

間欠性を有する乱流に於ける条件付きレイノルズ応力の輸送

Transport of Conditional Reynolds Stresses
in Turbulent Flows with Intermittency

中山昭彦*・グラチオ ファブリス**

By Akihiko NAKAYAMA and Gracio FABRIS

The transport equations for conditional Reynolds stresses and turbulent kinetic energy defined in turbulent flows with intermittency have been obtained. The intermittency considered may be based on any criteria that divide the flow into two mutually exclusive regions, including turbulent/nonturbulent intermittency, and intermittency defined by scalar. The derived transport equations involve terms representing the entrainment at the interface and the interaction between the two regions. Available experimental data have been examined in the light of the derived transport equations.

Keywords: turbulence, intermittency, conditional averages, transport equations

1. まえがき

一般に乱流は間欠性を伴うものが多い。例えば、混合層や噴流などの自由せん断乱流や境界層の外部層では、回転性の強い乱れた変動をもった流体と、比較的波長の長い非回転性変動が主な外部流れとが薄い粘性超層 (viscous superlayer) を境に時空間に間欠的に共存していることはよく知られている (例えば参考文献 1))。乱れによる熱や物質の拡散の問題では、例えば熱せられた流れの部分は、大型渦により大きく移動され、熱せられていない部分と界面層を隔てて間欠的に存在する。これらはレイノルズ数あるいはペクレ数が高ければ高い程より鮮明になる。また二つのせん断流が混合干渉するような複雑せん断流においても、一方から来る流れは元の性質を保持しながらもう一方のせん断流に属する流れの部分とが間欠的に存在すると考える事もできる。さらに壁面せん断流の大規模組織構造にみられる過程も間欠的に起こると考えられる。間欠的に共存する異種な領域はそれぞれ固有の構造を持っているが、レイノルズ平均をとれば失われてしまうものである。条件付き抽出法 (Conditional Sampling) により得られる領域平均による乱流の研究はこの失われた特性を再現しようとするものである。この方法では、各々の領域、例えば、乱流の条件の基準を設け、その条件の満たされた時のみ平均し、「条件付き平均」を求める。各々の領域での構造が単純で予測が容易であれば、領域が重複する部分で各領域での特性を重ね合わせる事により、レイノルズ平均の式を基にした乱流モデルでは計算が難しい複雑乱流の計算を改良する事につながるものでもある。いろいろなケースについての実験が行われているが、条件付きレイノルズ応力自体の輸送機構を論じ、予測するまでに至っていない²⁻⁴⁾。二つの領域を設定することにより生ずる領域間の干渉、重ね合わせ、などは厳密な輸送式に基づき検討されるべきものであるが、式が煩雑になる事もあり経験的な方法しか行われていない。空間のある

* 正会員 Ph.D 神戸大学助教授 工学部土地造成工学研究施設 (〒657 神戸市灘区六甲台町)

** Ph.D Research Scientist Jet Propulsion Laboratory Pasadena, California, U.S.A.

一点で瞬間的に乱流である時のみ平均して得られる条件平均速度の式は Chevray and Tutu⁵⁾, Libby⁶⁾, Dopazo⁷⁾ などによって導かれ応用もされているが、二次統計量であるレイノルズ応力には言及されていない。そこで本研究では間欠的な二種の異なる特性からなる乱流の場で定義される「条件付レイノルズ応力」の輸送式を導き、その各項の意味、値などを理論的、実験的に検討するものである。結果は二相流などを含めた二種の流れより成る乱流、及び4象限分類法などの条件を設けて得られる条件平均の輸送にも応用できる。

2. 条件付きレイノルズ応力の輸送式

時空間のどの一点においても設定できる条件（例えばその時点で流れが乱流であると言う条件）が定義された時、その条件が満足された時のみ平均する事によって得られる条件付きレイノルズ応力について考える。条件付き平均量は通常平均（レイノルズ平均）の平均速度を基準にして変動部を定義する、いわゆるR-平均と、変動部を条件平均よりの増分で定義する、いわゆるZ-平均とがある。さらに、平均する際、全時間で除する方法と、条件が満足された時間で除する方法とある。前者は各領域から通常平均への寄与の割合を意味し、後者は各々の領域での乱流特性を表すのに適している。これらの平均値には関係性があるのでどれについての式を求めても良いが、ここでは、比較的簡単な式になる、R-平均の条件レイノルズ応力の輸送式について考える。図-1に示すように、間欠性関数（instantaneous intermittency function） $I(x_i, t)$ を条件を満たす時を1、条件を満たさない時を0と定義し、 I を使って条件平均を表す。 I の通常平均が平均間欠性 $\bar{\gamma}$ である。 $(\bar{\quad})_I$ を従来の通常レイノルズ平均とすると条件付きR-平均（これより単に条件付き平均という） $(\bar{\quad})_I$ は $I=1$ の時のみ平均するという意味で

$$(\bar{\quad})_I = (\bar{\quad}) \quad (1)$$

で表され、条件が満たされない時の平均 $(\bar{\quad})_0$ は

$$(\bar{\quad})_0 = (\bar{\quad}) (1 - \bar{\gamma}) \quad (2)$$

で表される。条件が乱流/非乱流の時、前者は条件乱流平均とよばれる。 $u_i(x_i, t)$ を x_i 方向の通常平均値 $\bar{u}_i$ よりの変動値とすると、条件付きレイノルズ応力は

$$(\overline{u_i u_j})_I = (\overline{u_i u_j I}) \quad (3)$$

で与えられる。もちろん式(1)と(2)の和は通常のレイノルズ平均である。条件付きレイノルズ応力の輸送式を誘導するのに、 I の保存式を考える。 $I(x_i, t)$ は界面で微分不可能であるが、ここでは一般化された関数の意味で微分可能とすると

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial I}{\partial x_j} = \dot{w} \quad (4)$$

を満たす。ここで $\dot{w}$ は条件を満たす流体の生成率で、殆ど全ての点で0、界面で不定である。乱流/非乱流間欠性のとき、 $\dot{w}$ は乱流生成率で Chevray and Tutu⁵⁾ は流れの乱流部分は常に非乱流部を取り込み広がっていくので $\dot{w}$ は常に正であるとしている。また Libby⁶⁾ は $\dot{w}$ と他の物理量との積の平均、即ち相関はその物理量の界面超層内での平均値に相当することを指摘している。しかし後で述べるように、界面でのデータを調べると $\dot{w}$ は必ずしも正ではなく、かなりの場合0、すなわち乱流部が拡張していない可能性が強い。上式は熱拡散方程式の拡散係数を0にとった極限と考えても良い。その場合 I は温度、 $\dot{w}$ は熱源に相当する。

条件付きレイノルズ応力 $(\overline{u_i u_j})_I$ は式(3)より u_i , u_j と I の三重積通常平均と考えられるのでその輸送式はそれぞれの式を掛け合わせ平均をとる事により求められる。そこで I の式(4)に $u_i u_j$ を乗じ、

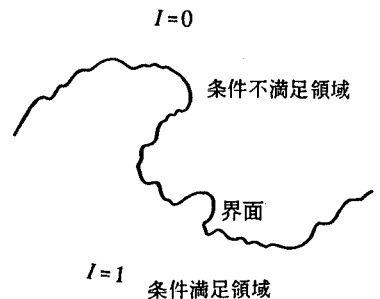


図-1 間欠性関数の定義

u_i の運動の式に Iu_j を乗じ、 u_j の式に Iu_i を乗じ、それぞれ通常平均をとり、全ての和をとると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\overline{u_i u_j})_1 = & - \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_k} (\overline{u_k u_j})_1 + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i})_1 \right] - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k})_1 - \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p' u_j})_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p' u_i})_1 \right] \\ & + p' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + p' \left(u_i \frac{\partial I}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial I}{\partial x_i} \right) + \overline{u_i u_j \dot{w}} + \left[(\overline{u_j})_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_k} + (\overline{u_i})_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_j u_k} \right] + v \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} u_j + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} u_i \right) \end{aligned} \quad (5)$$

となり $(\overline{u_i u_j})_1$ の輸送式と見なせる。ここで p' は圧力を密度 ρ で除したものの変動成分である。 I を $(1-I)$ で置き換え、同様の操作を繰り返すと

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\overline{u_i u_j})_0 = & - \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_k} (\overline{u_k u_j})_0 + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i})_0 \right] - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k})_0 - \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{p' u_j})_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p' u_i})_0 \right] \\ & + p' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_0 - p' \left(u_i \frac{\partial I}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial I}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i u_j \dot{w}} + \left[(\overline{u_j})_0 \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_k} + (\overline{u_i})_0 \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_j u_k} \right] + v \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} u_j + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} u_i \right)_0 \end{aligned} \quad (6)$$

が得られ、 $(\overline{u_i u_j})_0$ の輸送式が求められる。式 (5) と (6) の和は通常のレイノルズ応力の輸送式になる。ここで注目すべき事は通常輸送式に既にある、移流項、生成項、拡散項、圧力-歪み相関項、及び逸散項に対応して条件付きの項という形になっている事である。これら以外の新しい項として $\overline{u_i u_j \dot{w}}$ 、 $[\overline{p' u_i} (dI/dx_i) + \overline{p' u_j} (dI/dx_j)]$ と $[(\overline{u_i})_1 d(\overline{u_j u_k})/dx_k + (\overline{u_j})_1 d(\overline{u_i u_k})/dx_k]$ がある。 $\overline{u_i u_j \dot{w}}$ 及び $\overline{p' (u_i dI/dx_i + u_j dI/dx_j)}$ は界面での $u_i u_j$ と p' の値のみに関係している。特に $\overline{u_i u_j \dot{w}}$ は、条件が乱流/非乱流の場合 $\overline{u_i u_j}$ の連行率と解釈できる。 $[(\overline{u_i})_1 d(\overline{u_j u_k})/dx_k + (\overline{u_j})_1 d(\overline{u_i u_k})/dx_k]$ は通常レイノルズ応力の勾配と通常平均速度と条件付き平均速度の差により生じる一種の干渉項と考えられる。実際の応用では薄い二次元せん断流に用いられる場合が多いので、主流が x 方向、せん断が y 方向である二次元せん断流について簡単化すると

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\overline{u^2})_1 = & -2 \frac{\partial U}{\partial y} (\overline{uv})_1 - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u^2 v})_1 + 2 \overline{p' \frac{\partial u}{\partial x}}_1 \\ & + 2 p' u \frac{\partial I}{\partial x} + \overline{u^2 \dot{w}} + 2 (\overline{u})_1 \frac{\partial}{\partial y} \overline{uv} + 2 v \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \right)_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\overline{v^2})_1 = & - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v^3})_1 - 2 \frac{\partial}{\partial y} (\overline{p' v})_1 + 2 \overline{p' \frac{\partial v}{\partial y}}_1 \\ & + 2 \overline{p' \frac{\partial v}{\partial y}}_1 + 2 p' v \frac{\partial I}{\partial y} + \overline{v^2 \dot{w}} + 2 (\overline{v})_1 \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^2} + 2 v \left(v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x} \right)_1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\overline{w^2})_1 = & - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{w^2 v})_1 + 2 \overline{p' \frac{\partial w}{\partial z}}_1 \\ & + 2 p' w \frac{\partial I}{\partial z} + \overline{w^2 \dot{w}} + 2 v \left(w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x} \right)_1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\overline{uv})_1 = & - \frac{\partial U}{\partial y} (\overline{v^2})_1 - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{uv^2})_1 - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{p' u})_1 + p' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_1 \\ & + p' \left(u \frac{\partial I}{\partial y} + v \frac{\partial I}{\partial x} \right) + \overline{uv \dot{w}} + (\overline{v})_1 \frac{\partial}{\partial y} \overline{uv} + (\overline{u})_1 \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^2} + v \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \right)_1 \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。ここで (u, v, w) は通常平均 (U, V, W) を基準にした変動部である。 $1/2(\overline{u_i u_i})_1$ の式、すなわち、条件付き乱流エネルギーの輸送式は

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{q^2}}{2} \right)_1 + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{q^2}}{2} \right)_1 = & - (\overline{uv})_1 \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{q^2 v}}{2} \right)_1 - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{p'v})_1 + \overline{p'u_i} \frac{\partial I}{\partial x_i} \\
 & + \frac{1}{2} \overline{q^2 w} + (\overline{u})_1 \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + (\overline{v})_1 \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} - (\varepsilon)_1
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

となる。ここで $(\overline{q^2})_1 = (\overline{u^2})_1 + (\overline{v^2})_1 + (\overline{w^2})_1$ 、 $(\varepsilon)_1$ は条件付き乱流エネルギーの逸散である。(a) 及び (b) は界面連行項 (entrainment)、その内 (b) は乱流運動エネルギーの連行項、(c) は (界面を介しない) 干渉項 (intrinteraction) を示す。

3. 実験データ

3.1 円柱の後流

まず簡単な、一様流に単独に置かれた円柱の後流を考える。Fabris²³⁾ は、円柱を僅かに熱する事により、円柱の表面を通過した流体、すなわち乱流部分のみを浮力の影響が出ない程度に温度を高くし、下流で温度と流速の同時計測を行っている。温度が、ある数値を越える場合関数 I を 1、そうでない場合 $I=0$ と定義し条件平均を求めている。温度を条件に用いているが、結果的には乱流の条件とほぼ一致する。この実験では I が値を変えるところ、すなわち乱流、非乱流の界面での平均値及び界面の通過頻度 f_T が測定されているので式 (7) - (11) の界面連行項のいくらかが直接計算出来る。図-2 に $x/d=400$ の下流での、通常平均のレイノルズ応力とそれに対する条件付き平均のレイノルズ応力を表してある。ここでは乱流はほぼ平衡状態にあり二次元後流の相似則による速度スケール $u_0 = U_R \sqrt{d/(x-x_0)}$ と長さのスケール $l_0 = \sqrt{d(x-x_0)}$ とで表されている。 x_0 は実質原点 $-40d$ である。この図に見られるよ

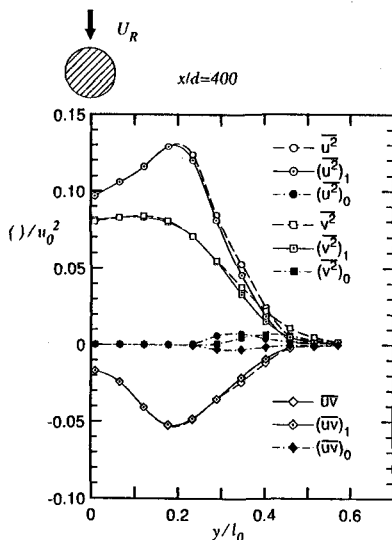


図-2 円柱後流での通常平均と条件付き乱流レイノルズ応力

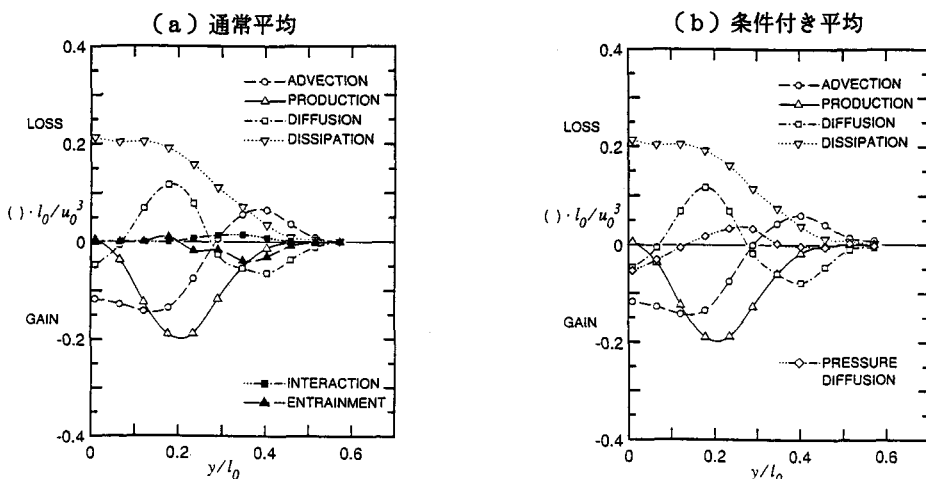


図-3 円柱後流での通常平均と条件付き乱流エネルギー収支

うに、条件が乱流/非乱流である場合、条件を満たさない非乱流領域の条件レイノルズ応力の値は全体的に小さく、条件付きレイノルズ応力は通常応力の分布と大部分の領域で一致している。しかし外縁部では非乱流

変動の影響が $(u^2)_0$ と $(v^2)_0$ にかなり見られる。レイノルズ応力の代表として、図-3 (a) に通常平均の乱流エネルギー輸送式の各項、図-3 (b) には条件乱流エネルギー輸送式 (11) の項が示されている。ここでは界面に関する二項は全体の残留差より求められている。まず既存の項で最も変化が認められるのは移流項と拡散項である。界面連行項は予想通り正で、最高値は生成項の約 1/5 程である。これに対し、干渉項はやや小さく全体的に負の寄与をしており、せん断応力最大点と外縁の中間付近で最大になっている。これは界面を介せずにエネルギーの一部が乱流部から非乱流部へ移行している事を意味する。

次に式 (11) の界面項及び干渉項について少し詳しく調べる。まず前述の Libby の w についての指摘が正しいとすれば、 $1/2q^2\dot{w}$ は界面が通過するときのみゼロでないでその時間平均は

$$\frac{1}{2}\overline{q^2\dot{w}} = \frac{1}{2}[(\overline{q^2})_F + (\overline{q^2})_B]f_T \quad (12)$$

となる。ここで、 $(\overline{q^2})_F$ は乱流塊下流側界面での q^2 の平均、 $(\overline{q^2})_B$ は上流側界面での平均、 f_T は間欠性の平均周期で、いずれも実験データにより評価できる。Fabris のデータによると、この最大値は生成項のその約8倍にもなる。この意味するところは、 $p'u_i dI/dx_i$ の項も同じく大きく相殺関係にあるか、又は Libby の指摘に問題があるかである。すなわち、 w は界面で必ずしも無限大になっていない可能性がある。次に $p'+1/2q^2 = h$ と置き、テイラーの凍結変動の仮定を使い時間積分を空間積分に直すと

$$\overline{p'u_i \frac{\partial I}{\partial x_i}} + \frac{1}{2}\overline{q^2\dot{w}} = \overline{\left(h - \frac{1}{2}q^2\right)u_i \frac{\partial I}{\partial x_i}} + \frac{1}{2}\overline{q^2\dot{w}} = \frac{1}{2}\overline{q^2 \frac{\partial I}{\partial t}} + \frac{1}{2}\overline{q^2 \frac{\partial I}{\partial x_i} U_i} + \overline{hu_i \frac{\partial I}{\partial x_i}} = \overline{hu_i \frac{\partial I}{\partial x_i}} \quad (13)$$

と簡略化され、二項の和としては h の界面での平均にほぼ等しい。 h の正確な値は変動圧力を測定しなければ分からないが、非乱流側ではゼロに近い。

3.2 せん断流の干渉

次に複雑せん断流の例として、二つのせん断流の混合による間欠性のある流れについて考える。Nakayama & Liu⁹⁾ は風洞に置かれた物体の後流が平板境界層とその後流と合流干渉する流れについて条件抽出実験を行っている。実験は物体を僅かに熱し、この物体の壁面に発する流体を熱されていない流れと区別出来るようにしてある。温度がある数居値を越える時 $I=1$ とした。計測は Fabris⁹⁾ と同様変動速度三成分と温度を同時測定している。この場合両せん断流間の界面は乱流と乱流の干渉であり Fabris の場合の乱流/非乱流の界面とは性質が異なる。境界層の壁面は $y=0$ 、後流の中心は $y=20\text{mm}$ である。図-4 に三断面で流下方向の乱れ強度を示している通り、後流、境界層双方の干渉は強い。通常レイノルズ応力の分布は極大点と極小点が多数個あり複雑になっているが、条件付きレイノルズ応力 $(\overline{u^2})_1$ は 3.1 で述べた単独後流に酷似しており、 $(\overline{u^2})_0$ の分布は境界層のものに類似しているのが解る。図-5 (a)、(b) にそれぞれ通常平均の乱流エネルギーの輸送式、及び条件付き乱流エネルギーの輸送式の幾つかの項の値を示す。干渉項は、後流の外側で 3.2 の場合と同様負

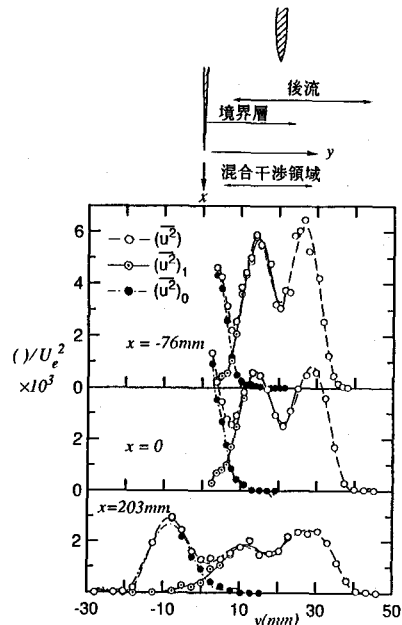


図-4 後流-境界層混合流での通常平均と条件付き乱流レイノルズ応力

の寄与であるが、境界層側では正にもなっており、値も大きい。ただ境界層側の粘性の影響の強い所での界面近辺では温度による条件の付け方に問題もでてくるので、データの解釈には注意が必要である¹⁰⁾。

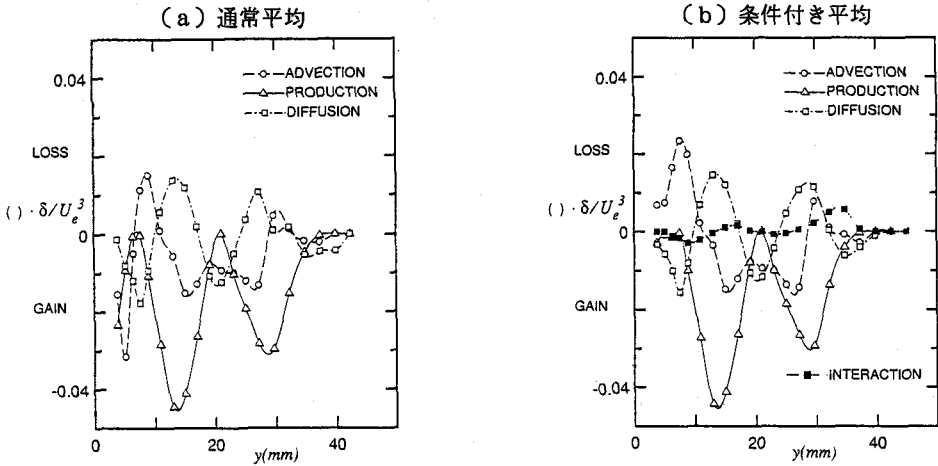


図-5 後流-境界層混合流での通常平均と条件付き乱流エネルギー収支

4. おわりに

乱流の間欠性については以前から多くの研究があるが、それによる条件付きレイノルズ応力の輸送についてはあまり議論されていなかった。本研究ではその条件付きレイノルズ応力と乱流エネルギーを、輸送式という観点から観てみた。二つの場合の実験データを解析し、条件付き乱流エネルギーの輸送式の項の役割と値について詳しく調べた。連行の項についてはこれまでの指摘とは異なる意味が判明した。

参考文献

- 1) Kovaszny, S.G., Kibens, V. and Blackwelder, R. F.: Large-scale Motion in the Intermittent Region of a Turbulent Boundary Layer, J. Fluid Mech. Vol.41, p.283, 1970.
- 2) Weir, A.D., Wood, D.H., and Bradshaw, P.: Interacting Turbulent Shear Layers in a Plane Jet, J. Fluid Mech., Vol.127, p.237, 1981.
- 3) Cheng, R.K. and Ng, T.T.: Conditional Reynolds Stress in a Strongly Heated Turbulent Boundary Layer with Premixed Combustion. Phys. Fluids, Vol.28, p.473, 1985.
- 4) Raupach, M.R.: Conditional Statistics of Reynolds Stress in Rough-wall and Smooth-wall Turbulent Boundary Layers, J. Fluid Mech. Vol.108, p.363, 1981.
- 5) Chevray, R. and Tutu, N.K.: Intermittency and Preferential Transport of Heat in a Round Jet, J. Fluid Mech., Vol. 88, p. 133, 1978.
- 6) Libby, P.A.: Prediction of the Intermittent Turbulent Wake of a Heated Cylinder, Phys. Fluids Vol. 19, p. 494, 1976.
- 7) Dopazo, C. : On Conditional Average for Intermittent Turbulent Flows, J. Fluid Mech. Vol. 81, p. 433, 1977.
- 8) Fabris, G.: Conditional Sampling Study of the Turbulent Wake of a Cylinder. Part 1, J. Fluid Mech. Vol.94, p.673, 1979.
- 9) Nakayama, A. and Liu, B.: Conditional Sampling Study in Interacting Turbulent Shear Flows of Two Flat Plates, Proc. 3rd ACFM, p.545, 1986.
- 10) Chatwin, P.C. and Sullivan, P.J. : The Intermittency Factor of Scalars in Turbulence, Phys. Fluids A 1(4), 761, 1989.