

Plumeにおいて大規模渦まわりに発生する 2次渦度が連行に果たす役割

Secondary Vorticity Generated around Large Eddies in Plumes
and its Contribution to Turbulent Entrainment

中井正則*

By Masanori NAKAI

A Secondary vorticity generated around large eddies in pure and forced plumes by the difference between the directions of the gravity acceleration and the density gradient was modelled and formulated using the Bjerknes theorem and the vorticity equation. As a result, it is found that the direction of secondary vorticity is the same as one of an original vorticity in the large eddy. In addition, the mechanism of turbulent entrainment of an environmental fluid was discussed connected with the secondary vorticity.

Keywords: secondary vorticity, Bjerknes theorem, large eddy, plume, turbulent entrainment

1. まえがき

Jet, PlumeあるいはForced Plumeと呼ばれる現象は土木工学のみならず、環境工学、機械工学などの工学および地球物理などの理学の分野においてもよく見られる流体運動である。これらの流れはその駆動力が慣性力であるか、浮力であるかあるいはその両方を合わせ持ったものであるかの違いはあるものの、マクロ的に見るとよく似ている。その反面、これらの流れの乱流特性は互いにかなり異なっている。なかでも、密度流現象において最も重要なトピックの1つである周囲流体の連行率についてみれば、Plumeの連行係数はJetのその約2.4倍と大きく異なっている¹⁾。Jet, PlumeおよびForced Plumeはいずれも自由せん断乱流の典型的な例であり、周囲流体の連行は流れの中に存在する大規模渦による巻き込みであると考えられ、その具体的なメカニズムの解明についていくつかの研究がなされてきた^{2), 3), 4)}。それにもかかわらず、物理的に明快な形で連行のメカニズムの解明は現在までになされていない。

一般に、密度界面に渦が存在する場合には、渦の表面付近で重力と密度勾配の方向が異なるために渦のまわりに2次的な渦度（以下では、2次渦度と呼ぶ）が生じることが知られている（Bjerknesの定理）^{5), 7)}。Plumeと周囲流体との密度界面に発生する大規模渦においてもBjerknesの定理より2次渦度が発生すると考えるのが妥当である。このような2次渦度は均質流体のJetにおいては生じるものではなく、PlumeとJetの力学

* 正会員 工博 東京大学助手 工学部土木工学科
(〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

的特性の大きな相違点であり、Plumeの周囲流体の連行過程においても少なからず貢献するものと考えられる。ところが、2次渦度に関する研究は現象の複雑さもあって現在までにほとんど研究がなされていず、2次渦度と連行のメカニズムとを結び付けた研究は著者の知る限り見あたらない。

以上の点を踏まえて、本研究ではPlume (Forced Plumeを含む) において大規模渦まわりに発生する2次渦度の定性的特性の概略とそれが連行現象において果たす役割について理論的な考察を行い、Plume特有の連行のメカニズムの特徴を明らかにすることを試みた。

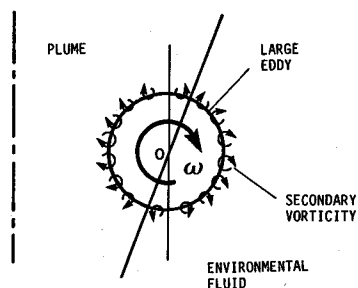


図-1 大規模渦のまわりに発生する2次渦度

2. 理論的考察

2・1 Bjerknesの定理

本研究の基礎になるBjerknesの定理は、重力の方向と密度勾配の方向が異なる場合に渦度が発生することを示したものである。式で表わせばつぎのようになる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \rho \times g \quad (1)$$

ここで、 ω は渦度、 t は時間、 ρ_0 は基準密度、 ρ は密度、 g は重力である。

2・2 現象のモデル化

Plumeの流れは、放出口から放出口幅の約10倍程度流下するまでの流れの形成領域とそれより下流側の確立領域に大別される。大規模渦は基本的には形成領域においてShear Instabilityにより発生した渦度が流下とともに集中してゆき、確立領域において大規模渦となる。しかし、ここでは、問題の焦点を絞るために大規模渦はすでに形成されているものとして確立領域における大規模渦の変化のみを扱うこととし、大規模渦の形成過程については考えない。

図-1に示すような上向きに放出される2次元Plumeの大規模渦のまわりの流れ場について考える。流れ場の密度分布は非常に複雑であり、簡単に議論できるものではない。しかし、時間的・空間的に平均した値について見ればつぎのような関係があると考えるのが妥当である。

$$\rho_{\text{Plume}} < \rho_{\text{Eddy}} < \rho_{\text{Env}} \quad (2)$$

ここで、 ρ_{Plume} 、 ρ_{Eddy} 、 ρ_{Env} はそれぞれ大規模渦の存在しないPlumeの領域、大規模渦の内部および周囲流体の密度である。Plume (大規模渦の存在しない部分) 領域、大規模渦の内部、周囲流体において密度分布がほぼ一様とし、渦のまわりと密度界面で密度が急変すると仮定してこの大規模渦のまわりにBjerknesの定理を適用すると、大規模渦のまわりに図-2に示すような渦度が2次的に発生する。すなわち、大規模渦のまわりには、大規模渦の渦度と同じ向きの2次渦度が発生するわけである。ただし、時間平均したPlumeの密度界面が鉛直軸から約0.20rad傾いているために $\theta=0 \sim 0.20$ 、 $\pi \sim 3.34$ の領域 (θ は鉛直軸からとった角度) では大規模渦の渦度と反対向きの2次渦度が発生すると考えられる。

3. 問題の定式化

つぎに、2.で考察した結果に対して簡単に定式化する。解析の対象は2次元のPure Plumeならびに慣性力の弱い範囲のForced Plume (密度Froude数 $Fd \ll 1$) とし、対象とする時間スケールは大規模渦形成後の短い

時間である。また、解析には1)流体は非圧縮性とし、また、Boussinesq近似が成立すること、2)大規模渦は変形することなく、また、渦内部での密度は一様であるとする、3)大規模渦の流下速度は十分小さいこと、4)ひとつの大規模渦は他の渦と干渉し合うが、これについては考えないことの4つの仮定を用いる。もちろん、これらの仮定は厳密には正しくないが、ここで行うような現象の定性的特性に見通しをつけるような目的の解析ではそれほど大きな矛盾を起こすものではない。

図-2に示す座標系に対してz方向の渦度方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \nu_t \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

ここで、 ω は渦度、 u, v はそれぞれ x, y 方向の流速、 g は重力加速度、 ρ_0 は基準密度、 ρ は密度、 ν_t は渦動粘性係数である。式(3)において右辺第1項がBjerknesの定理による渦度の発生を表す項である。式(3)中の諸量を次式のように無次元化する。

$$x = x^* L, y = y^* L, u = u^* U, v = v^* U, \omega = \omega^* \frac{U}{a}, t = t^* \frac{U}{(\Delta \rho_0 / \rho_0) g} \tag{4}$$

ここで、 $*$ を付けた量が無次元量であり、代表スケールは、 L は長さスケール(放出口の幅)、 U は速度スケール(放出口での平均流速)、 $\Delta \rho_0$ は代表密度差(放出口での密度差)、 a は渦のコア半径である。式(4)を式(5)へ代入して次式で示す無次元渦度方程式が得られる。

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + Fd^2 \left(u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{a}{L} \frac{\partial f^*}{\partial y^*} + \frac{Fd^2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}} \right) \tag{5}$$

ただし、 Fd, Re は密度Froude数およびReynolds数であり、それぞれ次式で定義される。

$$Fd = \frac{U}{\sqrt{(\Delta \rho_0 / \rho_0) g L}}, Re = \frac{UL}{\nu_t} \tag{6}$$

ここで、 $\alpha = Fd^2, \beta = Fd^2 / Re$ として、 α, β のおよその値を見積ってみる。実験室規模でのPlumeに対して $U = 2 \text{ cm/s}, \Delta \rho / \rho_0 = 0.01, L = 4 \text{ cm}, \nu_t = 2 \text{ cm}^2/\text{s}$ とすると、 $\alpha = 0.102, \beta = 0.025$ と求まる。これより、 $\alpha, \beta \ll 1$ であるとして式(3)において非線形慣性項と粘性項を省略した次式で示す線形化された渦度方程式を得る。

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} = -\frac{a}{L} \frac{\partial f^*}{\partial y^*} \tag{7}$$

もちろん、 $Fd > 1$ のForced Plumeや $Fd \ll 1$ の場合でも大規模渦がかなり流下した後では現象の非線形性はかなり強くなり、基礎方程式の線形化は許されない。しかし、本研究で対象とした範囲においては方程式の線形化は近似的には可能であると考えられる。

4. 解析結果

式(5)で示した線形化された渦度方程式を用いて解析した結果について述べる。解析条件は $a/L = 0.5, Fd = 0.1, \Delta \rho_0 / \rho_0 = 0.01$ である。大規模渦まわりにおける渦形成後

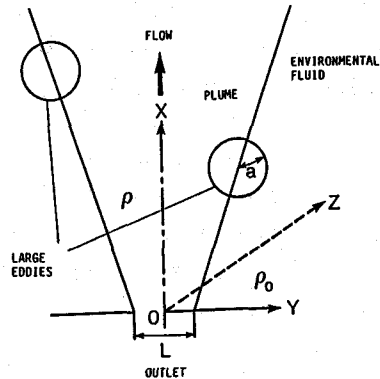


図-2 座標系

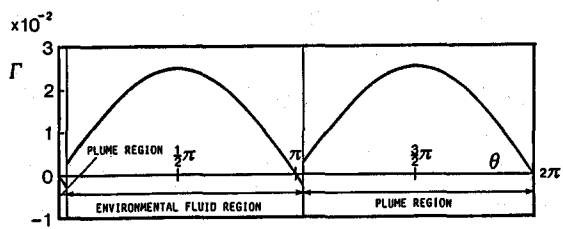


図-3 2次循環の円周方向分布

の短い時間 ($t \ll 1$) における無次元化された単位角あたりの2次循環の発生率 $\partial \Gamma / \partial t$ (単位時間あたりの発生量) の円周方向の分布を示したのが図-3である。ただし、 θ は鉛直軸から時計回りにとった座標、また2次循環は時計回りすなわち大規模渦の循環と同じ向きが正である。同図より、2. で考察した「大規模渦の渦度の向きと同じ向きの2次渦度が発生する」ことが確認される。

つぎに、この Γ を円周方向に積分して総循環の発生率を求めて大規模渦の初期の循環と比較してみる。大規模渦の循環を $2\pi aU$ とすると、総2次循環の発生率は大規模渦の循環の約30%程度となり、決して無視できる値ではないことがわかる。また、同図より2. 2で述べたように前述のPlumeの密度界面が鉛直軸から傾いていることにより $\theta=0 \sim 0.20$, $\pi \sim 3.34$ の領域に反対向きの渦度が生じることが確認されるが、その大きさは十分小さく、その影響は無視できることがわかる。

5. 2次渦度と連行のメカニズムの関係

最後に、発生した2次渦度の挙動を周囲流体の連行との関連において考える。均質流体場において大規模渦のまわりに同じ向きの渦度を2次的に発生させた場合には、大規模渦がその2次渦度の大部分を移流と拡散により取り込むと考えられる。もちろん、密度界面は剛体壁の様な性質を持ち合わせているので、界面での抵抗は無視できず、均質流体場での結果をそのまま密度成層流に適用することはできない。しかし、密度界面においても界面抵抗は存在するものの、発生した2次渦度のかかなりの部分が大規模渦内へ取り込まれると考えてもおかしくはない。そこで、本研究では第1次近似的な意味で界面抵抗の影響を無視し、2次渦度の大部分が大規模渦内へ輸送されると仮定して議論を進める。そうすると大規模渦の循環は2次渦度が輸送されることより、流下にともない徐々に増加して行くことになる。

ところで、Plumeの周囲流体の連行は主として大規模渦による巻き込みであることは前に述べたが、大規模渦が巻き込む周囲流体の連行量は渦の循環が大きいほど多いと考えるのが妥当である。この考えを先の結果に適用すると、大規模渦は流下にとまってより多くの周囲流体を連行する、すなわち連行率が大きくなって行くことが理解される。

以上より、Forced Plumeが流下とともにJet-like-flowからPlume-like-flowの流動形態に移行して行き、その過程で周囲流体の連行率が大きくなって行くという現象の力学的メカニズムは、大規模渦がまわりに発生する2次渦度を取り込むことによる循環の増加と結論付けられる。もちろん、実際の現象はもっと複雑であるが、ここでは大規模渦の挙動に注目したときの連行のメカニズムに対するひとつの考えを述べた。

参考文献

- 1) 室田 明・中辻啓二・中井正則：二次元フォーストブルームの連行係数に関する理論的研究，土木学会論文集，No. 369/II-5，pp. 23-31，1986。
- 2) 小松利光・浦 勝・後藤俊一：二次元密度plumeにおける組織渦の構造と連行現象，第28回水理講演会論文集，pp. 311-319，1984。
- 3) 室田 明・中辻啓二・玉井昌宏：二次元フォーストブルームの大規模渦運動，第30回水理講演会論文集，pp. 649-654，1986。
- 4) 室田 明・中辻啓二・浅田浩章：二次元フォーストブルームの完全発達領域における組織的構造と連行機構に関する研究，土木学会論文集，No. 405/II-11，pp. 165-174，1989。
- 5) Yih, Y. S.: Stratified Flows, Academic Press, pp. 11-13.
- 6) 玉井信行・浅枝 隆・中井正則：密度界面に衝突する渦の挙動に関する研究，土木学会論文集，No. 375/II-6，pp. 99-105，1986。