

壁面せん断力に基づく流速分布の算定

Velocity Distribution Calculated from Boundary Shearing Stress

高松 諭*・吉川 秀夫**

By Satoshi TAKAMATSU and Hideo KIKKAWA

The velocity and the shearing stress distributions in an open channel are of importance in order to design revetments or groins. In this paper, the interrelation between the velocity and the shearing stress in the various forms of cross-section is investigated with the trial calculation which is based on the assumptions obtained from the experimental results. The appropriate calculation method can be found for the practical use.

Keywords : velocity distribution, shearing stress, rectangular section, trapezoid section

1. はじめに

流路形状、河床変動、局所洗掘などの河道維持上の問題は、非常に重要な課題である。これらの問題を扱う際には、河床ならびに側壁のせん断力の分布および二次流の構造を考慮に入れる必要があると考えられる。また、流砂現象、特に掃流砂についても、河床のせん断力の算定が不可欠であろう。河床ならびに側壁のせん断力分布は、流れの内部構造と対応しており、せん断力を算定するためには水深やエネルギー勾配を知るだけでなく、断面内部の流速分布を知ることが重要であると考えられる。

本研究の目的は、様々な断面形状を有する、開水路の壁面せん断力分布の算定であるが、本報告では、まずその第一段階として、実測された壁面せん断力をもとにして、断面内の流速分布の算定を試みた。流速の計算は、実際に測定を行った長方形断面のほか、富永らによって測定された長方形断面¹⁾および台形断面²⁾についても行い、実測された流速分布と比較しその妥当性を検討した。

* 学生員 早稲田大学大学院 理工学研究科修士課程建設工学専攻
(〒169 東京都新宿区大久保3-4-1)

** 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科
(〒169 東京都新宿区大久保3-4-1)

2. レイノルズ応力および渦度に関する実験結果とその考察

流速分布の算定の前に、まず実験結果についていくつかの検討をした。なお、本報告で用いる座標系であるが図-1のように長方形断面、台形断面ともに主流方向をx軸、水路横断方向をy軸、鉛直方向をz軸とし、原点はいずれも底面と側壁の交点とする。また台形断面については、側壁に沿ってs軸、側壁に垂直な方向にr軸をとるものとする。

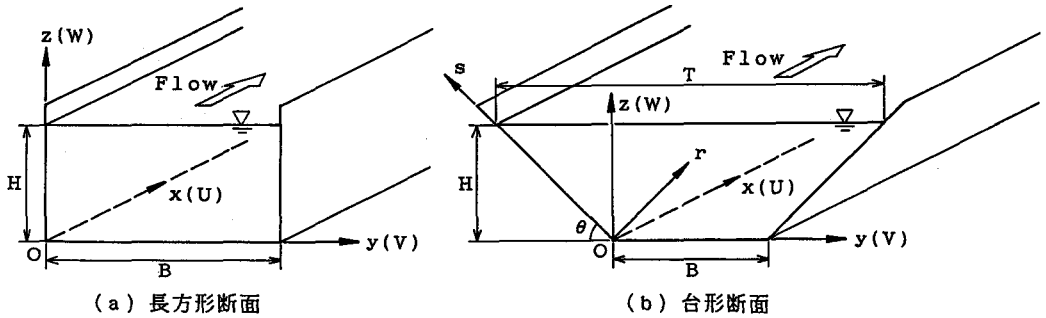


図-1 座標系

流れについては直線等流状態と仮定し、また二次流の大きさの最大値は概ね最大主流速 $U_{\max}$ の 0.02 倍程度である。長方形断面について測定された合レイノルズ応力 τ/ρ および合渦度 ω の分布の一例をそれぞれ図-2と図-3に示す。ここに、合レイノルズ応力 τ/ρ および合渦度 ω は次式のように定義する。

$$\tau/\rho = \sqrt{(-\overline{U'V'})^2 + (-\overline{U'W'})^2} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2} \approx \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \quad (2)$$

図-2によると、合レイノルズ応力の等値線は底面および側壁にほぼ平行になっている。運動量輸送はレイノルズ応力の等値線に垂直方向に行われるので、壁面に対してはほぼ垂直な方向になされているといえるであろう。一方図-3によれば、合渦度も壁面にほぼ平行になっており、渦度の伝達も壁面にほぼ垂直な方向に行われているといえる。したがって、合レイノルズ応力分布と合渦度分布とが、比較的似たような分布形状をしているということは言い換えれば、運動量輸送と渦度伝達とがほぼ同方向に行われていることを示しているものと判断し、運動量の輸送にかわって渦度の伝達によって、断面内の速度勾配を決定できるものと考えてよいであろう。

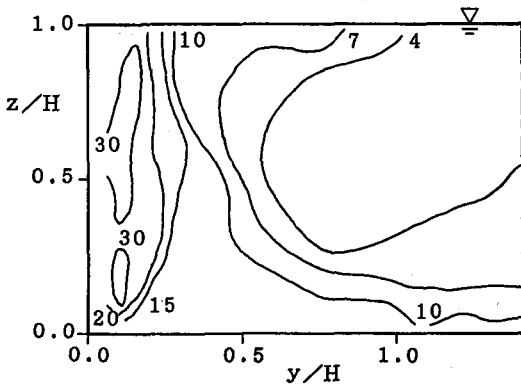


図-2 合レイノルズ応力分布(長方形断面)
[cm^2/sec^2]

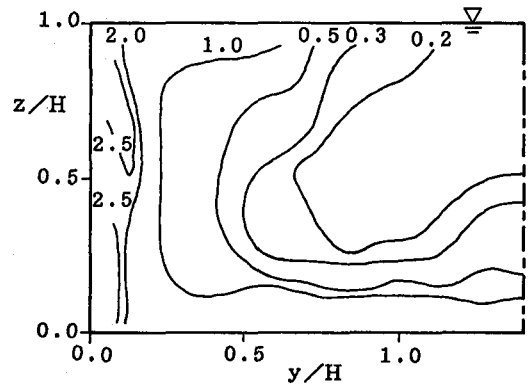


図-3 合渦度分布(長方形断面)
[1/sec]

3. 長方形断面における流速分布の計算法

3. 1 セン断力分布の形状と速度勾配

断面内のせん断力を壁面せん断力 τ_0 に等しいとすれば、すなわち $\tau = \tau_0 = \text{const}$ が成り立つものと仮定すれば、Prandtlの混合距離理論により流速の対数分布則が得られる。しかし、水路幅が有限であることや自由水面が存在することを考慮し、せん断力分布が線形に変化するものとして、横断方向については水路中央において $\tau = 0$ 、鉛直方向については自由水面で $\tau = 0$ とする。すなわち横断方向、鉛直方向にそれぞれ

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{2y}{B}\right) = \rho l_y^2 \frac{du}{dy} \frac{du}{dy} \quad (3)$$

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right) = \rho l_z^2 \frac{du}{dz} \frac{du}{dz} \quad (4)$$

が成立するものと仮定する。ここで、 τ_0 は壁面せん断力、 B は水路幅、 H は水深、 κ はカルマン定数である。また l_y 、 l_z は混合距離である。式(3)および(4)において $l_y = \kappa y$ 、 $l_z = \kappa z$ とすれば速度勾配が次式のようになる。

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_*}{\kappa} \sqrt{1 - \frac{z}{H}} \left(\frac{1}{z}\right) \quad (5)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa} \sqrt{1 - \frac{2y}{B}} \left(\frac{1}{y}\right) \quad (0 < y < \frac{B}{2}) \quad (6)$$

ここで、 u_* は壁面摩擦速度であり $\sqrt{\tau_0/\rho}$ を表す。

3. 2 流速の算定

流速の算定に際しては、次の3つの仮定を設けるものとする。

- 1) 等流である。
- 2) 二次流による渦度(速度勾配)の移流はない。
- 3) 渦度(速度勾配)の合成はベクトル量として単純に加算できる。

2において述べたように、渦度の伝達によって断面内の速度勾配が決定されるものと考えれば、式(2)、(5)および(6)より合速度勾配が次式のように決定される。

$$2\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{u_*^2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{B-y}\right)^2 \left(1 - \frac{2y}{B}\right) + \frac{u_*^2}{\kappa^2 z^2} \left(1 - \frac{z}{H}\right)} \quad (7)$$

一方、流速の算定を対象とした断面内に図-4に示すような計算メッシュを考える。このとき、点 (y_i, z_j) の流速 u は、点 (y_{i-1}, z_j) の流速 u_1 および点 (y_i, z_{j-1}) の流速 u_2 を用いて

$$u = u_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y = u_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \quad (8)$$

と書き表すことができる。式(7)および(8)の2式を連立させることにより、断面内の各点における横断方向および鉛直方向の速度勾配が次式のように求められる。

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(u_2 - u_1) dy + \sqrt{4(dy^2 + dz^2) dz^2 \omega^2 - (u_1 - u_2)^2 dz^2}}{dy^2 + dz^2}$$

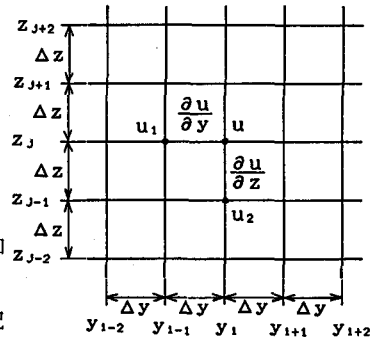


図-4 計算メッシュ

表-1 実験条件(長方形断面)

Case	H cm	B cm	U _{max} cm/s	Q cm ³ /s
S101	5.0	40.0	46.31	7946
S103	19.9	40.0	24.36	15139

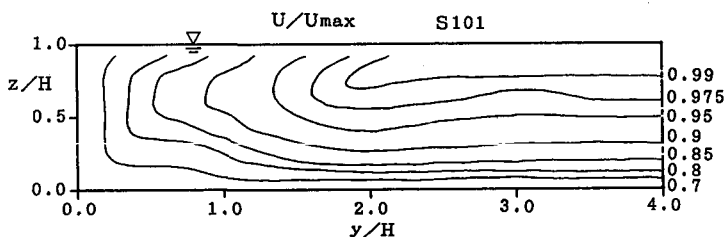
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(u_1 - u_2) dz + \sqrt{4(dy^2 + dz^2)dy^2\omega^2 - (u_2 - u_1)^2 dy^2}}{dy^2 + dz^2} \quad (9)$$

ここで、次に示す境界条件

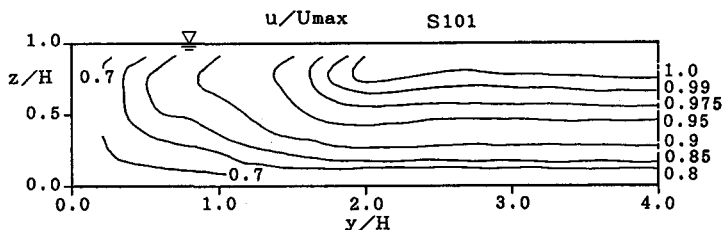
$$\begin{aligned} u &= \frac{u_{*z}}{\kappa} \ln(My_1) & : y = y_1 \\ u &= \frac{u_{*y}}{\kappa} \ln(Mz_1) & : z = z_1 \\ M &= \frac{9u_*}{\nu} & : (\text{滑面}), \quad M = \frac{30}{k_*} & : (\text{粗面}) \end{aligned} \quad (10)$$

により断面内の流速分布を決定する。ここに y_1 、 z_1 は計算メッシュにおける壁面に最も近傍の格子点の、壁面からの距離であり、対数分布則の成立領域内にとるものとする。 u_{*z} 、 u_{*y} はそれぞれ底面および側壁の摩擦速度、 k_* は相当粗度高さである。また、壁面せん断力は実測された値を用いる。なお、それを潤辺について積分した値が運動量のつりあいから得られるものと異なる場合にはそれらが等しくなるように実測値を補正して用いることにする。

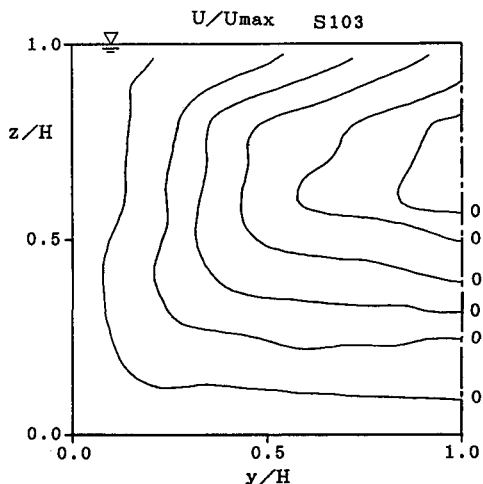
以上の計算手法を用いて計算された長方形断面における主流速分布と、実測された主流速分布を図-5に示す。なお実験条件は



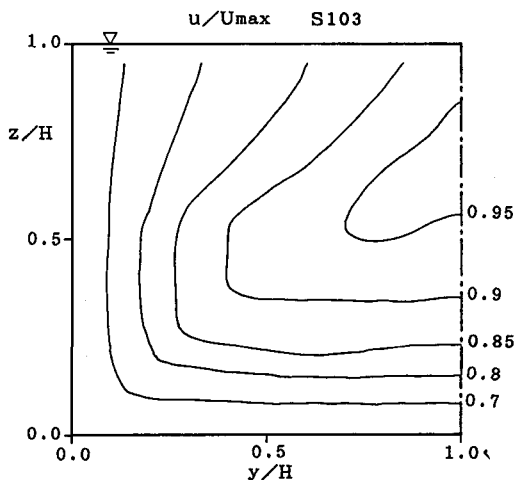
(a)-1 S101 実測値



(a)-2 S101 計算値



(b)-1 S103 実測値



(b)-2 S103 計算値

図-5 主流速分布 (長方形断面)

表-1のとおりである。

この2つの図によると比較的よく流速の再現がなされていることがわかる。開水路特有の二次流の影響による自由水面付近での流速の低下もよく再現されている。二次流による渦度の移流はないものと仮定したにもかかわらずこのような結果が得られるのは、計算に使用した壁面せん断力が二次流の影響を受けているからである。実際アスペクト比が小さくなるにつれて、最大主流速は水面下に入り込んでこれよりも水面に近い側では負の流速勾配となる。このように式(5)および(6)から得られる最大速度勾配軸と、周辺の流速の関係により再配分して得られた式(7)および(8)による最大速度勾配軸とが異なることになるが、式(3)および(4)は二次元的に考えられたものであり、これが三次元流れに適用された場合に最大速度勾配軸が変化しても問題はないであろう。

4. 台形断面における流速分布の計算法

4. 1 せん断力分布の形状と速度勾配

台形断面においては、底面から鉛直な方向のせん断力分布は長方形断面と同じく、自由水面すなわち $z = H$ において $\tau = 0$ と仮定し、式(3)および(5)がそのまま適用できるものとする。一方、側壁から垂直な方向に関しても自由水面において $\tau = 0$ とする。すなわち図-6において、 $s = s_1$ におけるせん断力分布を次のような一次式

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{r}{\frac{H - s_1 \sin \theta}{\cos \theta}} \right) \quad (11)$$

で表されるものとする。ここで台形断面の場合においても、 τ_0 は実測された壁面せん断力を表す。したがって、側壁の影響による速度勾配は次式のようになる。

$$\frac{du}{dr} = \frac{u_*}{\kappa} \sqrt{1 - \frac{r}{\frac{H - s_1 \sin \theta}{\cos \theta}}} \quad (12)$$

4. 2 流速の算定

台形断面において、渦度の伝達が壁面に垂直な方向にのみ行われるものとするならば、一つの壁面だけの影響を受ける領域(図-6の斜線の部分)と、複数の壁面の影響を受ける領域(図-6の格子の部分)とが断面の中に同時に存在することになる。一つの壁面だけの影響を受ける領域につ

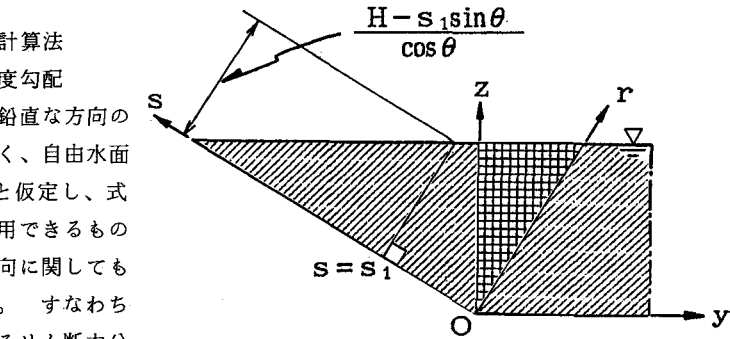


図-6 台形断面

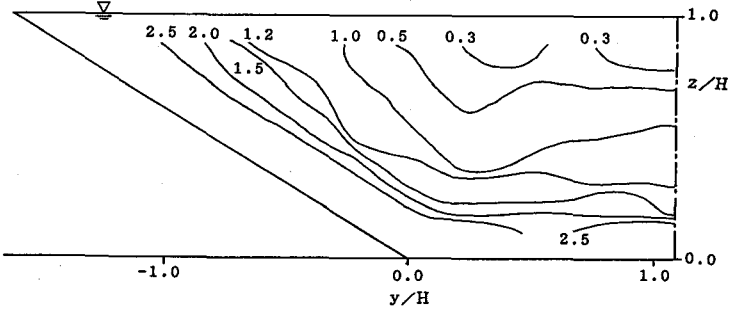


図-7 合渦度分布(台形断面) [1/sec]

いては、その壁面に垂直な方向の速度勾配がそのまま合速度勾配となる。一方、複数の壁面の影響を受ける領域についてであるが、速度勾配のベクトル和をそのまま合速度勾配とすると、その領域だけが非常に突出して大きな値を示すことになり、図-7に示した実測の合渦度分布とは大きく異なっている。特に側壁の傾きが小さい場合においてはそれが顕著に現れることになる。この領域については、今後も検討を重

ねていく必要があると考えられるが、現時点においては、この領域の両側に存在する、一つの壁面だけの影響を受ける領域の速度勾配を比例配分した値をもって合速度勾配とし、以下、長方形断面と同様に計算を進め、断面内の流速分布を決定する。

以上の方法により計算された台形断面の主流速分布とその実測値の分布を図-8に示す。また実験条件を表-2に示す。

台形断面においては自由水面においてせん断力をゼロとした仮定がかなり影響しているようで、最大流速の位置が自由水面から下に潜り込んでいるようすが見受けられる。

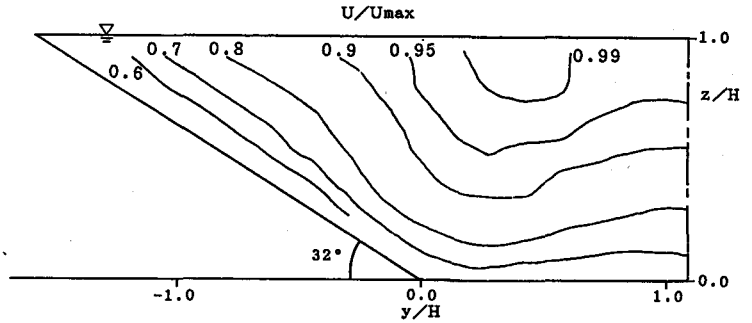
5. おわりに

以上のように簡易的な流速分布の算定について述べたが、この結果を一次近似とみればだいたい良い計算結果が得られたと思う。しかし今後の検討課題としては次のようなことがあげられる。まず鉛直方向の流速勾配の算定についてであるが、自由水面において鉛直方向の流速勾配がゼロとなること

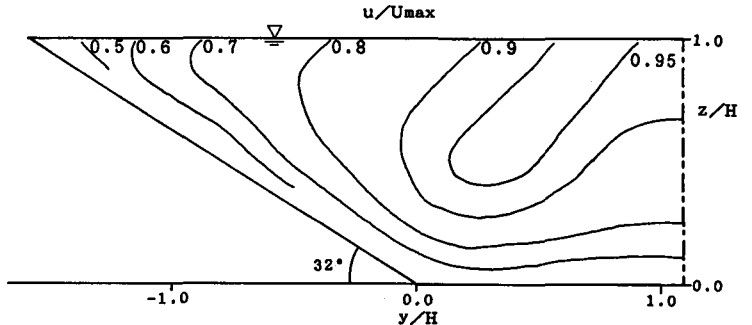
は開水路においては問題があり、せん断力をはじめとする仮定についてさらに考える必要がある。特に台形断面については、水面付近で流速分布が大きく異なっており、この点からも自由水面の存在に関する検討が非常に重要な問題である。また現段階においては二次流による渦度の移流を無視しているが、どの程度の影響があるか調べる必要がある。

表-2 実験条件(台形断面)

H cm	B cm	T cm	θ deg	Umax cm/s	Q cm ³ /s
7.12	15.2	39.8	32	38.01	6220



(1) 実測値



(2) 計算値

図-8 主流速分布(台形断面)

参考文献

- 1) 富永晃宏・江崎一博：長方形断面開水路流の三次元乱流構造に関する実験的研究，土木学会論文集，第357号／Ⅱ-3，pp.81~88，1985
- 2) 中村悦由・富永晃宏・青木 淳：台形断面開水路流の三次元特性について，土木学会第41回年次学術講演会概要集Ⅱ，pp.273~274，1986