

常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について

A Study on Calculation Method for Open-Channel Flow Accompanied by Transition

岡部健士*・天羽誠二**・石垣昌邦***

By Takeshi OKABE, Seiji AMOU and Masakuni ISHIGAKI

In this paper, firstly, a calculation method for non-uniform open-channel flow accompanied by the transition between super- and sub-critical condition is developed on the basis of the MacCormack explicite time-splitting scheme and the applicability of the method is clarified based on the experimental results obtained by the authors using a flume with wide variation in width and slope. Secondly, concerning with the standard steady open-channel flow routings, a model for the estimation of the mean energy slope is proposed with the numerical examples.

Keywords: non-uniform flow, transition of flow, unsteady flow, model experiment, numerical model, MacCormack scheme

1. まえがき

定常1次元漸変流の基礎式に基づく不等流計算の理論面での諸問題は、既に十分解明されている。しかし、山地河川のように幾何的条件の変化が著しく、常流・射流の遷移を伴う河道を対象にした高水位予測や河床変動予測のための不等流計算の実行は必ずしも容易ではない。とくに、一部の断面・勾配の急変区間を除いて通常、河幅の2～数倍の粗い間隔で設定した断面について行う実用計算では、支配断面や跳水位置の合理的な決定が不可能となったり、ある2断面間でEnergy勾配が大きく変化する場合に、代表Energy勾配の計算誤差が不合理な計算結果をもたらすことがしばしばある。後者は、内挿断面を追加することにより、かなりな程度改善できる。ただし、ダム堆砂のような著しい河床変動過程の予測計算において、流れの遷移断面が現象の進行段階や流量によって大幅かつ複雑に変化する場合に、逐一多数の内挿断面を挿入すると、計算時間がかかり過ぎるという新たな問題が生じる。一方、前者は断面数を増やしても依然として残されることが多い。支配断面と跳水のうち、跳水位置は、減勢工など特別な場合を除いてさほど重要視されないが、支配断面は計算の境界条件として用いられるので、その取り扱いが計算値全体の信頼性に重要な影響を及ぼす。

* 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科

(〒770 徳島市南常三島町2-1)

** 正会員 四国建設コンサルタント 技術部設計5課

(〒770 徳島市佐古6番町5-29)

*** 正会員 工修 四電技術コンサルタント 土木第2部第1課

(〒761-01 高松市屋島西町2109-8)

一方、遷移を伴う不等流の解を適当な初期条件から始めた不定流計算の収束解として求める方法がある。保存形の基礎式を用いれば遷移の有無によらず単一のアルゴリズムで計算できるという便利さがあり、河床変動計算への導入法も含めて、その実用化を目指した研究^{1)~3)}が続けられている。

本研究では、まず、遷移を伴う不定流の遷移断面付近の流況の再現性が優れていることで最近注目されているMacCormack法^{4) 5)}を取り上げ、河幅と河床勾配の変化が著しい山地河川を想定した模型実験の結果との比較を通して、その適用性を検討した。また、いわゆる不等流計算法についても、とくに長期の河床変動計算に適用する場合を考えて、内挿断面を出来る限り少なくできる簡便法を検討した。

2. 実験概要

実験に用いた水路は、長さ14m、深さ0.4mで、幅が図-1の上部に示すように変化する長方形断面・直線水路である。本水路拡幅部の片側開き角度は、漸拡水路における流れの対称性の限界角⁶⁾の4度より小さい約3度となっている。水路内には、平均粒径15mmのほぼ均一な玉砂利を、仕上がり面が横断面内では水平になるように敷き詰めて、図-1に示すような2種（以下、model A および model B と呼ぶ）の河床を作成した。すでに述べたように、本実験は山地河川の流れに類似した流れを観測するために行ったので、路床縦断形状は河幅変化に対応する平衡河床を意識しながら決定した。

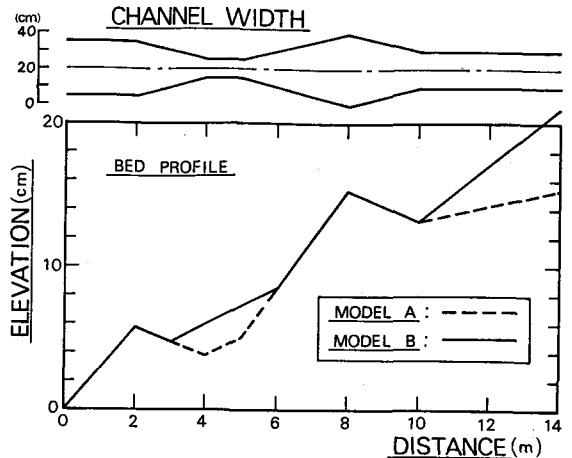


図-1 実験水路の概形

以上のような2種の河道模型にそれぞれ2.0、4.0および6.0(1/sec)の定常流量を通水し、下流端の水位を図-1の縦距で、model Aの場合は5.8cm、model Bでは6.0cmに保ち、水路中心線に沿う水位分布をサーボ式水位計で連続計測した。実験結果は、後出の図-2、図-3に点描されているとおりである。なお、一つの流れの計測は3回づつ行い、これらを単純平均して実験値としての水面形を得た。したがって、その位置に時間的な変動がある跳水部分の水面形は、若干平滑化されている。

3. MacCormack法に基づく計算モデル

MacCormack法（以下、MC法と略記する）は、時間stepごとに粗い近似（予測子段階）とその修正（修正子段階）を繰り返す、いわゆるtime-splitting finite difference schemeの一種である。本法は、差分法としては最も単純な前進あるいは後退差分だけを用いるものの、Two-Step Lax-Wendroff法と同様に2次の精度を有するとともに、数値拡散が小さいので、衝撃波や跳水のような不連続現象を含む流れの計算に適するものと考えられている。

(1) 流れの基礎式とその差分表示

長方形断面水路における横流入のない非定常・1次元漸変流の連続式と運動式（運動量保存則）を保存形式で表示するとつぎのようである。

$$\text{連続式: } \partial(Bh)/\partial t + \partial Q/\partial x = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動式: } \partial Q/\partial t + \partial (gBh^2/2 + Q^2/Bh)/\partial x = gBh(i_B - i_F) \quad (2)$$

ここに、 t =時間、 x =河床に沿う流れ方向の座標、 B =河幅、 h =水深、 Q =流量、 i_B =河床勾配、 i_F =摩擦勾配、 g =重力の加速度であり、簡単のため運動量係数は1とおき、拡散項も外している。ここで、以下の記述を簡単にするために、上の2式をベクトル式に書き改めておく。

$$\partial U / \partial t + \partial E / \partial x = C \quad (3)$$

ただし, $U = \begin{bmatrix} Bh \\ Q \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} Q \\ g B h^2 / 2 + Q^2 / (B h) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ g B h (i_B - i_F) \end{bmatrix}$

(3)式に対するMC法の差分スキームの基本形はつぎのようである。

[予測子段階] $U^p_i = U_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1} - E_i) + \Delta t C_i + V_i \quad (4)$

[修正子段階] $U^c_i = \frac{1}{2} \left\{ (U_i + U^p_i) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (E^p_i - E^p_{i-1}) + \Delta t C^p_i + V^p_i \right\} \quad (5)$

ここに, Δt = 時間間隔, Δx = 断面間距離, V = 人工粘性である。また, 下付き添字 "i" は流れ方向に順に付した断面の番号, 上付き添字 "p" および "c" は, それぞれ予測子段階および修正子段階での解あるいはこれらより求められる値であることを示す。(4)および(5)式の差分方向は, それぞれ前進および後退となっているが, これは入れ替えてもよい。

MC法による数値計算の安定性や精度は人工粘性項の形式によってかなり異なる。この問題については数値計算の分野で詳しく研究されているが, 開水路不定流のように非線形性の高い問題についての定説は未だ得られていない。本研究では, 文献5)を参考にするとともに, 計算式における次元の整合を考慮して V を次式のように定義した。

予測子段階: $V_i = - (D_{i+1} - D_i) \quad (6-a)$

修正子段階: $V_i = + (D_i - D_{i-1}) \quad (6-b)$

ただし, $D_i = K_V u_* h_i (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) \Delta t / \Delta x^2 \quad (7)$

ここに, u_* = 摩擦速度, K_V = 係数であり, 数値は経験的に定める。この形式の人工粘性は, 不連続点での数値振動を完全に押さえ切れるものではないが, 後に紹介する計算ではある程度満足できる効果を示した。一方, 沢田ら⁷⁾はBurgers方程式のstep波に関する数値実験をとおして, TVD形式の有用性を示唆しているが, 人工粘性の形式に関する比較検討は今後の課題としたい。

(2)適用法

ここでは, 差分スキームや人工粘性以外で計算の安定性や精度に関わる二, 三の要点について述べる。まず, (4)および(5)式を用いる場合, 予測子段階では下流から上流に向かって粗い近似解を求め, 修正子段階では上流から下流に向かってそれを修正してゆくので, 前者と後者の段階でそれぞれ下流端および上流端の断面の水量は計算されない。このような断面に対しては別の計算法を用意しておく必要がある。この際よく用いられるのはボックス型のスキームで, たとえば上記の予測子段階で計算されない下流端断面の場合について示すと, 下記のようなものである。すなわち, $A = B h$ として,

$$A^p_i = A_i - (A^p_{i-1} - A_{i-1}) - 2(\Delta t / \Delta x)(Q_i - Q_{i-1}) \quad (8)$$

なお, 一般に, 下流端の Q は h に従属する。また, 上流端に対しても同様なスキームを作ることができる。しかし, 種々の条件で計算を実行してみた結果, (8)式で"予測"された下流端の値を(5)式で"修正"したり, 修正段階で使う上流端のボックススキームを, (4)式から求める予測値を使う形式にすると, 計算不能を来たような著しい不安定が生じ易いことがわかった。そこで, 上・下流端はボックススキームのみで計算したところ良好な結果を得た。すなわち, ボックス型など形式の異なるスキームをMCスキームの各段階に混入して使用するのとは避けたほうがよい。

つぎに, 流れの運動式中の圧力項の取り扱いについて述べる。実験結果の再現計算において E_i あるいは E^p_i の中の圧力項を単純に i 断面の h および B から計算すると, とくに B の変化率が急変する断面から Q の解の不安定が発生し, 計算上で逆流断面が生じるほどまでに発達したり, 跳水部分の再現性に問題が残ったりする傾向が現れた。この種の計算では, 通常, 十分に堰上げた条件で求められる不等流を初期条件とし, 次第に目的の流れに近付けてゆくが, 上述の不安定は跳水などが現れていない段階でも発生した。不安定がとくに Q の方に集中して現れることより, h の2乗に比例する圧力項を介して, その不安定や誤差が増幅されて

Q の解に伝播するものと推察された。このような現象自体の非線形性に起因する不安定や誤差はいかんともしがたいと思われたが、試行錯誤の結果、2断面間の圧力差に相当する $\{(g B h^2/2)_i - (g B h^2/2)_{i-1}\}$ などに側壁からの圧力の流れ方向成分を、たとえば、 $g(B_i - B_{i-1})(h_i + h_{i-1})^2/8$ のような形式で付加してやると、不安定はほぼ完全に押さえられ、再現性もかなり改善されることがわかった。付加された項は、河幅の拡大および縮小部分における流れの、それぞれ急な減速および加速を軽減する作用を通して安定化に貢献しているようである。

最後に、 C の成分 $g B h(i_B - i_F) \equiv S$ の取り扱いについて述べる。流れの運動式を前進あるいは後退差分で離散化することは、隣合う2断面間のコントロールボリュームに逐一運動量の定理を適用していることに相当している。したがって、 S を第 i 断面の水利条件のみを用いて求めると、着目している2断面の間で流積やEnergy勾配の相違が大きい場合に、再現性が悪化する恐れがある。また、そのようにすれば、同一の断面間に対して予測値段階で与えられる S 値と修正値段階でのそれとが異なってくることは当然であり、実際に計算してみると、定常状態に達した段階での流量が、支配断面や跳水の付近において空間的にかなり大きく変動するような結果がもたらされた。このような点も考慮し、本計算中の S_i には、不等流の標準逐次計算法と同様に、関係する2断面について計算されるものの平均値を当てることにした。

(3) 計算例

図-2および図-3は、それぞれ model A および model B の実験について、計算値と実験値の比較を行ったものである。

計算においては、まず、実験で与えた流量のもとに水路全域で常流となるまでに堰上げられた不等流を標準逐次計算法で求めてこれを初期条件とし、こののち上流端からの流入流量を一定に保ったまま水路下流端に置いた仮想のオリフィス（下流端水位が実験で設定したものになったときの流出流量が実験流量になるような諸元を持つもの）の効果により、実験と同じ下流端水位の不等流に収束する過程を、上述した計算モデルで追跡した。 i_F は、つぎのような対数型の抵抗則を用い、側壁の効果を無視して計算した。

$$Q / (B h) / \sqrt{g h i_F} = 5.75 \log_{10}(h / k_s) + 6.0 \quad (9)$$

ここに、 k_s =水路床の相当砂粒粗度で、この値は、model B を用いた実験の最上流部に現れた等流の実測値より $k_s=1.8\text{cm}$ と決定した。 Δx は、全ての計算において水路の最小河幅より若干大きい 12.5cm とし、 Δt は、時間ステップごとに、全断面において計算したCourant numberの最大値が0.75になるように定めた。人工粘性の係数 K_v 値は2.5とした。なお、計算結果は K_v が0.5から5までの範囲ではほとんど変わらず、この範囲より小さければ不安定化の兆しが現れ、それより大きくなると跳水後の水面形が不自然になる傾向が認められた。

さて、計算値と実測値の一致はおおむね良好である。図の繁雑化を避けるためにFroude数分布などは省略しているので少し分かりにくいだが、それぞれ3～4個ある支配断面と跳水の位置も、model B の6m～8mの区間におけるものを除いて、十分満足できる程度の正確さで再現されている。ただし、計算による跳水直下流の水位はいずれも実測値をかなり上まわっている。これは、計算値がいわゆる”弱解”であって、跳水によるEnergy損失が考慮されていないことによる。そこで、跳水部のみに適当な局所損失を付加したり、圧力勾配の計算法を工夫してみたが、今のところ満足できる成果を得ていない。なお、上述した model B の水路中間点付近の適合性の悪さについては、実験値の方にも問題がある。この付近が拡幅区間直下の縮幅区間になっていることと流れが射流であることが相俟って、水面の横断形状が中央部でかなり窪んだものとなっているにもかかわらず、水面の縦断形状は水路中心線上でしか計測されていないからである。

4. 標準逐次計算法におけるEnergy勾配の計算法

図-4は、Energy勾配の流れ方向変化が著しい不等流に標準逐次計算法を適用したモデル計算の一例である。モデル水路は、図中の河幅と河床形状を持ち、粗度係数 $n=0.04$ の長方形断面水路で、 $Q=30 \text{ m}^3/\text{s}$ を下流端が段落ちの条件のもとに通水する場合の水面形を、まず、 Δx を100m(△印)、50m(▲印) および 5m(実

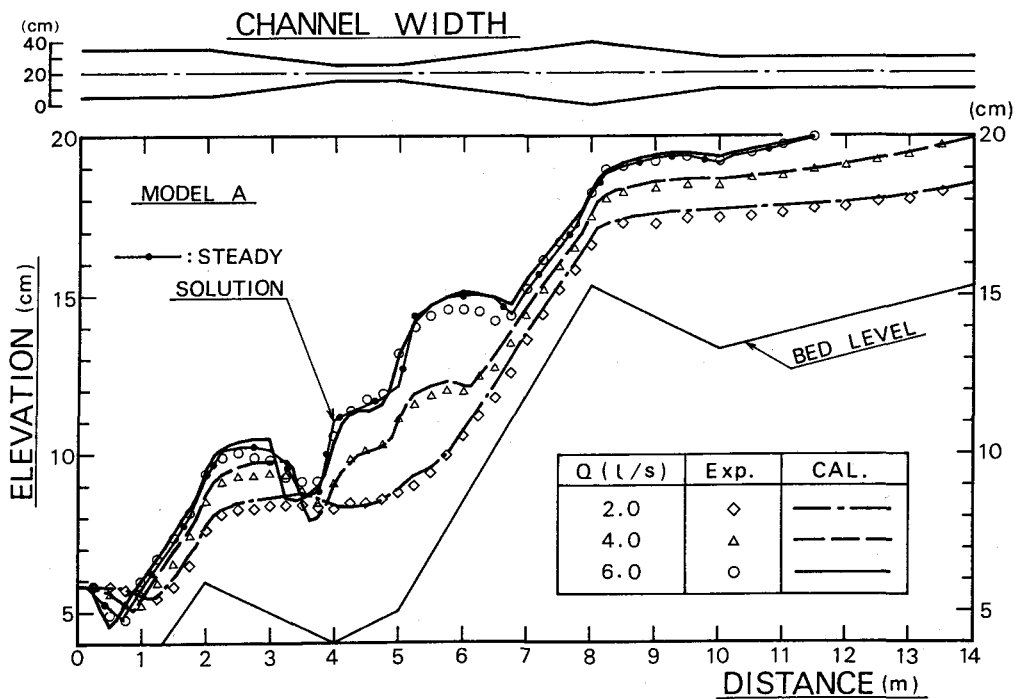


図-2 計算値と実験値の比較 (model A の場合)

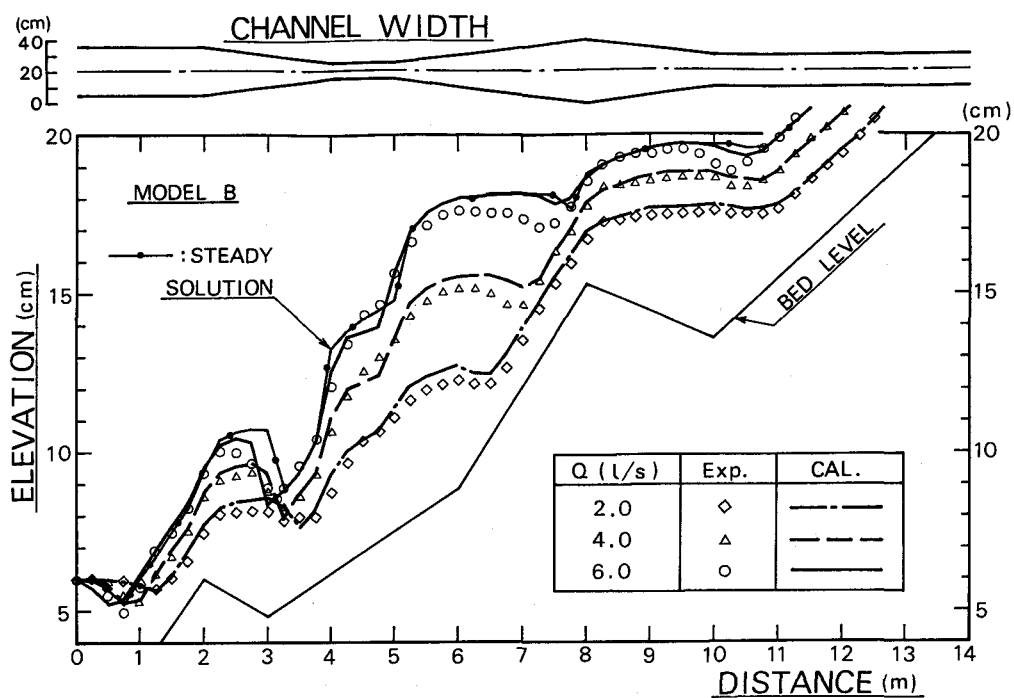


図-3 計算値と実験値の比較 (model B の場合)

線で、一応これを厳密解とみなす)として計算した。流れは全区間で常流である。さて、 $\Delta x = 100\text{m}$ の場合、下流端付近に不合理な堰上げ背水曲線が現れ、400m付近でも精度が非常に悪くなっている。また、上流の等流区間で解がわずかに振動している。 $\Delta x = 50\text{m}$ では、精度がかなり改善されているが、やはり、下流端付近の水面形に不合理が見られる。

図中の○印は、 $\Delta x = 100\text{m}$ とするが、ある2断面1, 2の間の平均Energy勾配 I_{em} を求める際に、それぞれの断面水理量から求まるEnergy勾配 I_{e1} , I_{e2} に重み w_1 , w_2 を付して計算したものである。

$$I_{em} = w_1 I_{e1} + w_2 I_{e2} \quad (10)$$

重みは、2断面間の路床勾配 I_B の正負で相違するが、ある断面の流れが等流状態に近いほど、また限界状態から遠いほど、その断面の重みが増すよう定式化した。すなわち、 $I_B > 0$ の場合には、等流状態および限界状態からの相違を、それぞれ $R_U (= |I_e / I_B - 1|)$ および $R_C (= h_c / h)$ で評価し、

$$w_1 = \frac{R_{U2} \cdot R_{C2}}{R_{U1} \cdot R_{C1} + R_{U2} \cdot R_{C2}} \quad (11-a), \quad w_2 = \frac{R_{U1} \cdot R_{C1}}{R_{U1} \cdot R_{C1} + R_{U2} \cdot R_{C2}} \quad (11-b)$$

一方、 $I_B \leq 0$ では、 R_U の定義ができないので、 R_C のみを用いて、

$$w_1 = \frac{R_{C2}}{R_{U1} \cdot R_{C1} + R_{U2} \cdot R_{C2}} \quad (12-a), \quad w_2 = \frac{R_{C1}}{R_{U1} \cdot R_{C1} + R_{U2} \cdot R_{C2}} \quad (12-b)$$

さて、図-4をみると、以上のような重み付けが、 Δx をかなり小さくすると同等の効果を持つことがわかる。なお、図-2および3に、 $Q = 6.0 \text{ l/sec}$ の場合について、本法を取り入れ、支配断面は石川⁸⁾の方法で決定した標準逐次計算法による不等流計算 ($\Delta x = 12.5\text{cm}$)の結果も併記している。跳水は、単に常流の計算が不能になったときに生じるとしているので、その位置は実測と一致していないが、これ以外の部分ではかなり良い適合性が得られている。

5. まとめ

本文では、まず、MacCormack schemeに基づく不等流の一収束計算モデルを構築し、実験結果との比較を通してその適合性を検証した。ついで、標準逐次計算法において、断面間隔が大きい場合でも精度の高い計算が可能な断面間平均Energy勾配の算定法を提案するとともに、その有用性を明らかにした。

【参考文献】

- 1) 崇田・清水・北條: MacCormack法を用いた不定流計算, 第45回土木学会年講, II, pp. 432-433, 1990.
- 2) 塩田・川村・中谷: 保存則系差分法のスキームの特性に関する考察, 第45回土木学会年講, II, pp. 438-439, 1990.
- 3) 岡部・芦田: 流れの遷移を伴う一次元河床変動の数値解法, 土木学会論文集, No. 434/II-16, pp. 37-45, 1991.
- 4) Garcia・Kahawita: Numerical Solution of the St. Venant Equations with the MacCormack Finite-Difference Scheme, Int. Jour. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, pp. 259-274, 1986.
- 5) 日本機械学会編: 流れの数値シミュレーション, コロナ社, 第2章, 1989.
- 6) Schlichting: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, 6th Edition, Chap. XXII, 1968.
- 7) 沢田・河村・中谷: 跳水を伴う流れの1次元河床変動計算, 第46回土木学会年講, II, pp. 632-633, 1991.
- 8) 石川・林: 常流・射流が混在する区間の不等流計算法, 土木技術資料, 25-3, pp. 39-44, 1983.

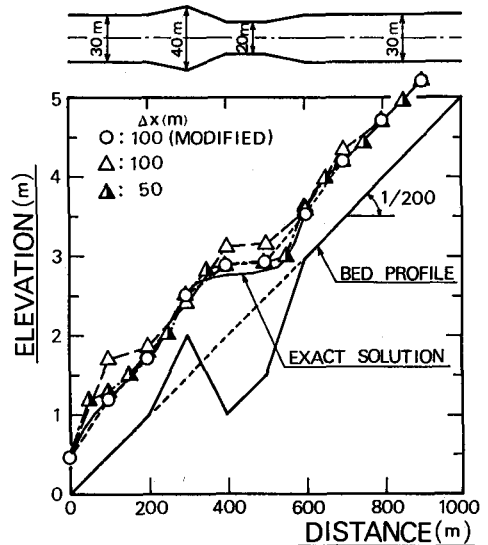


図-4 標準逐次計算法による試行計算