

境界積分方程式法による不圧地下水流れの3次元解析

Three Dimensional Analysis for Groundwater Flows in Unconfined
Aquifer by Boundary Integral Equation Method

福原輝幸*・福井卓雄**・小島高志***・野村益生****

By Teruyuki FUKUHARA, Takuo FUKUI, Takasi KOJIMA and Masuo NOMURA

Three dimensional computation process by the Boundary Integral Equation Method has been developed for flows in an unconfined aquifer. An availability of the computation process presented here was applied to a duct flow and two dimensional groundwater flow through a dam, and was confirmed by the comparison of the theoretical values with computed ones concerning the potential, flux and groundwater surface profile. Finally, a transient three dimensional flow pattern around an underground dam was shown as a typical computation example.

Keywords: numerical computation, boundary integral equation method,
groundwater flow

1. 緒 論

近年、地下空間利用が注目されるようになり、将来の地下利用形態が提案され始めている。しかしながら、それに関する技術開発・環境評価の方策は緒についたばかりと言える。地下構造物の建設は以前は技術先行型であったのに比べて、最近では周知のとおり環境問題の占める比重が大きくなり、精度の高い環境予測シミュレーションが要求されている。そのためには地下水流れの計算が正確かつ簡単にできるようなプログラム開発が必要となる。

地下構造物周辺の流れに代表されるような3次元的な地下水流動の解析は、現在のところ藤崎ら¹⁾、河野ら²⁾、百田・佐藤³⁾、等が行っているごとく、有限要素法が主流である。一方、境界積分方程式法(BIEM)では飽和流れの支配方程式である3次元ラプラス方程式でも解析的に積分できるから、境界に対する法線方向速度が精度良く求まる。従って、BIEMは移動境界面をもつような地下水流れの追跡に特に有効な手法と言える。佐藤・福原⁴⁾は海岸帯水層での塩水侵入および淡水レンズの2次元問題にBIEMを適用し、境界形状や流量に関して実験値と比較しながらその妥当性を検証し、藤野⁵⁾は塩水侵入制御問題にBIEMを利用している。

* 正会員 工博 福井大学助教授 工学部環境設計工学科
(〒910 福井県福井市文京3-9-1)

** 正会員 工修 福井大学講師 工学部環境設計工学科
(〒910 福井県福井市文京3-9-1)

*** 福井県庁
(〒910 福井県福井市大手3-17-1)

**** 福井大学大学院 工学部環境設計工学科
(〒910 福井県福井市文京3-9-1)

本論文ではBIEMによる地下水流動の3次元解析のアルゴリズムおよびその妥当性を報告するとともに、地下ダム周辺流れの3次元挙動の解析例を紹介する。

2. 3次元ラプラス方程式の解析積分

境界積分方程式法の基礎方程式は、発散定理に基づくGreenの公式から導かれる。3次元連続方程式(ピエゾ水頭: ϕ に関するラプラス方程式)の積分方程式は次のようになる。

$$a\phi(P) = \int_{S_y} \left[-\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS, \quad a = \begin{cases} \frac{4\pi}{2\pi} & (P \in \Omega) \\ 0 & (P \in S_y) \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 S_y : 境界、 Ω : S_y 内部の解析領域、 n : 単位外向き法線、 r : 境界上の任意点と特異点 P との距離、を表す。また、 $1/r$ は3次元ラプラス方程式の基本特異解である。解析に当り、境界 S_y を M 個の面要素に分割する。面要素 N_j は図-1(a)のような K_n 個の頂点 $X_{j(\alpha)}$ (α : 面要素の頂点番号) から成る境界面とする。全境界にわたり式(1)の積分を実行すると、次のようになる。

$$a\phi(P_i) = \sum_{j=1}^M \left[\sum_{\alpha=1}^{K_n} \int_{X_{j(\alpha)}}^{X_{j(\alpha+1)}} -\phi_j \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{i\beta(\alpha)}} \right) d\xi + \sum_{\alpha=1}^{K_n} \int_{X_{j(\alpha)}}^{X_{j(\alpha+1)}} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) \frac{1}{r_{i\beta(\alpha)}} d\xi \right] \quad (2)$$

($i=1, 2, \dots, M$)

ここに、 ξ は特異点 P_i が面要素 N_j を含む平面と直交する点 P_i' から辺 $\overline{X_{j(\alpha)} X_{j(\alpha+1)}}$ すなわち辺 $\beta_{(\alpha)}$ に沿った長さを、 $r_{i\beta(\alpha)}$ は特異点 P_i と辺 $\beta_{(\alpha)}$ 上の任意点との距離を表す。また、添字 i および j は面要素番号を意味する。各面要素内において ϕ およびその法線方向微分 $\partial \phi / \partial n$ を一定とすれば、式(2)の右辺第1項および第2項の実質的な積分は、

$$K_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{K_n} \int_{X_{j(\alpha)}}^{X_{j(\alpha+1)}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{i\beta(\alpha)}} \right) d\xi, \quad J_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{K_n} \int_{X_{j(\alpha)}}^{X_{j(\alpha+1)}} \frac{1}{r_{i\beta(\alpha)}} d\xi \quad (3), (4)$$

となり、 K_{ij} 、 J_{ij} がそれぞれ二重層ポテンシャル、一重層ポテンシャルに相当する。結局、境界積分方程式として式(2)を離散化すれば、 ϕ あるいは $\partial \phi / \partial n$ を未知数とする M 個の代数方程式が得られる。

$$\sum_{j=1}^M H_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^M G_{ij} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) \quad \begin{cases} H_{ij} = K_{ij} + 2\pi \delta_{ij} \\ G_{ij} = J_{ij} \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (5)$$

K_{ij} 、 J_{ij} は解析的に計算でき、図-1(b)および(c)の記号に従えば、それぞれ次のようになる。

$$K_{ij} = - \sum_{\alpha=1}^{K_n} \left[\tan^{-1} \left\{ \frac{ZR(r_a S_{a+1} - r_{a+1} S_a)}{R^2 r_a r_{a+1} + |Z|^2 S_a S_{a+1}} \right\} \right] + \text{sign}(Z) \Delta \theta \quad (6)$$

$$J_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{K_n} \left[R \log \frac{r_a + r_{a+1} + d}{r_a + r_{a+1} - d} + |Z| \tan^{-1} \left\{ \frac{|Z| R(r_a S_{a+1} - r_{a+1} S_a)}{R^2 r_a r_{a+1} + |Z|^2 S_a S_{a+1}} \right\} \right] - |Z| \Delta \theta \quad (7)$$

$$\Delta \theta = \begin{cases} 0 & \text{for } (P_i' \notin S_y) \\ \pi & \text{for } (P_i' \in \beta) \\ 2\pi & \text{for } (P_i' \in S_y) \end{cases}$$

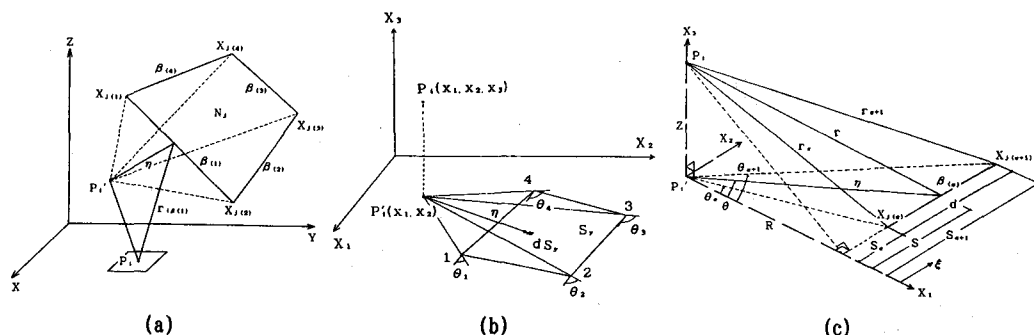


図-1 (a), (b), (c) 解析積分のための説明図

3. 解析の妥当性の検証

3-1 矩形ダクトモデルによる検証

図-2に示すような矩形ダクトモデルを使ってポテンシャル ϕ およびフラックス $\partial\phi/\partial n$ の計算値と理論値とを比較する。ここで、境界条件は上面、底面にそれぞれ $\phi=4$ 、 $\phi=0$ を与え、側面を不浸透面とする。以上の条件に基づく本計算結果と理論値との比較を図-3に示す。ただし、図中の ϕ' および $\partial\phi'/\partial n$ は理論値を表わす。ポテンシャルおよびフラックスは両者とも隅角部周辺よりは、中心部の方で真値に近いことが判かる。もちろん計算精度を上げようとすれば、要素数を増やすことで、隅角部のより近いところまで真値に近い結果を得ることができる。しかしながら、隅角部の値は適当な修正を必要とする⁴⁾。

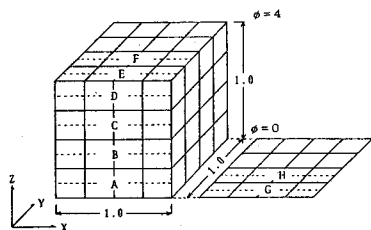


図-2 ダクトのモデル図

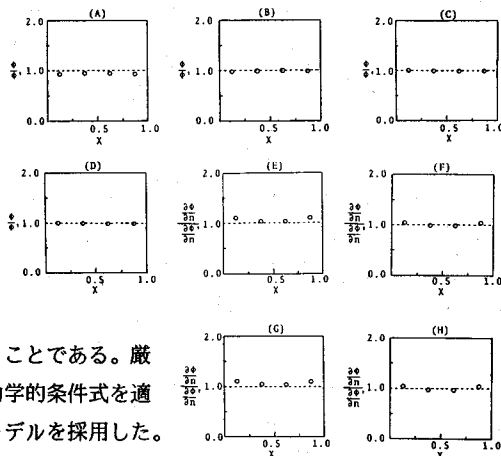


図-3 理論値と計算値との比較

3-2 不圧帯水層モデルによる検証

ここでの目的は境界の移動方法の妥当性を検証することである。厳密な意味では3次元解析ではないが、境界面での運動学的条件式を適切に計算しているか否かを明確にするために以下のモデルを採用した。

図-4に示すようなモデルで、不圧帯水層における地下水面形と流量について理論解と比較する。上流、下流水深はそれぞれ $H_1=1.0$ 、 $H_0=0.7$ とする。また、自由水面の初期水面形は直線的に与える。

次に、自由水面の理論解は定常二次元地下水流れにおいて「Dupuitの仮定」が成り立つものとして、次式より求めることにする。

$$q = \frac{k}{2L}(H_1^2 - H_0^2) \quad (8)$$

$$H_1^2 - h^2 = \frac{2q}{k}(L - Y) = \frac{L - Y}{L}(H_1^2 - H_0^2) \quad (9)$$

ここに、 h は水深、 k は透水係数、 q は単位幅当りの流量(フラックス)であり、その他の記号は図-4に示す通りである。図-4のA-A'に沿って計算した水面形と式(9)から求めたそれとの比較を表-1に示す。水面形の計算値は理論値と良好に一致している。次に、フラックスについて計算値と理論値とを比較する。 $k=0.001$ の場合、フラックスの理論値は $q_{TH}=0.0000255$ となる。一方、計算値は式(10)より求める。

$$q = k \int \frac{\partial \phi}{\partial n} dZ \quad (10)$$

A-A'断面におけるフラックス分布は図-5の通りであり、水面および底部付近の流速は隅角部の影響を受けるため信頼性が低い。よって、中心部の流速のみに注目して流入量 q_{IN} 、流出量 q_{OUT} を計算する。その結果、 $q_{IN}/q_{TH}=1.012$ および $q_{OUT}/q_{TH}=1.05$ となり、フラックスの計算および連続条件に関しても妥当性が示された。

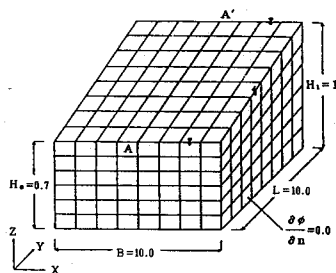


図-4 不圧地下水流れのモデル図

表-1 理論値と計算値との比較

Y/L	Theory ϕ/H	Calculation	
		t_1^* ϕ/H	t_2^* ϕ/H
0.000	0.70000	0.70000	0.70000
0.125	0.74414	0.74260	0.74331
0.250	0.78581	0.78550	0.78565
0.375	0.82537	0.82521	0.82532
0.500	0.86313	0.86304	0.86307
0.625	0.89931	0.89935	0.89932
0.750	0.93408	0.93425	0.93418
0.875	0.96760	0.96869	0.96817
1.000	1.00000	1.00000	1.00000

$$t_1^* = t_1 k/L = 0.025$$

$$t_2^* = t_2 k/L = 0.050$$

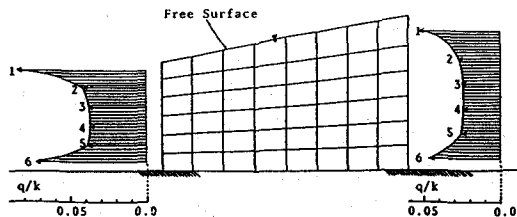


図-5 フラックスの流入・流出分布

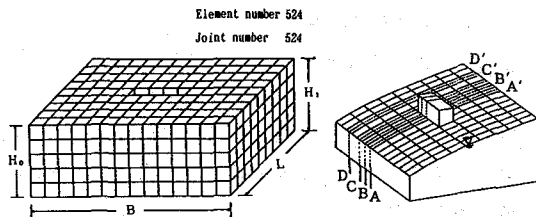


図-6 地下ダム周辺流れのモデル図

4. 地下ダム周辺の3次元地下水流解析

本解析の適用例として、不圧帯水層中に存在する地下ダム周辺の3次元的水面挙動の解析結果を示す。解析のためのモデルを図-6に示す。初期水面形は式(9)より与え、計算を進めた。図-7に地下ダム周辺の3次元水面形を、図-8に断面A-A'、B-B'、C-C'、D-D'における水面形の経時変化を示す。

このケースに関して、計算結果は境界条件の影響を受けやすいため、定性的なことしか言及できないが、当然のこととして、地下ダム上流側で水面上昇が下流側で水面低下が起きる。地下ダム

中央の直上・下流地点の水面形は初期に比べて、時間 t_3^* では上流側ポテンシャルの1割程度にまで変化する。かつ、その経時変化はダム設置直後で最も大きく、時間とともに緩やかになる。また、水面変化は地下ダムの中央から横方向(x方向)に離れるに従って小さくなり、D-D'断面ではほとんど変化しない。

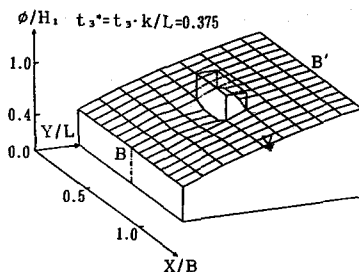


図-7 地下ダム周辺の3次元水面形

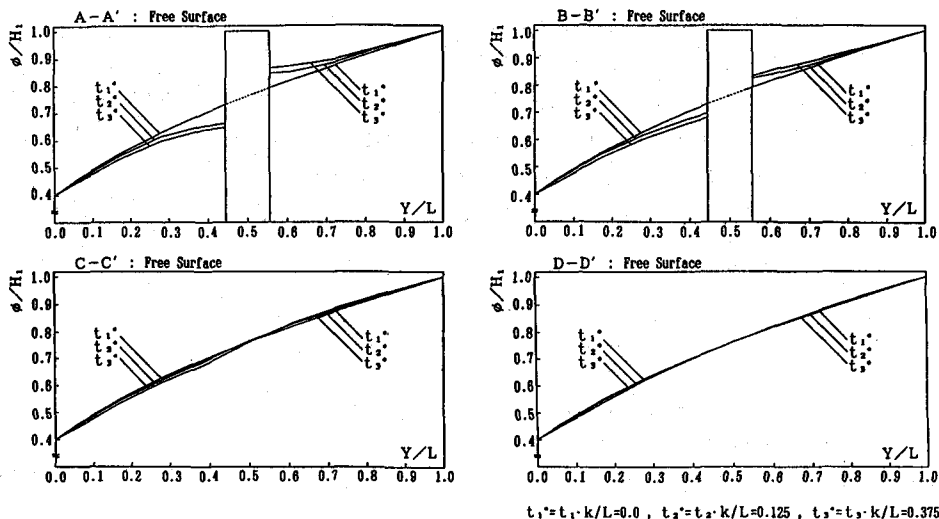


図-8 水面形の経時変化

5. 結論

本論文では、BIEMによる地下流動の3次元解析の妥当性を示すと共に、その適用例として地下ダム周辺流れの経時変化の一例を示した。結果、2次元および3次元問題でもBIEMは移動境界を含む地下水流れの解析に有効であることが判った。

参考文献

- 1) 藤崎克博ほか：準三次元多層および三次元有限要素モデルによる非定常被圧地下水流の解析，地球科学，33巻，2号，pp.73～84，1979。
- 2) 河野伊一郎ほか：有限要素法による広域地下水の準三次元解析，岡山大学工学部土木工学教室Report，No.82-1，1982年12月。
- 3) 百田博宣，佐藤邦明：割れ目系地山のトンネル・空洞を対象とした地下水の三次元挙動の解析，土木学会論文集，第364号/Ⅲ-4，1985年12月。
- 4) 佐藤邦明，福原輝幸：境界積分方程式法による自由水面および海岸地下淡水境界の非定常解析とその応用，日本地下水学会誌，第28巻，第4号，1986。
- 5) 藤野和徳：境界要素法による地下密度流の数値解析及び遮水壁の塩水侵入抑制の効果について，日本地下水学会誌，第27巻，51～60，1985。