

ガラーキン・反復型有限要素法による洪水氾濫解析

Numerical Simulation of Inundation by Galerkin and
Iterative Type Finite Element Method

岡 太郎^{*}
by Taro Oka

A Galerkin type finite element method is presented to simulate the inundation in low-lying area. The moving boundary technique to express the flood front and the iteration to obtain the stable numerical solution are combined with the method.

The inundation in the low-lying area in Hamada city caused by the heavy rainfall of July 15, 1988, has been calculated using the presented simulation method. The peak values of flooded water level obtained from the calculated results agree well with the highest flood traces observed in the inundated area.

Keywords: inundation, numerical simulation, finite element method

1. はじめに

河川堤防の決壊・越流や内水氾濫に伴う洪水災害の危険度を的確に評価して、それらのハード・ソフト的対策を検討するためには洪水氾濫解析法の確立が必要である。これまで、この問題に対して、基礎式に浅水長波方程式を用い、それを差分法もしくは有限要素法を適用して数値的に解析する2次元モデルが用いられてきた。このうち差分法に基づくモデルは岩佐・井上・水鳥¹⁾によって提案されたのち、多くの地域に適用され²⁾、洪水氾濫対策に有益な知見を提供してきた。しかし、差分法では、特別な場合を除き解析領域や地形を大きさの等しい様格子で近似するため、格子分割は不必要な部分まで細くなる傾向にあり、計算量が増大するという難点がある。一方、有限要素モデルについては、川原らがランピング係数を導入して陽的な取扱を提案してから用いられるようになったが³⁾、洪水先端部の境界条件の取り方やモデル定数の選定などに検討すべき問題が残されていると言える。

ここでは、洪水先端部を移動境界として取り扱うとともに、解の精度と安定性を確保するために繰り返し計算を導入した有限要素モデルを提案する。次に、昭和63年山陰豪雨で大災害を被った浜田川の洪水氾濫について解析を行い、本モデルの現地への適用性を吟味する。

^{*} 正会員 農博 京都大学助教授 防災研究所
(〒611 京都府宇治市五ヶ庄 官有地)

2. 洪水氾濫解析法

2. 1 基礎方程式

洪水氾濫流の基礎式は(1)～(3)式で表される。

$$\text{連続方程式: } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (H^* u)}{\partial x} + \frac{\partial (H^* v)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{運動方程式: } \frac{\partial u}{\partial t} + u^* \frac{\partial u}{\partial x} + v^* \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + u R^* = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u^* \frac{\partial v}{\partial x} + v^* \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + v R^* = 0 \quad \dots\dots (3)$$

ここで、 H : 水深、 $H = h - \zeta$ 、 h : 基準面より水面までの高さ、 ζ : 基準面より地表面までの高さ、 u 、 v : それぞれ x 、 y 方向の平均流速、 g : 重力加速度、 C : Chezy の抵抗係数。

$$R^* = \{g(u^2 + v^2)^{1/2}\} / (C^2 H^*) \quad \dots\dots (4)$$

なお、*の記号は基礎式を線形化するために用いられる予測値を表しており、後述するようにこれらの値が収束するまで計算が繰り返される。

2. 2 Galerkin法による離散化

解析領域を三角形要素を用いて分割し、形状関数に(5)式を用いると、(1)～(3)式は(6)式のように離散化される。

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \quad \dots\dots (5)$$

$$[M] \{\dot{S}\} + [Q] \{S\} = \{F\} \quad \dots\dots (6)$$

ただし、

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & M_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ij} \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} 0 & H^*_{ik} (K^x_{ijk} + K^x_{ikj}) & H^*_{ik} (K^y_{ikj} + K^y_{ijk}) \\ g L^x_{ij} & (K^x_{ikj} u^*_k + K^y_{ikj} v^*_k + M_{ij} R^*) & 0 \\ g L^y_{ij} & 0 & (K^x_{ikj} u^*_k + K^y_{ikj} v^*_k + M_{ij} R^*) \end{bmatrix}$$

$$\dot{S} = (\dot{h}_t \quad \dot{u}_t \quad \dot{v}_t)^T, S = (h \quad u \quad v)^T, F = (0 \quad 0 \quad 0)^T, L^x_{ij} = b_j / 6, L^y_{ij} = c_j / 6$$

$$M_{ij} = \begin{cases} \Delta / 6 & (i=j) \\ \Delta / 12 & (i \neq j) \end{cases} \quad K^x_{ijk} = \begin{cases} b_k / 12 & (i=j) \\ b_k / 24 & (i \neq j) \end{cases} \quad K^y_{ijk} = \begin{cases} c_k / 12 & (i=j) \\ c_k / 24 & (i \neq j) \end{cases}$$

ここに、 $b_i = y_j - y_k$ 、 $c_i = x_k - x_j$ 、 Δ : 三角形要素の面積、 T : 転置行列。

2. 3 時間項の処理

(6)式の M において、各行の係数の和を対角項の係数、非対角項の係数を0として係数の集中化を行い、さらに修正集中係数 e を導入すると、(6)式は(7)式のように書き直される。

$$[M] \{S_{t+\Delta t}\} = [\tilde{M}] \{S_t\} - \{\theta [Q_t]\} \{S_t\} + (1-\theta) [Q_{t+\Delta t}] \{S_{t+\Delta t}\} \Delta t \quad \dots\dots (7)$$

ここに、 $\tilde{M}$: 集中化行列、 $\tilde{M} = e \bar{M} + (1-e) M$ 、 $0 < e < 1$ 。 $\theta = 1$ のとき、前進差分、 $\theta = 0$ のとき、後退差分、 $\theta = 1/2$ のとき中央差分に相当する。ここでは、次のような繰り返し計算を行って $t + \Delta t$ 時の値を得る。

(i) $\theta = 1$ として、 $S^{n+1}_{t+\Delta t}$ を得る。(ii) $\theta = 1/2$ とするとともに、 $S^n_{t+\Delta t}$ を(7)式の右辺に代入して、 $S^{n+1}_{t+\Delta t}$ を計算する。 m : 繰り返し計算の回数。(iii) (8)式を用いて収束の判定を行う。

$$|S^{n+1}_i - S^n_i| < \varepsilon \quad \dots\dots (8)$$

ε : 収束判定用の微小値。全節点で(8)式が成立しておれば、反復計算を止め、時間ステップを Δt 進め

る。もし、(8)式が成立していなければ(ii)～(iii)を繰り返す。

2. 4 境界・初期条件の導入

解析領域内の河川の上・下流端については水位・流量(流速)を与える。氾濫域と非氾濫域の境界ではそれを横切る流れは存在しない。すなわち、(9)式が成り立っていないといけない。

$$u \cdot l_x + v \cdot l_y = 0 \qquad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 l_x 、 l_y ：境界に外向きに立てた法線の方角余弦である。この境界条件の導入法については文献[4]に詳しく説明されているので、ここでは省略する。

洪水の先端は洪水の消長に伴って移動するため、移動境界として取り扱う必要がある。これまで、この境界については、差分・FEMモデルとも、氾濫水深があらかじめ与えられている微小値以上になるまでは線流量($Q_x = uH$ 、 $Q_y = vH$)を0として取り扱われてきた⁵⁾。しかし、この場合には氾濫水の連続性に問題があると言われている⁶⁾。したがって、ここでは洪水先端の位置を次のようにして決めた後、その位置に(9)式を適用する方法を採用している。

まず、各要素において3節点の水深がいずれも正である場合には、その要素には洪水が到達しているので解析領域に含め、3節点のうち1節点でも水深が0の場合には洪水が未着であるとみなし解析対象外とする。

例えば、図-1では、①～④の要素が洪水が未到達の要素であり、⑤～⑧が洪水が到達している要素である。したがって、節点5と6の間で(9)式が適用される。なお、節点5と6の水位が節点3・4の地盤標高より高くなったときには要素③・④を解析領域に含めた後、(9)式を節点3・4間に適用する。ここで、洪水先端部が移動した場合には、その周辺の h 、 u 、 v の値が影響を受けるのでこれらの値が収束するまで前述の繰り返し計算を行う。

初期条件として、河道の節点に計算開始時の水深と流速を与え、氾濫域についてはこれらを0とする。

3. 浜田川下流域の洪水氾濫解析

3. 1 解析領域

島根県西部は、1983年に続き1988年にも集中豪雨に見舞われ、甚大な洪水災害を被った。ここでは、1988年7月15日の浜田市街地の洪水氾濫について解析を行う。

浜田市街地は、浜田川(流域面積：61.4km²、主河道長：18km、2級河川)がほぼ中央を東から西に貫流しており、浜田川へは右岸域より浅井川・高佐川、左岸域より竹迫川・今井迫川などが合流している(図-2)。なおこの浜田川の上流域

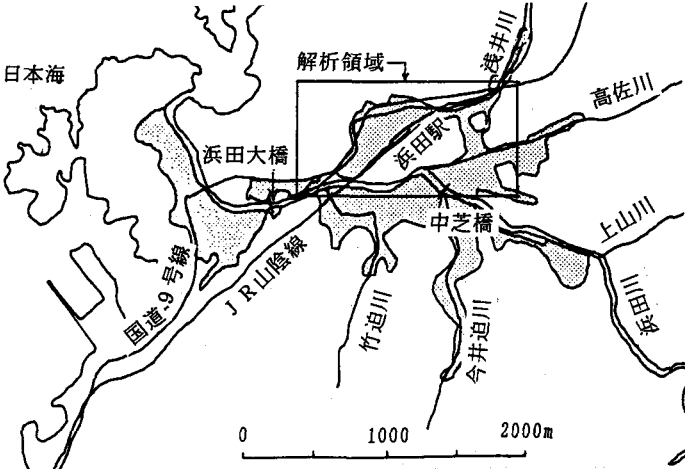


図-2 浜田川下流域の概要

(浜田ダム流域)を中心として、1988年7月15日0～12時に総雨量400mm、雨量強度100mm/hrを越え

る集中豪雨が発生し、その下流にある浜田市の市街地の大部分（図-2の影の部分）が浸水した。ここでは、氾濫規模が最大である浅井川・高佐川の下流域を対象として洪水氾濫解析を行うことにする。

図-3・4は解析領域の要素分割図と地盤等高線図である。図-3に示されて

いるように、浜田川については

横断方向に3要素、浅井川・高佐川については1要素で、また縦断方向については約20mで分割した。この場合の要素数は2322、節点数は1338、最小辺長は7.5m（高佐川の上流部）である。

3.2 境界条件と定数

解析領域に含まれる浜田川の上・下流端及び浅井川

・高佐川の上流端には、境界条件として水位・流量（流速）

を与える必要がある。ここでは洪水流量を kinematic runoff model を用いて算出した後⁷⁾（図-5）、これらの流量を等流公式を用いて作成されたH～Q曲線を用いて水位に変換し境界条件とした。

洪水氾濫解析のモデル定数、とくにC・e・εの最適値はまだよく分かっていないので、ここでは現象を再現するように試算を行って決定した。最終的には、C=40（河道）、30（氾濫域）、e=0.8、ε=0.0001m（水深）、0.0001m/sec（流速）、Δt=0.5secを用いた。

3.3 計算結果と洪水氾濫特性

7月15日3～16時の13時間について行った計算結果より、洪水氾濫がピークであったとみなせる15日6時の流速ベクトルと水深分布を図-6に示す。同図より、浜田川及び浅井川・高佐川の流速は2～3m/secであるが、氾濫域内では数10cm/sec、場所によっては10cm/sec以下であり、浜田川右岸では洪水流による家屋の倒壊・流失などの被害はほとんど発生しておらず、浸水によるものが主であったことが裏付けられる。また、高佐川の氾濫水の一部が浅井川流域に流入したと言われているが、計算結果

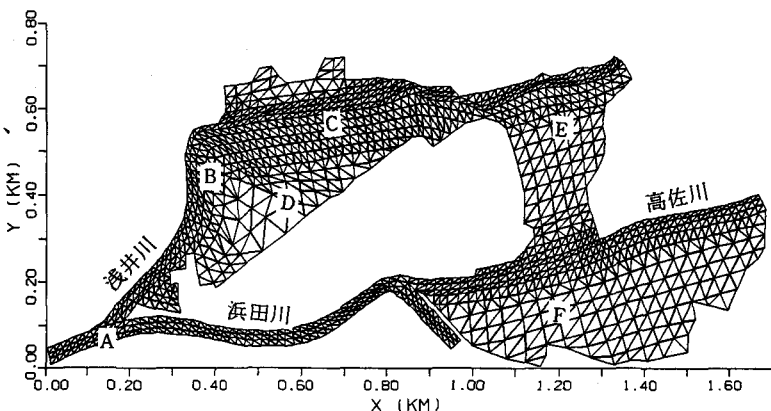


図-3 要素分割図

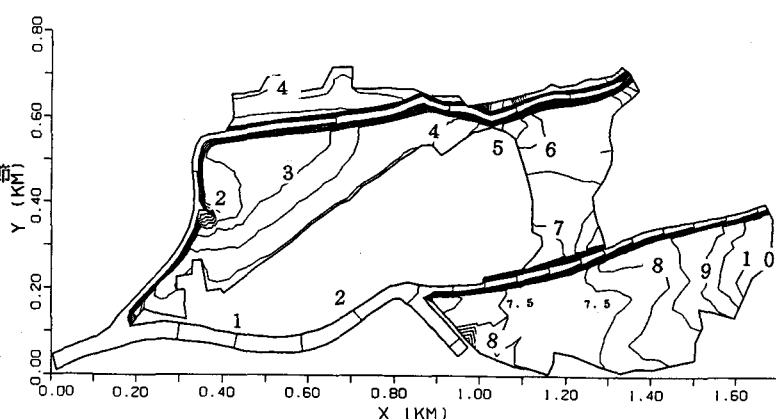


図-4 地盤等高線図

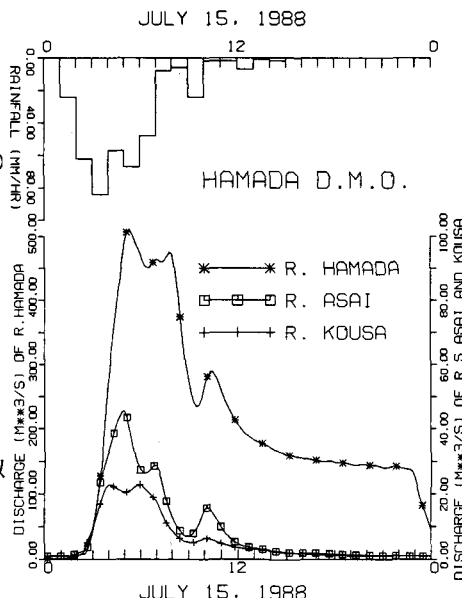


図-5 浜田川・浅井川・高佐川の流量

はこの現象をうまく表している。

図-7は、洪水初期（7月5日4時）、ピーク時（6時）、後期（8時と9時）の氾濫水深分布である。これらの図より、氾濫は3時30分頃浅井川、4時頃高佐川沿いで始まるとともに、洪水初期に、すでに高佐川より浅井川流域への流入があったことが明らかになる。

ピーク時（6時）の氾濫水深分布より、浅井川沿いの氾濫水深は最大1.5m、高佐川沿いでは1m以下であり、浅井川沿いの低地部で被害が甚大であったことが分かる。また8時には、浅井川・高佐川の出水が峠を超し、それらの上流部で氾濫域は縮小し始め、その後、9時になると水は急に引き、最低地部のみ残水が認められる程度である。

図-8は、図-3に併示してあるA～F地点の水位変化である。この図より、洪水氾濫は3時頃より始まり、5～6時頃にピークに達し、降雨の終了とともに減少を始め、12時にはほとんど全域から水が引いたことが分かる。

以上の結果より、浜田川右岸の洪水氾濫は、浜田川の水位上昇に伴って、市街地を流下する中小河川の排水機能が奪われ、内水が氾濫したものであると結論付けられる。

4. おわりに

計算結果は浜田川右岸の洪水氾濫過程をかなりうまく再現した。洪水氾濫解析に移動境界条件と繰返し計算の導入が有用であるといえる。今後、修正集中係数、要素分割の精粗、打ち切り誤差、洪水先端部の位置

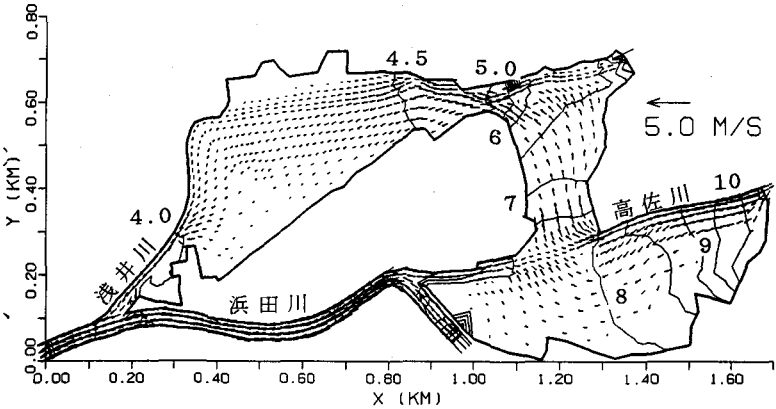


図-6 流速ベクトルと氾濫水深（7月5日6時）

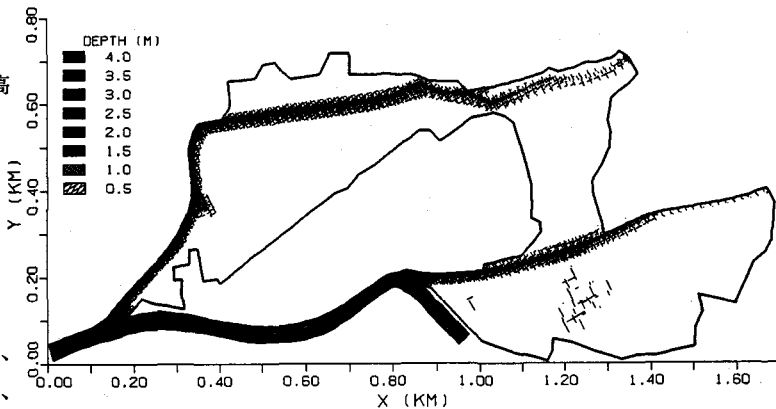


図-7 (a) 初期の氾濫水深（7月5日4時）

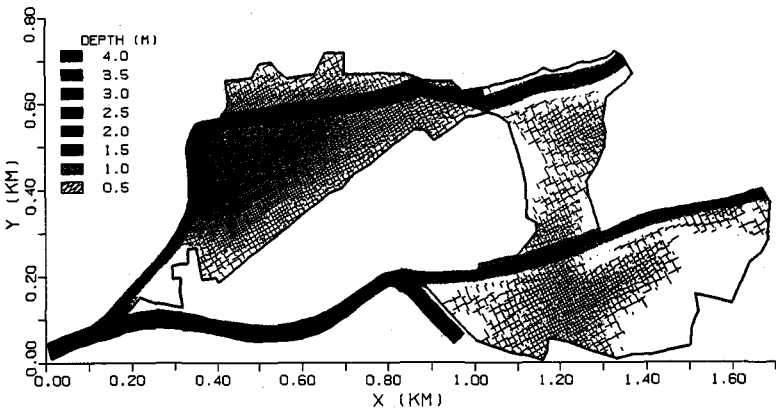


図-7 (b) ピーク時の氾濫水深（7月5日6時）

決めの簡易法と計算精度との関係を明らかにして、計算量の軽減を計り、実用性を高めていく必要がある。なお、本解析に要したCPU時間は、NEWS-3460 (17MIPS、2.3MFLOPS) を用いた場合約13時間、HP9000-720 (57MIPS、55.5SPECmark) で3時間11分であった。本研究は、平成2～3年度文部省科学研究費(重点領域研究(1)(自然災害)研究代表 服部 昌太郎 教授(中央大学)による研究成果の一部であることを付記する。

参考文献

- 1) 岩佐 義朗・井上 和也・水鳥 雅文：氾濫水の水利の数値解析法、京都大学防災研究所年報第23号 B-2、pp.305-317, 1980.
- 2) 例えば、高橋 保・大久保 賢治・中川 一：昭和57年長崎豪雨における中島川の洪水氾濫解析、京都大学防災研究所年報第26号 B-2、pp.109-126, 1983.
- 3) 例えば、川原 睦人・竹内 則雄・首藤 信夫：2段階ラックス・ウェンドロフ有限要素法による潮汐解析、第23回海岸工学講演会論文集、pp.498-501, 1976.
- 4) 吉田 裕・川原 睦人：有限要素法、新体系土木工学3、技報堂、pp.223-224, 1983.
- 5) 梅津 剛・川原 睦人：水際移動境界を考慮した洪水氾濫流れの有限要素法解析、第2回計算力学シンポジウム、pp.133-140, 1989.
- 6) 井上 和也：開水路非定常流の数値計算法とその水工学への応用に関する研究、京都大学博士学位論文、p.237, 1986.
- 7) 岡太郎・今尾昭夫・田中礼次郎・福島晟：浜田川・下府川・敬川の出水・氾濫特性、文部省科学研究費突発災害調査研究報告書、1988年7月島根・広島豪雨災害の調査研究、pp.69-85, 1989.

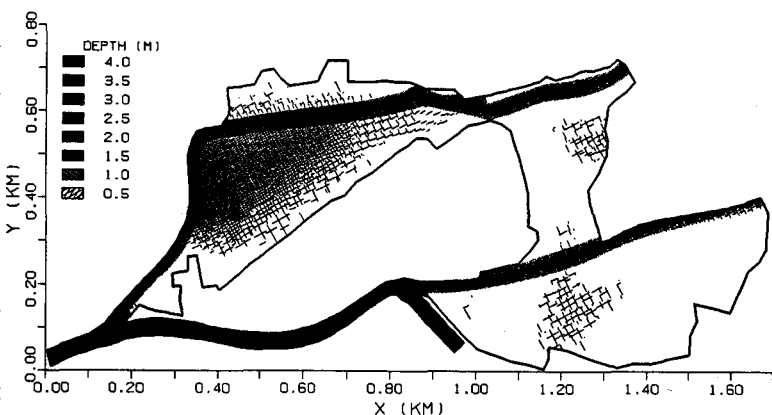


図-7(c) 後期の氾濫水深(7月5日8時)

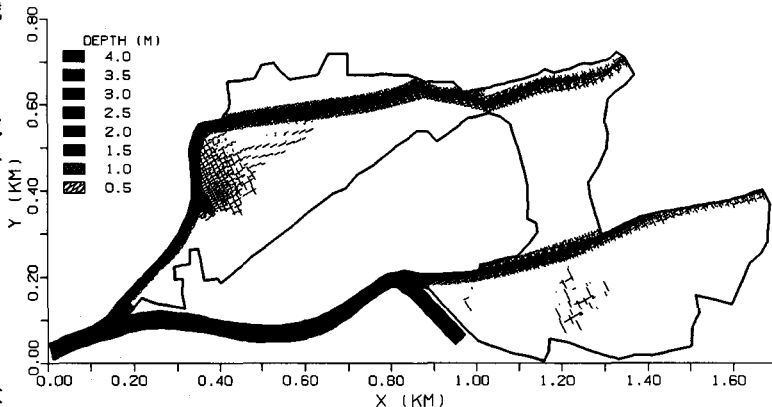


図-7(d) 後期の氾濫水深(7月5日9時)

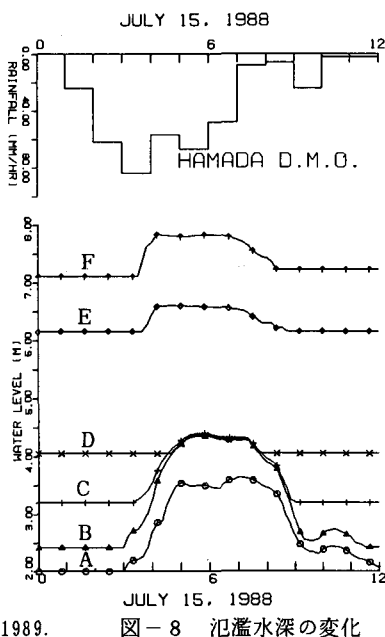


図-8 氾濫水深の変化