計算例はあまり例がないようなので、新たに計算を行う。この手法において、複雑な水面擾乱と内部流況を追跡するため、あえて、自由表面形状関数は利用せず、マーカー投入方式を採用した。ここで、ＭＡＣ法の概略を示す。

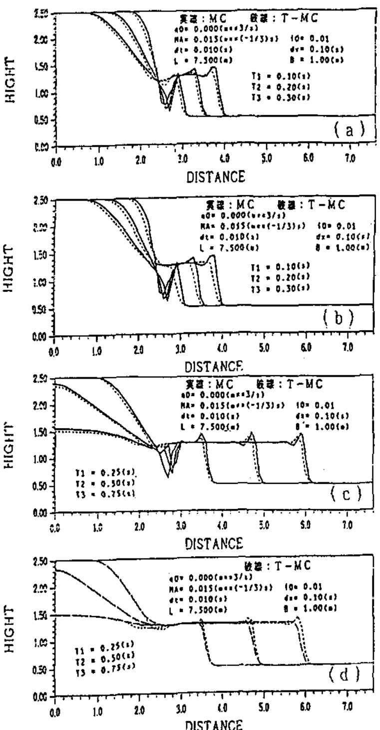

図-4　ＴＶＤ－ＭａｃＣｏｒｍａｃｋ法による、ダム決壊波の計算例
(ａ)ＭＣ法と連続式にＴＶＤ法を適用したもの
(ｂ)連続式にＴＶＤ法を適用したものと、式および運動方程式に適用したもの。
(ｃ)ＭＣ法と連続式にＴＶＤ法を適用したもの
(ｄ)連続式にＴＶＤ法を適用したものと、式および運動方程式に適用したもの。

使用する支配方程式は、次の連続式と運動方程式、

$$D = 0 \tag{16}$$

$$U_t + E_x + F_z = G \tag{17}$$

但し、

$$U=\begin{bmatrix}u\\ w\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}u^2+p\\ uw-\nu\,\omega_y\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}uw+\nu\,\omega_y\\ w^2+p\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}g_x\\ g_z\end{bmatrix} \tag{18}$$

及び、

$$\omega_y = w_x - u_z \tag{19}$$

$$D = u_x + w_z \tag{20}$$

である。ここに、u，vの添字x，zは、偏微分を表す。なお、連続式の充足は、ＳＭＡＣ法に従う。

すなわち、運動方程式を、staggerd格子に対する差分演算子Ｌにより差分化すると、

$$\tilde{u} = L(u^n, w^n, \theta^n, \Delta t), \qquad \tilde{w} = L(u^n, w^n, \theta^n, \Delta t) \tag{21}$$

そして、Ｐoisson方程式

$$\nabla^2 \hat{\Phi} = \tilde{D} \tag{22}$$

を解き、補充速度ポテンシャル$\hat{\Phi}$を求め、

$$p^{n+1} = \theta^n + \frac{\hat{\Phi}}{\Delta t}, \quad u^{n+1} = \tilde{u} + \frac{\Delta\hat{\Phi}}{\Delta x}, \quad w^{n+1} = \tilde{w} + \frac{\Delta\hat{\Phi}}{\Delta y} \tag{23}$$

により、⊿ｔ後の諸量を求めた。

そして、マーカーX_kの移動速度は、それぞれ

$$u_k = \frac{A_1U_1+A_2U_2+A_3U_3+A_4U_4}{\Delta x\cdot\Delta z}, \quad w_k = \frac{B_1W_1+B_2W_2+B_3W_3+B_4W_4}{\Delta x\cdot\Delta z} \tag{24}$$

とした。ここに、U_l，W_lは、マーカーX_kに近接する流速点における流速、そして、A_l，B_lは加重平均の重みである。従って、⊿ｔ後のマーカーの座標は、

$$x_k^{n+1} = x_k^n + u_k\cdot\Delta t, \quad z_k^{n+1} = z_k^n + w_k\cdot\Delta t \tag{25}$$

となる。そして、各時間ステップごとに、自由表面の動きに応じて各セルの属性を判定する『旗付け』を行い、次の時間ステップにおける計算領域と境界条件を決定した。なお、自由表面は水面の角度などにより15種類に分類し、底面においては、free-slipを許容した。

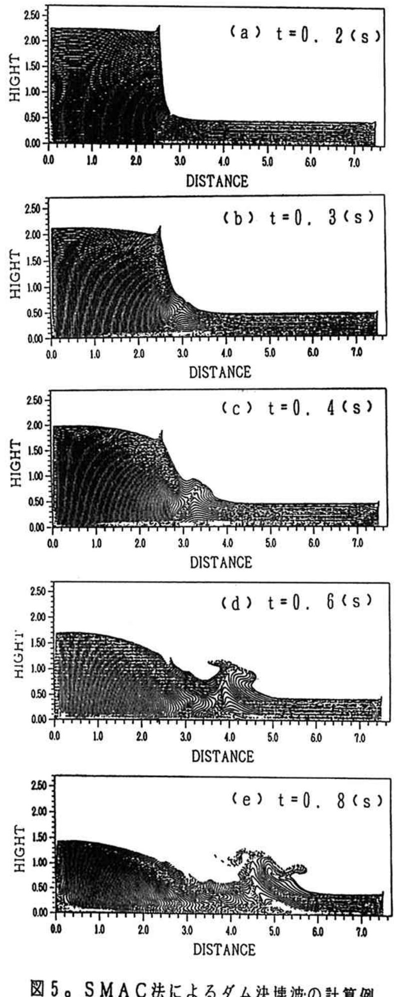

図5。ＳＭＡＣ法によるダム決壊波の計算例
漸変流とは著しく異なった流況を呈している。

この結果、図－５に示すように、覆いかぶさり(overhanging)、突っ込み(plunging)、跳ね返り(splushing)などの、現象や流水内部の水理機構を追跡することが出来た。初期段階において水位低下及び、波面の前進が生ずる原因は、初期条件において圧力ｐ=0を与えたためであると推定される。0.20秒後の段階では、内部に管状の部分とそれにつながる水面の臍状の部分が形成され、突出部の成長の準備が始まっている。また、0.60秒後では、前方のみならず後方にも覆いかぶさっており、茸状の水面形を呈するなど、興味深い結果となっている。いずれにしろ、漸変流とは著しく異なった流況を呈しており、 Ｓt.Ｖenant形式の一次元浅水流方程式の適用対象に要求される条件を満たしていない。このことは、 例題の水理現象を浅水流方程式で再現する場合、 限界のあることを示唆している。0.80秒後の水面形から考えると、この後では、 水面擾乱は収束せず、 更に複雑化して非定常な水面形となり、直線状の水面形が実現されるとは考えにくい。 従ってこのようなケースでは、Ｒitterの解析解に近づけることが、必ずしも物理現象の忠実な再現とは結論できないことが明らかであると考えられる。このような流況が著しくなるのは、 覆いかぶさり現象が生ずる場合である。 覆いかぶさり等の現象が発生するのは、 現在のところ、どの様な条件を満足する場合であるかは明らかではないと考えられる。 従って、 現状ではこの例題に対す

るＳｔ．Ｖenant形式の一次元浅水流方程式に、 保存則系差分法を適用する手法の適用限界を明確に示すことはできないため、定性的に考えて覆いかぶさり現象が生ずることが予想される場合には、他の解法の援用などが必要となろう。

５．おわりに

高精度の数値解析法とは、支配方程式系が記述する厳密解をできるだけ忠実に再現することであると定義づければ、ＴＶＤ法の導入は数値解を一歩厳密解に近づけることになる可能性が高い。しかしながら、依然、同手法が、選択的には数値振動を制御せず厳密解を過度に平滑化する疑いがなくなった訳ではない。このことは今後の検討が必要であることを示している。

以上の考察をまとめると次のようである。

（１）２次精度の数値解に特有な、『数値振動』の発生は、数値解の信頼性を著しく失なうばかりでなく、不安定化の原因となる。そこで、この現象の制御に一定の効果が認められるＴＶＤ法の導入を図る。この方法は、その解決法の一つとして有望なものである。しかしながら、妥当性については一層の検討が必要であると考えられる。ＴＶＤ法の導入は、数値振動を除去し、解の信頼性を向上させるのに一定の効果があるため、水圧分布の非静水圧性への配慮の導入を考える場合、ＴＶＤ法により数値分散効果を除去した上で、水圧分布の非静水圧性を導入することにより、信頼性の高い解をうることができると考えられる。

（２）ダム決壊波は鉛直二次元の効果が大きく類似現象を念頭においた保存則差分法の適用には問題が残る。

（３）ＴＶＤ法は、厳密解における凹凸のうち、抑制の必要性のない部分を抑制してしまう懸念がある。そのようなケースでは、数値解の信頼性という目的で導入された意義が生かされない。ＭＡＣ法における陥没部を形成する数値解との比較から、次の可能性のあることが予想できる。

①浅水流方程式は、陥没部を記述せず、数値解の陥没部は数値計算誤差による、という可能性。

②浅水流方程式は陥没部を記述し、ＴＶＤ法は支配方程式が厳密に記述する解を過度に平滑化する、という可能性。

（４）保存則差分法において、跳水部などにおいては、流線の湾曲の影響による水圧分布の非静水圧性が重要となり、流速分布の一般断面との著しい相異や気泡の連行の発生が予想される。また、本手法において求められる諸量は各地点において１価なので、巻き波型砕波のような多価現象は表現されず、数値解における弱解として得られる。従って、水理現象を忠実に再現したものとはいえないため、局所流の影響を定量的に評価していくには、内部流況の成因をふまえたうえで、跳水等と数値解における弱解の意味を明確にする必要がある。このような現象の一例を、他の解法との比較などによりに研究を進め、その適用限界を示した。

（５）等流状態すなわち $dh/dx = (i_0 - I_f)/(1-Fr^2)=0$ のとき、浅水流方程式から容易に理解できるように、 $i_0 = I_f$ となり、河床勾配と摩擦勾配は等しくなる。従って、等流状態が保たれれば、支配方程式は見掛け上、同次方程式と同等となるが、 摩擦勾配 $I_f = n^2 v|v|/h^{4/3}$ は、変数を含んでいる。従って、河床勾配及び摩擦勾配を含む生成項は定数項ではない。浅水流方程式形における運動方程式にＴＶＤ法を適用する場合には、このことが影響してくると考えられる。

参考文献:

1)日本機会学会編:流れの数値ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ,pp.117-118,ｺﾛﾅ社,1989.

2)Reinaldo Garcia and R.A.Kahawita : Numerical Solution of the St.Venant Equations with the MacCormack Finite Deference Schemes;Inter.J.Numer.Methods in Fluids Vol.6,pp.259-274,1986.

3)D.M.Causon : High Resolution Finite Volume Schemes and Computational Aerodynamics , Nonliniear Hyperbolic Equations Theory, Computation Methods, and Applications, Notes on Numerical Fluid Mechanics, vol.24,pp.63-74,1989.