

開水路網における洪水流の数値解析法の比較

Comparison of Numerical Analysis for Flood Flows
in Open Channel Networks

金本 満*・常松芳昭**・金丸昭治***

By Mitsuru KANEMOTO, Yoshiaki TSUNEMATSU and Akiharu KANAMARU

The matrix analysis of flood flows in open channel networks is introduced. Two methods, i.e., the characteristic method and the 4-point implicit method, are used to discretize the primary equations. Computed values by characteristic method are compared with ones of 4-point implicit method and together with observed values. Computed values by two methods are nearly agreed with observed values. It is confirmed that the solutions by characteristic method have a little instability under the condition of steep water profiles.

Keywords: flood flow, channel network, characteristic method, 4-point implicit method

1. まえがき

デルタ地帯などの低平地を流れる河川は、多くの場合、分・合流を伴い複雑な河川網を形成している。わが国においてはこのような低平地に人口や資産が過度に集中しており、単に基本(計画)高水のみにとどまらず、超過洪水の対策も重要であると考えられる。そのためには、低平地部の河川網の水理現象を的確に把握することが重要である。著者らはこのような視点に立脚し、低平地河川網の非定常流解析手法の検討を行ってきた。本論は従来提案してきた2つの手法についてその有効性を確かめるために、太田川の感潮河川網を例にして数値計算を行い、その結果に基づいてそれぞれの方法の比較検討を行ったものである。

2. 解析方法

2・1 基礎方程式と離散化方法

本論文では、広幅水路に対する漸変非定常流の基礎方程式として、流量と水位を未知量とする連続方程式および運動方程式を用いる¹⁾。

* 正会員 工修 中電技術コンサルタント株式会社 土木第一本部 河川計画部
(〒734 広島市南区出汐2-3-30)

** 正会員 工博 広島大学助教授 工学部地域環境工学

*** 正会員 工博 広島大学教授 工学部地域環境工学

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{q}{gA^2} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{qB}{gA^3} \frac{\partial z}{\partial t} + (1-F^2) \frac{\partial z}{\partial x} = s_0 F^2 - s_f \quad (2)$$

ここに、 t は時間、 x は下流方向に測った距離、 q は流量、 z は水位、 A は流水断面積、 B は水面幅、 g は重力加速度、 F はフルード数、 s_0 は河床勾配、 s_f は摩擦勾配である。

これらの方程式の離散化に当たっては、特性曲線法によって得られた特性方程式を空間方向にはGalerkin法、時間方向には後退差分法を用いて離散化する方法²⁾、および、Preissmannの4点陰形式差分法を用いて基礎方程式を直接離散化する方法³⁾を用いた。

2・2 内部方程式の行列表示

本節においては、前述の離散化方法により得られた内部点（単一水路の上・下流端以外の断面）における行列表示式を示す。なお、開水路網は n 個の節点と e 本の枝を有し、 i 枝は N 個の断面に分割されており、開水路網内の総断面数を M 個とする。

(a) 特性曲線法による表示

特性曲線法によって得られた特性方程式を空間方向にはGalerkin法、時間方向には後退差分法を用いて離散化した結果は単一水路について次のように行列表示できる⁴⁾。

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ A_3 & A & A_4 \\ 0 & A_5 & A_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B \\ B_N \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $A_1(1,2)$ 、 $A_2(1,2N-4)$ 、 $A_3(2N-4,2)$ 、 $A(2N-4,2N-4)$ 、 $A_4(2N-4,2)$ 、 $A_5(1,2N-4)$ 、 $A_6(1,2)$ は単一水路に対する差分方程式の係数を成分とする部分行列、 $X_1(2)$ 、 $X(2N-4)$ 、 $X_N(2)$ はそれぞれ上流端、内部点、下流端の未知量（流量・水位）を成分とする部分ベクトル、 $B_1(1)$ 、 $B(2N-4)$ 、 $B_N(1)$ はそれぞれ上流端、内部点、下流端に関する特性方程式の定数項を成分とする部分ベクトルである。

ここで、部分行列 A は $2N-4$ 行 $2N-4$ 列の非特異行列であり、式(3)を展開すると内部点の未知量は、式(4)のようになる。

$$X = A^{-1} (B - A_3 X_1 - A_4 X_N) \quad (4)$$

式(4)を式(3)に代入し、外部点（単一水路の上・下流端の断面）に関する成分のみで行列表示すれば、式(5)のようになる。

$$\begin{bmatrix} A_1 - A_2 A^{-1} A_3 & -A_2 A^{-1} A_4 \\ -A_5 A^{-1} A_3 & A_6 - A_5 A^{-1} A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 - A_2 A^{-1} B \\ B_N - A_5 A^{-1} B \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(5)の左辺係数行列は2行4列であり、これらを成分で表示すれば、次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ q_1 \\ h_N \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

ただし、 $C_{11} \sim C_{24}$ は式(5)の左辺係数行列を成分表示したもの、 h_1 、 h_N は枝上・下流端の水位、 q_1 、

q_N は枝上・下流端の流量である。

さらに、 e 本の枝で構成される開水路網に適用できるように、式(6)を重ね合わせると式(7)のように書ける。

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + \\ \mathbf{h} \\ + \\ \mathbf{q} \\ - \\ \mathbf{h} \\ + \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし、 $C_1(2e, e) \sim C_4(2e, e)$ は各枝の $C_{11}, C_{21} \sim C_{14}, C_{24}$ を成分とする部分行列、 $\mathbf{h}^+(e), \mathbf{h}^-(e)$ は各枝上・下流端の水位を成分とする部分ベクトル、 $\mathbf{q}^+(e), \mathbf{q}^-(e)$ は各枝上・下流端の流量を成分とする部分ベクトル、 $\mathbf{G}(e)$ は各枝の $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_N$ を成分とするベクトルである。

(b) 4点陰形式差分法による表示

4点陰形式差分法を用いて離散化した場合も同様に単一水路の内部点に関する差分方程式が行列表示できるが、これらはNewton-Raphson法を用いて解く場合、次のように書ける⁵⁾。

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & U_{41} & U_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta q_1 \\ \Delta \mathbf{x} \\ \Delta h_N \\ \Delta q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、 $U_{11}(2, 1), U_{12}(2, 1), U_2(2, 2N-4), U(2N-6, 2N-4), U_3(2, 2N-4), U_{41}(2, 1), U_{42}(2, 1)$ は単一水路に対する差分方程式の偏微係数を成分とする部分行列、 h_1, h_N は枝上・下流端の水位、 q_1, q_N は枝上・下流端の流量、 $\mathbf{x}(2N-4)$ は内部点の未知量(水位・流量)を成分とする部分ベクトル、 $\mathbf{B}_1(2), \mathbf{B}(2N-6), \mathbf{B}_{N-1}(2)$ は差分方程式に未知量の仮定値を代入したときの残差量を成分とする部分ベクトルである。また、 Δ はNewton-Raphson法における反復計算過程の修正量を表す。

これらを e 本の枝で構成される開水路網に適用できるように式(8)を重ね合わせると式(9)のようになる。

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & V_{41} & V_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + \\ \Delta \mathbf{h} \\ + \\ \Delta \mathbf{q} \\ - \\ \Delta \mathbf{h} \\ + \\ \Delta \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{G}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし、 $V_{11}(2e, e), V_{12}(2e, e), V_2(2e, 2M-4n), V(2M-6n, 2M-4n), V_3(2e, 2M-4n), V_{41}(2e, e), V_{42}(2e, e)$ は各枝の $U_{11} \sim U_{42}$ を成分とする部分ベクトル、 $\mathbf{h}^+(e), \mathbf{h}^-(e)$ は枝上・下流端の水位を成分とする部分ベクトル、 $\mathbf{q}^+(e), \mathbf{q}^-(e)$ は各枝上・下流端の流量を成分とする部分ベクトル、 $\mathbf{X}(2M-4n)$ は各枝の内部点の未知量を成分とする部分ベクトル、 $\mathbf{G}_1(2e), \mathbf{G}(2M-4n), \mathbf{G}_{N-1}(2e)$ は各枝の $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}, \mathbf{B}_{N-1}$ を成分とする部分ベクトルである。

2・3 外部方程式の行列表示

ここでは、単一水路の上・下流端に存在する境界条件および連続条件の導入を行う。開水路網の水理計算を行うには、ソース、シンクに対する境界条件式および中間ノードに対する連続条件式が必要である。そこで、システム外部から n 個の節点に流入する流量および節点上で定義される水位を次のような n 次元の列ベクトルで表す。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

任意の節点から流出する枝流量からその節点に流入する枝流量を引いた正味の流出流量は、システム外部からその節点に流入する流量に等しくなければならない。このような各節点に対する流量連続の条件はまとめて次のように表される。

$$\overset{+}{D} \overset{+}{q} - \overset{-}{D} \overset{-}{q} = \mathbf{Q} \quad (11)$$

ただし、 $\overset{+}{D}$ は出連結行列、 $\overset{-}{D}$ は入連結行列である。

ここで、以後の展開に便利のように、節点で定義される水位、流量および入・出連結行列をソース、中間ノード、シンクに関する部分ベクトルおよび部分行列に分割して次のように表示する。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_+ \\ H_0 \\ H_- \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_+ \\ Q_0 \\ Q_- \end{bmatrix}, \quad \overset{+}{D} = \begin{bmatrix} \overset{+}{D}_+ \\ \overset{+}{D}_0 \\ \overset{+}{D}_- \end{bmatrix}, \quad \overset{-}{D} = \begin{bmatrix} \overset{-}{D}_+ \\ \overset{-}{D}_0 \\ \overset{-}{D}_- \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし、下付添字については、 $+$ はソース、 0 は中間ノード、 $-$ はシンクに関する成分を表す。

各節点の特性を考慮し、式 (12) を式 (11) に代入すると、

$$\text{ソース: } \overset{+}{D}_+ \overset{+}{q} = \mathbf{Q}_+ \quad (13)$$

$$\text{中間ノード: } \overset{+}{D}_0 \overset{+}{q} - \overset{-}{D}_0 \overset{-}{q} = \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\text{シンク: } -\overset{-}{D}_- \overset{-}{q} = \mathbf{Q}_- \quad (15)$$

となる。

さらに、ソースとシンクの境界条件として、それぞれ流量および水位のハイドログラフが与えられるとして、これを時間の関数として次のように表示する。

$$\mathbf{Q}_+ = \mathbf{F}(t) \quad (16)$$

$$H_- = f(t) \quad (17)$$

ここで、式 (16) を式 (13) に代入するとソースの境界条件として、

$$\overset{+}{D}_+ \overset{+}{q} = \mathbf{F}(t) \quad (18)$$

が得られる。また、シンクの境界条件としては式 (15)、式 (17) の 2 つが存在するが、式 (17) と内部方程式からシンクにおける流量は自動的に計算されるため、式 (17) をシンクの境界条件式として使用する。

さらに、中間ノードにおける水位連続の条件であるが、これは次節に示すように、枝上・下流端の水位を節点で定義される水位に変換することにより導入される。

2・4 行列解法

枝上・下流端の水位 $\bar{h}$, $\bar{h}$ と節点で定義された水位 H とは入・出連結行列を用いると次のような関係がある。ただし, T は転置を表す。

$$\bar{h}^+ = D^+ T H, \quad \bar{h}^- = D^- T H \quad (19)$$

ここでは, 式 (19) の関係を用いて, 節点上で定義された水位を用いることによって, 水位連続の条件を導入する。

(a) 特性曲線法による場合の行列解法

式 (7) を展開し式 (19) を代入すると,

$$(C_1 D^+ T + C_3 D^- T) H + C_2 \bar{q}^+ + C_4 \bar{q}^- = G \quad (20)$$

となる。さらに, 式 (12) により節点水位をソース, 中間ノード, シンクに関する部分ベクトルに分割すると, 式 (21) が得られる。

$$C_1 D^+ T H_+ + (C_1 D_0^+ T + C_3 D_0^- T) H_0 + C_3 D^- T H_- + C_2 \bar{q}^+ + C_4 \bar{q}^- = G \quad (21)$$

したがって, 式 (14), (17), (18), (21) をまとめて行列表示すれば, 式 (22) のようになる。ただし, E は単位行列である。

$$\begin{bmatrix} C_1 D^+ T & C_1 D_0^+ T + C_3 D_0^- T & C_3 D^- T & C_2 & C_4 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_0^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_0^- & -D_0^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_+ \\ H_0 \\ H_- \\ \bar{q}^+ \\ \bar{q}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ f \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

以上より, 式 (22) および式 (19) から枝上・下流端の水位・流量が求まり, これらを各枝で成立する式 (4) に代入すれば開水路網内のすべての未知量を求めることができる。

(b) 4点陰形式差分法による場合の行列解法

特性曲線法と同様の考え方に基づいて式 (9) を展開し式 (19) を代入すると, 式 (23) ~ (25) のようになる。

$$V_{11} D^+ T \Delta H + V_{12} \Delta \bar{q}^+ + V_2 \Delta X = B_1 \quad (23)$$

$$V \Delta X = B \quad (24)$$

$$V_3 \Delta X + V_{41} D^- T \Delta H + V_{42} \Delta \bar{q}^- = B_{N-1} \quad (25)$$

さらに, 式 (23), (25) に含まれる節点水位を式 (12) を用いてソース, 中間ノード, シンクに関する部分ベクトルに分割すると, 式 (26), (27) のようになる。

$$V_{11} D^+ T \Delta H_+ + V_{11} D_0^+ T \Delta H_0 + V_{12} \Delta \bar{q}^+ + V_2 \Delta X = B_1 \quad (26)$$

$$V_3 \Delta X + V_{41} D_0^- T \Delta H_0 + V_{41} D^- T \Delta H_- + V_{42} \Delta \bar{q}^- = B_{N-1} \quad (27)$$

また, 境界条件式であるが, 式 (16), (17) をNewton-Raphson法に適用できるように, 次のようにおく。

$$F_+ = D^+ \bar{q} - F(t) \quad (28)$$

$$F_- = H_- - f(t) \quad (29)$$

式 (28), (29) を近似値まわりにTaylor展開して, 式 (14), (24), (26), (27) とともに行列表示すれば, 式 (30) のようになる。

$$\begin{bmatrix} V_{11}D_+^T & V_{11}D_0^T & 0 & V_{12} & 0 & V_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V \\ 0 & V_{41}D_0^T & V_{41}D_-^T & 0 & V_{42} & V_3 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_0 & -D_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_+ \\ \Delta H_0 \\ \Delta H_- \\ \Delta q_+ \\ \Delta q_- \\ \Delta X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B \\ B_{N-1} \\ F_- \\ F_+ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

式(30)を解いて開水路網内の未知量を一度に求めることができるが、式(22)と比べて係数行列はより大規模化している。

なお、式(22)、(30)を解く場合、大規模疎行列の特性を利用し、Guptaらが提案した連立一次方程式の解析法⁹⁾を用いることとした。

3. 数値計算例

本論で提示した解析手法の有効性を比較するために、広島デルタを流れる太田川の河川網を例に洪水流計算を行った。

3・1 対象開水路網

一級河川太田川は図-1に示すように大芝水門、祇園水門により太田川放水路および太田川本川に分派されている。さらに太田川本川は5つの派川に分派しており、典型的な低平地河川網を形成している。このうち、大芝水門より下流部の河川網を計算の対象とした。なお、図-1に示すようにNo.1～No.4の地点において水位観測が行われている。

図-1において大芝水門をソースに、広島湾をシンクに、分流点を中間ノードとしてグラフ表示したものが図-2である。

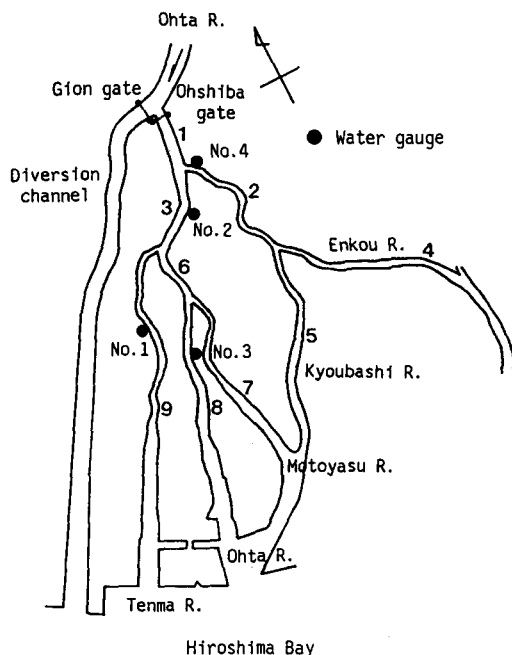


図-1 太田川河川網

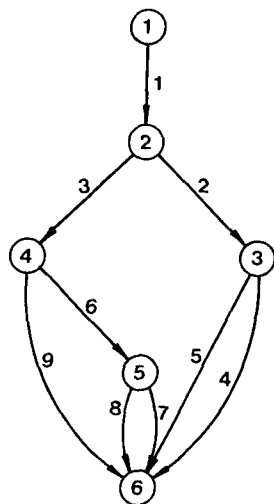


図-2 太田川河川網のグラフ表示

3・2 計算条件

(a) 対象洪水

解析の対象とした洪水はピーク流入量発生時刻と干潮時が一致する1980年8月31日洪水である。境界条件として使用したソースの流量ハイドログラフとシンクの水位（潮位）ハイドログラフを図-3に示す。なお、ソースに与える流量のハイドログラフについては、放水路と太田川本川との正確な分派流量が不明のため上流矢口第一測水所の流量から推定した。

(b) 初期条件

初期条件としては、解析対象時間よりも潮位変動の約1波長前の流量・水位を用いて定常計算を行いその結果得られた開水路網内の水位・流量を用いて12時間の助走計算を行い、その結果を初期条件とした。

(c) その他の計算条件

その他の計算条件として、粗度係数については、従来行われている結果⁷⁾をもとに $n=0.025$ とした。また、時間ステップについては60秒とした。4点陰形式差分法で用いられる重み係数は、0.60, 0.80, 1.00の3ケースについて計算を行ったところ、解析対象とした洪水においては時間ステップのとり方にかかわらず同程度の計算結果が得られたので、重み係数として0.80を採用した。

3・3 計算結果および考察

図-1に示したようにNo.1～No.4の地点で水位観測が行われているが、いずれの地点も同程度の再現性が得られたので、例としてNo.2およびNo.4の水位ハイドログラフを図-4に示す。これらの図からNo.2地点では立ち上がり部（6～12時間）、減衰部（16～22時間）に20～30cm程度の誤差があるもののピーク付近の再現性は良好である。一方、No.4地点では全体的に再現性はほぼ良好であるが、ピーク付近の再現性がNo.2地点に比較して劣っていることがわかる。このような差異は解析手法の是非よりもむしろ、ソースに与えた流量ハイドログラフならびに粗度係数の精度に大きく

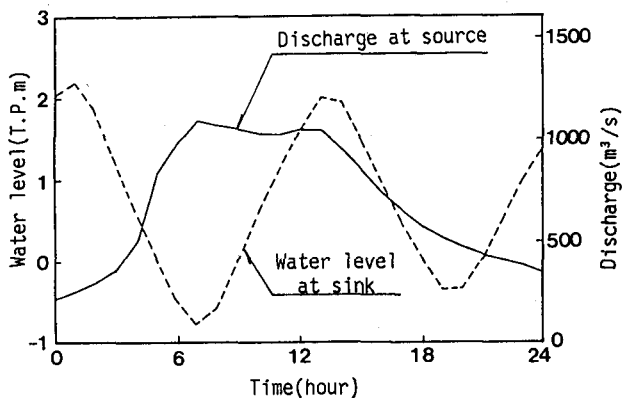


図-3 境界条件

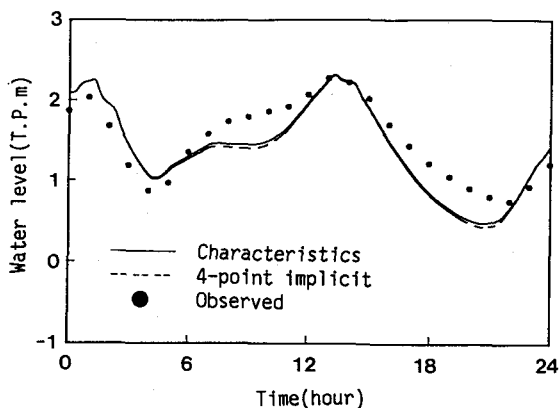


図-4(1) No.2地点の水位ハイドログラフ

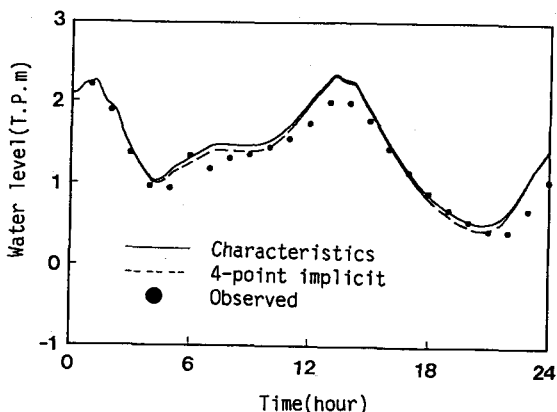


図-4(2) No.4地点の水位ハイドログラフ

依存しているものと考えられる。しかし、両手法とも再現性はほぼ良好であり、安定した解が得られている。ただし、両地点とも水位の低い部分において、特性曲線法の方が若干大きくなっている。このことを詳細に調べるためにNo.4地点を含む太田川本川（枝1→3→6→8）の水面形を示したものが図-5である。この図からわかるように、特性曲線法を用いた結果は水面勾配が大きいときに縦断方向に若干の振動を起こしている。このようになる理由として、もともと特性方程式の離散

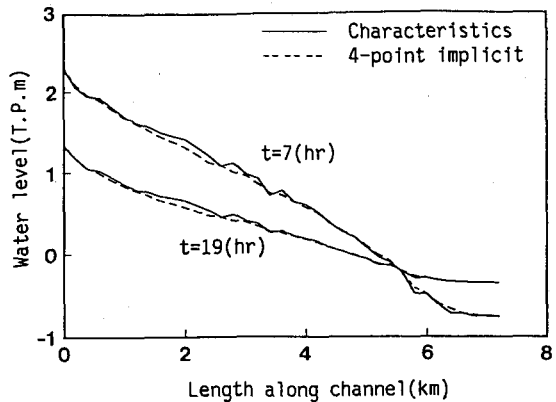


図-5 太田川本川の水面形

表示に当たっては、線形近似化方程式を用いていること、非斉次項となる摩擦項を陽的に計算していること⁸⁾などがあげられる。これらは、時間方向には安定しており、時間的な安定性は保持されているものと考えられるが、この点については今後詳細な検討が必要である。

なお、本計算はパーソナルコンピュータ（32ビット、数値データプロセッサ付き）を用いて行ったが、24時間の非定常流計算に対する演算処理時間は、特性曲線法を用いた場合には5時間、4点陰形式差分法を用いた場合には6時間を要した。

4. おわりに

本論では数値シミュレーション結果を通して著者らが従来提案してきた2つの開水路網非定常流の解析方法の比較を行った。実務レベルにおいては、経済性等の面から汎用コンピュータよりもEWS、パソコンを用いた解析が現実的と考えられる。したがって、今後はこのような立場で本解析手法を用いる場合、計算時間、記憶容量にとって支配的となる逆行列演算を含めた連立一次方程式の解法について詳細な検討が必要である。なお、本解析を進めるに当たり、建設省太田川工事事務所、広島県河川課より貴重な資料を提供していただいた。ここに記して感謝の意を表す次第である。

参 考 文 献

- 1) 土木学会編：水理公式集，昭和46年改訂版，pp.192～193，1976.
- 2) 金本 満・常松芳昭：グラフ理論による河川網不定流の水理解析，土木学会論文集，No.429/Ⅱ-15，pp.67～75，1991.
- 3) 金本 満・常松芳昭：陰形式差分法を用いた開水路網の洪水流解析法，第45回土木学会年次学術講演会講演概要集，第2部門，pp.576～577，1990.
- 4) 前出2).
- 5) 金本 満，常松芳昭・金丸昭治・三島隆明：陰形式差分法を用いた開水路網非定常流の行列解析法，広島大学工学部研究報告，第40巻，第1号，pp.65～72，1991.
- 6) Gupta, S. K. and K. K. Tanji : Computer program for solution of large, sparse, unsymmetric systems of linear equations, Int. J. Num. Methods Eng., Vol.11, No.8, pp.1251～1259, 1977.
- 7) 前出2).
- 8) 常松芳昭・金本 満：開水路網非定常流の行列解析，広島大学工学部研究報告，第38巻，第1号，pp.95～103，1989.