

斜面における密度界面孤立波の数値解析

Numerical Analysis of Interfacial Solitary Waves over Sloping Bottom

水 田 洋*

By Yo MIZUTA

The behavior of solitary waves on density interfaces over sloping bottom is studied numerically. Such solitary waves are caused by tidal flow, and propagate towards shore or river mouth where density stratified flow is formed due to the difference of temperature or salinity. The main concern is whether solitary waves can propagate further upstream changing their polarity, or collapse or are reflected on the slope. A method of numerical analysis to treat such a complex flow including one- and two-layered region, free surface, density interface, and open boundary is also discussed.

Keywords: numerical analysis, solitary wave, density interface, open boundary, topography

1. はじめに

海浜や河口において、温水と冷水、あるいは淡水と塩水が形成した密度成層中で、潮汐などのために発生し伝播する孤立波の振舞いは、温排水や利水といった実用的な面からも関心が持たれている。二層流体の密度界面孤立波は、下層流体が上層流体より厚ければ下に凸の孤立波が、逆の場合は上に凸の孤立波が安定であることが知られている [1]。水路床が水平な場合のこの結論は、斜面の沖合から岸向に伝播してきた下に凸の孤立波が、上層厚と下層厚が入れ替わる位置に達すると、極性を反転して更に遡上するのか、あるいは反射したり崩壊するのか、といった疑問を導くことになる。斜面上の密度界面孤立波の問題は、文献 [2-4] などでは扱われているが、これらはモデル方程式の数値解や水槽実験によるものである。本論文では、流体を分けているセルが境界の移動にしたがって変形する、「変形可能セル法」 [5-7] を用いた数値解析により、この問題を調べた。

2. 数値解析の方法

ここでは、斜面上で2種類の流体が形成した密度成層の鉛直断面である、図-1のような数値解析領域を扱うことにする。この領域は、まず形そのものが単純な長方形ではない。また、上層先端から下層先端までの一層領域と、下層先端から右端までの二層領域に分けることが必要になる。更に自由表面と密度界面は時間と共に形が変わり、それにともなって上層・下層先端の位置が動く。もし従来の方法にしたがって規則格

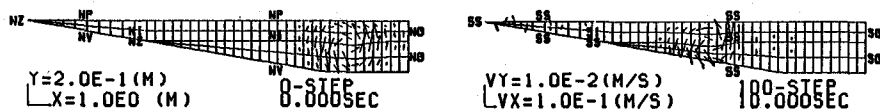


図-1. 斜面に入射する密度界面孤立波

* 正会員 理博 北海道大学助手 工学部数物系共通講座

(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

子を用いれば、自由表面や密度界面付近での内挿のために計算手順が煩雑になるばかりでなく、擬似粘性・擬似拡散が持ち込まれる可能性もある。このような場合には、流体を図-1のように任意形状のセルに分け、境界の動きにあわせてセルの形を変えるようにした方がよい。これが変形可能セル法 [5-7] の考え方である。

数値解析式は、微分型の流体力学方程式を差分化する代わりに、流体の体積 V ・質量 M ・運動量 Mv などの保存量に関する積分型の保存則から導く。数値解析領域を流体の厚みの変化も考慮した一般四角形のセルに分け、セルの中心に流量 $q_c=(bv)_c$ ($c=A, B, C, D$, $v=(Mv)/M$:流速, b :流体厚)を、格子点上に圧力 p_v ($v=1, 2, \dots, 9$)を配置する。変形可能セル法は非圧縮性流体を扱うが、図-2のような、数値解析領域の内部、境界、隅にある格子点を囲むいずれの小領域でも体積保存則(非圧縮性条件)は次のようになる。

$$0 = \oint (q \times dr) \cdot z = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} q_A \times r_{DB} + q_D \times r_{CA} \\ + q_B \times r_{AC} + q_C \times r_{BD} \end{array} \right] \cdot z. \quad (1)$$

ただし r_{DB} , z は点DからBへ向かうベクトル、紙面に垂直な単位ベクトルを表し、積分 $\oint dr$ の範囲は、セルの全側面にわたる。

運動量に圧力項を加えて次のステップの運動量を求めたとき、 $q_{A, B, C, D}$ が体積保存則を満たしているように圧力の分布を決めることが必要である。 q が解析領域の内部にあれば、各々の q はその周囲の p の線型結合で表された圧力項を含む。また境界上の q を法線流速 q_n および接線流速 q_s に分けると、大抵の接線境界条件で、

q_s は一つ内側の q に線型に依存する。更に、隅の q は相交わる2境界の法線流速 $q_n^{(1)}$, $q_n^{(2)}$ によって表される。以上により、領域内部の小領域からは、9格子点上の圧力を含む「圧力方程式」(2)が、境界の小領域からは、6格子点上の圧力と法線流速を関係づける「境界方程式」(3)が、隅の小領域からは、4格子点上の圧力と2境界の法線流速を関係づける式(4)が導かれる。ただし Δs は小領域が境界と接する部分の長さである。

$$0 = A_0 - \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} A_9 p_9 + A_6 p_6 + A_8 p_8 \\ + A_8 p_8 + A_5 p_5 + A_2 p_2 \\ + A_7 p_7 + A_4 p_4 + A_1 p_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$0 = A_0 - \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} A_6 p_6 + A_8 p_8 \\ + A_5 p_5 + A_2 p_2 \\ + A_4 p_4 + A_1 p_1 \end{bmatrix} + (q_n \Delta s)_s, \quad (3)$$

$$0 = A_0 - \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} A_5 p_5 + A_2 p_2 \\ + A_4 p_4 + A_1 p_1 \end{bmatrix} + (q_n \Delta s)_{(1)} + (q_n \Delta s)_{(2)}, \quad (4)$$

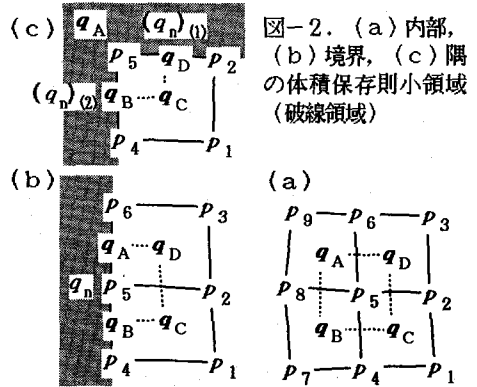


図-2. (a)内部, (b)境界, (c)隅の体積保存則小領域(破線領域)

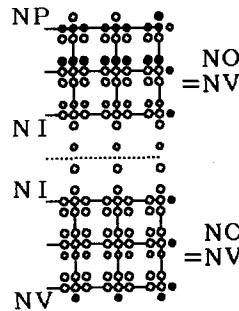


図-3. 方程式系の構造。黒丸:既知量, 白丸:未知量。

ここで係数 A_{1-9} は格子点の座標と流体厚だけから構成され、 A_0 は更に保存則の圧力項以外の項を既知量として含む。式(2)-(4)は圧力に対するPoisson方程式とその境界条件の差分式に相当するが、体積保存則とは独立にPoisson方程式の差分式を導く場合とは違い、図-2の小領域で、体積保存則が厳密に満足される。また未知量である格子点上の圧力と方程式(2)-(4)の数は常に一致している。図-3はこの方程式系を模式的に表したもので、各格子点付近の9, 6, 4個の丸印は式(2)-(4)の p_v を含む項、境界、隅で領域外の1, 2個の丸印は q_n を含む項である。また黒丸は既知量、白丸は未知量を示し、界面では、両領域の間に仮想的に設けた格子点上に圧力の連続条件と q_n を配置している。これにより、領域全体の式(2)-(4)を連立させて解け

ば、各格子点上の圧力と同時に、密度界面の法線流速も求められる。

図-1のような場合には、水平方向の広がり比べて鉛直方向の厚さはずっと小さいため、圧力の鉛直分布を静水圧とすることが多いが、斜面上の孤立波のように、非線形効果が強く効いてくる現象では、この仮定で落とされる分散効果も重要になってくる。この点、変形可能セル法は圧力分布を計算する過程を含むので、この問題は最初から回避されている。

図-1には、以下の境界条件が2文字の英字で記されている。(NV)法線流速が既知(河床、流入)、(NP)圧力が既知(自由表面、流出)、(NI)境界上の法線流速と圧力が共に未知だが連続(密度界面、一層二層領域接統面)、(NZ)長さのない境界(先端)、(SV)接線流速が既知(滑りのない壁面)、(SS)接線応力が既知(滑りのある壁面、風応力がある場合)、(SI)連続な接線流速を内挿(密度界面)。最初の英字が"N"の法線境界条件と"S"の接線境界条件は、各境界にひとつずつ与えることができる。式(3)(4)を用いれば、体積保存則を考慮しながら、これらの境界条件をすべて統一的に扱うことができる。図-1には他に(N0)(S0)開いた境界も記されているが、これについては次の節で述べる。

境界上の格子点の移動速度は、法線流速と水平移動速度を u_n, u_s 、境界の接線ベクトルと鉛直上向きベクトルを s, y とすれば、 $u = (u_n y - u_s s) / (y \times s)$ と表され、格子点の座標はステップ毎に $r^{n+1} = r^n + u \Delta t$ のように更新される。この u を用いる限り、どのように u_s を選んでも格子点が境界を離れることはない。そこで、一層または二層の各領域が、水平方向には常に等分割されていることを保証するよう、上層または下層先端の水平移動速度の内挿から u_s を求める。また領域内部の格子点の移動速度は、上方下方の境界上の格子点の移動速度の内挿から決める。これは、Lagrange法、Euler法の間あたる格子点の動かし方で、ステップ毎に格子点の位置を定めると共に、保存則を用いる際には $u-v$ を含む対流流束項を計算する必要がある。この項は、流体の動きあるいは格子点の移動のため、隣あったセル同士で実質的にやり取りされる領域に含まれた保存量の大きさと考えて評価すればよい[7]。

3. 開いた境界に対する局所的二次元モデル

効率的な数値解析を行うための「開いた境界」については、検討すべき問題がまだ多く残されている。著者も前回の講演で開いた境界について触れたが、その後以下のように、境界に垂直でない波速ベクトル、物理量の極値が境界を通過する際の処理などいくつかの点で進展があった。詳細は[8]を参照されたい。

時刻 $t, t-\Delta t$ (時間ステップ $n, n-1$)において開いた境界上やその近傍の各点で物理量 F の値が知られているとき、これらから時刻 $t+\Delta t$ (時間ステップ $n+1$)における境界上の点における F の値を決めることを考える。特性曲線法的な考え方では、 $t+\Delta t$ における境界上の点 r_0^{n+1} での F の値は、波速(情報伝達速度)ベクトルを c として、そこから $-c\Delta t$ だけ内側へ遡った点での t における F の値に等しい。これは、 F の増分 ΔF_0 に関して式(5)(6)のように表されるが、 F の関数形を $F(r, t)$ の代わりに $F(k \cdot r, t)$ と置いている。ただし、 k は F の勾配方向のベクトルである。もし k が定ベクトルならば、これは境界と交わる方向に F の分布が平面波的、すなわち F の等値面が平面であることを仮定したことになる。この結果、 ΔF_0 の値は c と k の内積だけから求められるようになり、 c の方向を定めるという厄介な問題は避けられる。ただし、境界上の全ての点(また全ての時刻)で k が同一である必要はないので、これは、 F の「局所的な二次元伝播」を仮定したといえる。

$$\Delta F_0 \equiv F(k \cdot r_0^{n+1}, t + \Delta t) - F(k \cdot r_0^n, t) \quad (5)$$

$$= F(k \cdot (r_0^{n+1} - c\Delta t), t) - F(k \cdot r_0^n, t) \quad (6)$$

$$= F(\theta_0 + \Delta\theta_0, t) - F(\theta_0, t). \quad (7)$$

ここでは、境界上の注目点が t から $t+\Delta t$ までの間に移動することを考慮して、その座標をステップ毎に r_0^n, r_0^{n+1} のように区別した。式(7)は、「二次元位相座標」 θ_0 とその差分 $\Delta\theta_0 = \theta_0 \equiv k \cdot r_0^n$ 、 $\Delta\theta_0 = \delta\theta_0 + X$ 、

$X = -k \cdot c \Delta t$, $\delta\theta_0 = k \cdot (r_0^{n+1} - r_0^n)$ のように定義して式(6)を書き換えたものである。

$F(\theta, t)$ は、従来の線型関数の代わりに、 θ に関する2次関数 $A\theta^2 + B\theta + C$ (A, B, C は定数) と仮定する。これは単に計算精度を高めるためではなく、物理量の極値が境界を通過する際の処理を自然に行うためである。 A, B は、 $t, t-\Delta t$ における各点の F の値をもとに、ある $\theta_i = k \cdot r_i^n$ に対する $\Delta\theta_i$ および $\Delta F_i = F(\theta_i + \Delta\theta_i, t) - F(\theta_i, t)$ の値の組を2組 ($i=1, 2$) 用意して決める。 $\Delta\theta_i = k \cdot (r_j^n - r_i^n)$ ($k \cdot r_j^n = k \cdot r_i^n$) とすれば、 ΔF_i は t における異なる点 r_i^n, r_j^n 上の F の値同士の差である(空間的)。しかし式(5), (6)を考慮すれば、 $\Delta\theta_i = \delta\theta_i - X$, $\delta\theta_i = k \cdot (r_i^{n+1} - r_i^n)$ と選んで、 $t, t-\Delta t$ 間の同じ点(Lagrange的な意味において、位置が変わってもよい)上の F の値の差を ΔF_i としてもよい(時間的)。 A, B を消去すれば、 $\Delta\theta_{0,1,2}$ および $\Delta F_{0,1,2}$ の間には、次の関係があることがわかる。

$$\Gamma_{12} \frac{\Delta F_0}{\Delta\theta_0} + \Gamma_{20} \frac{\Delta F_1}{\Delta\theta_1} + \Gamma_{01} \frac{\Delta F_2}{\Delta\theta_2} = 0, \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_j - \Gamma_i, \quad \Gamma_i = \theta_i + \Delta\theta_i/2. \quad (i, j=0, 1, 2, i \neq j) \quad (8)$$

式(8)は、既知の $\Delta F_{1,2}$ と $\Delta\theta_{0,1,2}$ から ΔF_0 を求めるために使う。しかしこれは、 X の値を決めるためにも用いられる。ただし今度は、 ΔF_0 は $\Delta F_{1,2}$ と同様、 $t, t-1$ における F の値同士の空間的、あるいは時間的な差である。 ΔF_i が空間的であるか時間的であるかによって $\Delta\theta_i$ が X を含まなかったり含んだりするため、 $\Delta F_{0,1,2}$ のうちいくつが時間的であるかによって、式(8)を X についての方程式に書き換えたときの形が異なってくる。意味のある X が求められるのは、時間的な ΔF_i が1つまたは2つの場合であるが、いずれにせよ、式(8)は X の2次方程式になる。

$F(\theta, t)$ が θ に関して線型で、 F の値の採取点がステップ間で移動しなければ、時間的な ΔF_0 と空間的な ΔF_1 に対して従来の $X = -\Delta F_0 / (\Delta F_1 / \Delta\theta_1)$ を得る。この X を使うと、 F の極値が境界を通過する際には $\Delta F_{0,1}$ は0に近づくため、いわば不定形の極限値を計算することになる。しかし数値的には、 ΔF_0 と ΔF_1 とでは0になる時刻がずれるので、 X はある時刻で必ず発散する。このような困難は、 $F(\theta, t)$ を2次関数とすることで緩和される。

$t+\Delta t$ における開いた境界上の物理量を以上の方法で与えるための汎用的なサブプログラムを作成し、使用している。実際の数値解析では、 $\Delta F_{0,1,2}$ をどのように選ぶかということの他に、 F 自身として法線流速、圧力のいずれを選んで境界上の既知量とするかという問題もある。ここでは図-3のような扱いをしているが、なお検討の余地がある。

4. 斜面上の密度界面孤立波

図-1のような領域で、臨界厚より沖側から左向きに、斜面へ入射してくる密度界面孤立波を考える。沖合での上層厚 $h_1=0.2\text{m}$ と下層厚 $h_2=0.3\text{m}$ 、上層密度 $\rho_1=1.0\text{g/cm}^3$ と下層密度 $\rho_2=1.2\text{g/cm}^3$ 、下層厚に対する斜面長 $L=7.5\text{m}$ は以下の各ケースで固定されている。全長 16.0m の領域は一層領域と二層領域とから成り、数値解析の際、水平方向にそれぞれ10個および30個の小区間に分割する。小区間の平均幅は 0.4m で、時間ステップの刻み幅を $\Delta t=0.1\text{s}$ と選べば、表面波(fast mode)の長波波速 $c_s=2.21\text{m/s}$ による CFL 条件は満たされる。流速の鉛直分布が求められるように、上層と下層はそれぞれ鉛直方向にも分けられている。これにより、原理的には分散効果も取り込まれる。

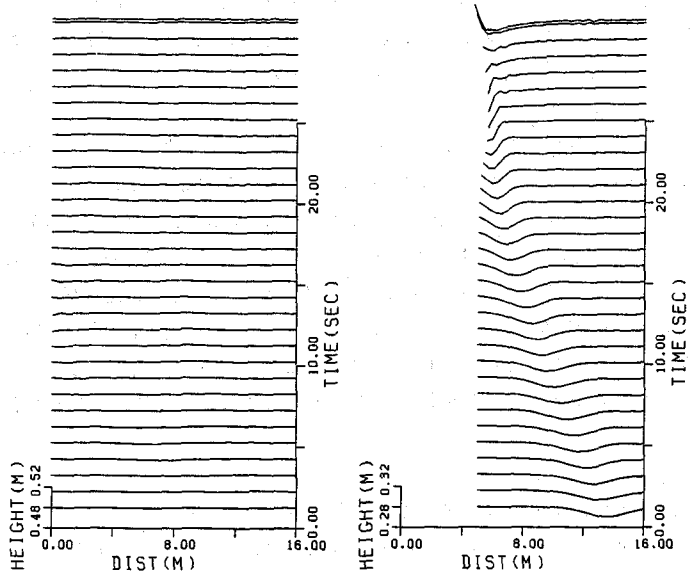
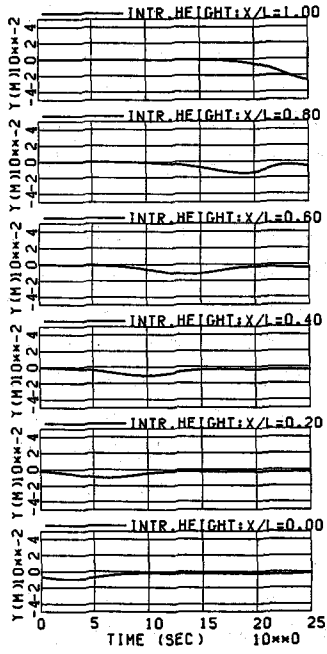
初期条件としては、界面に孤立波型の変位 $\eta_1(x)$ を加えると共に、上層および下層の、高さ y のセルに

$$(u, v) = -\frac{c_1}{h_s - h_1} (-\eta_1, -(h_s - y) \frac{\partial \eta_1}{\partial x}), \quad (\text{上層}) \quad (9.1)$$

$$(u, v) = -\frac{c_1}{h_1 - h_b} (\eta_1, -(y - h_b) \frac{\partial \eta_1}{\partial x}) \quad (\text{下層}) \quad (9.2)$$

のように流速 (u, v) を与える。ただし、 h_s, h_1, h_b は表面・界面・底面の高さ、 c_1 は界面波の波速である。これは線型長波理論によるが、孤立波の初期波形を崩さず岸向きにだけ伝播させるには充分であった。

CASE 1 ($\alpha = -0.01\text{m}$, $\lambda = 1.83\text{m}$)



CASE 2 ($\alpha = -0.04\text{m}$, $\lambda = 0.92\text{m}$)

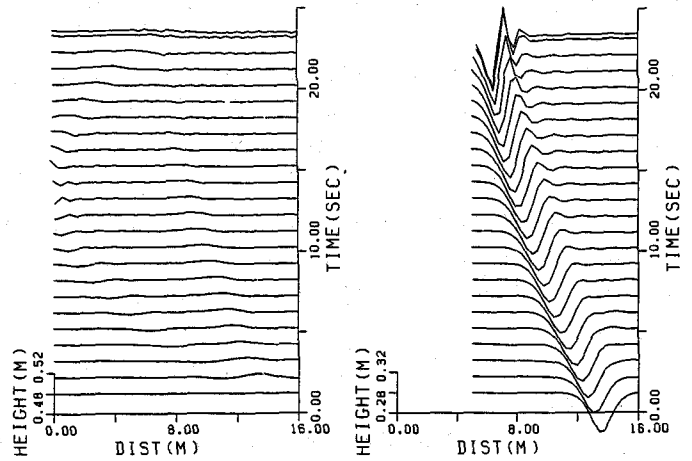
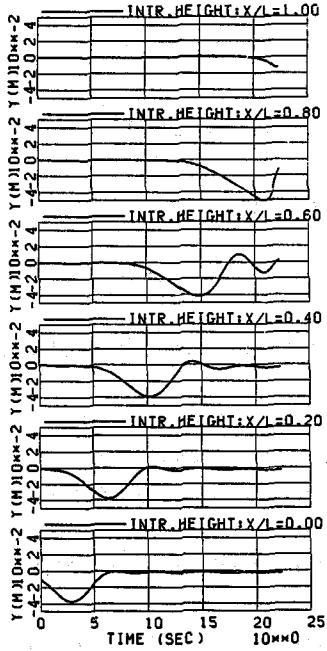


図 - 4 . 界面変位の時間変化

図 - 5 . 自由表面 (左) および密度界面 (右) の形状変化

水路床が水平な場合、下層厚が上層厚より厚ければ下に凸の孤立波が、逆の場合は上に凸の孤立波が安定に伝播する [1]。Helfrichらは、斜面を遡るにつれて下層厚が上層厚に較べ大から小に転じるときの孤立波の振舞いを、3次の非線形項も含んだ「拡張されたK-dV方程式」と水槽実験によって調べた [3,4]。孤立波の波高と波長を a, λ として λ/L が $a/(h_1+h_2)$ に較べて小さいとき、極性の反転した孤立波が生じることが方程式の数値解では示されたが [3]、このような界面孤立波は粘性や拡散の影響を大きく受けて減衰しやすいため、水槽実験では確認されていない [4]。また高次の非線形性や分散性がこの現象を覆い隠している可能性もある。

孤立波の波高と波長を $a=-0.01\text{m}$, $\lambda=1.83\text{m}$ (CASE 1) および $a=-0.04\text{m}$, $\lambda=0.92\text{m}$ (CASE 2) とした数値解析の結果を比較する。これらの界面孤立波 (slow mode) の水平な水路床における波速は、文献 [1] を用いて $c_1=0.46\text{m/s}$ および $c_1=0.47\text{m/s}$ と計算される。図-4は、斜面上の各点 (x は斜面の下端からの水平距離) における界面変位の時間変化、図-5は各時刻における自由表面および密度界面の形状である。CASE 1では、伝播と共に先行波の波高が増加し、後端の傾斜は前端より急になるものの、臨界厚の位置 $x/L=0.33$ を過ぎても下層先端近くまで先行波の後ろに随伴波は現れてこない。それに対しCASE 2では、臨界厚の位置を過ぎると随伴波が現れ、先端に至る間に成長する。これは極性の反転した孤立波ではないが、もっと波高が大きく波長の短い孤立波を入射すれば、極性の反転した孤立波になることが予想される。

5. おわりに

斜面上の密度界面孤立波の振舞いを数値解析によって調べ、随伴波の出現まで再現した。数値解析は、界面での粘性・拡散を制御できるという点で水槽実験より有利であるが、予想される極性の反転までを再現するには、より高い空間精度とより長い伝播距離が必要である。

ここでは地形が一様勾配の場合の結果を紹介したが、Helfrichらと同様に斜面から陸棚が続く場合の数値解析も行い、水槽実験 [4] とほぼ同様の結果が得られたことを付記する。

参考文献

- [1] T.Kakutani and N.Yamasaki, "Solitary Waves on a Two-Layer Fluid", J. Phys. Soc. Japan, Vol.45, pp.674-679 (1978).
- [2] C.J.Knickerbocker and A.C.Newell, "Internal Solitary Waves near a Turning Point", Phys. Lett., Vol.75A, pp.326-330 (1980).
- [3] K.R.Helfrich, W.K.Melville and J.W.Miles, "On Interfacial Solitary Waves over Slowly Varying Topography", J. Fluid Mech., Vol.149, pp.305-317 (1984).
- [4] W.K.Melville and K.R.Helfrich, "Transcritical Two-Layer Flow over Topography", J. Fluid Mech., Vol.178, pp.31-52 (1987).
- [5] Y.Mizuta, "Generalized Boundary Conditions on the Basis of a Deformable-Cell Method --Free Surfaces, Density Interfaces and Open Boundaries--", Comp. Fluids, Special Issue of 3ISCFD-Nagoya, in print.
- [6] 水田 洋, "数値流体解析における境界条件の統一的な取扱いについて", 水工学論文集, 第34巻, pp.641-646 (1990).
- [7] 水田 洋, "Lagrange-Euler混合法による自由表面及び密度界面の数値解析", 第29回水理講演会論文集, pp.721-726 (1985).
- [8] 水田 洋, "非圧縮性流体の数値解析に及ぼす境界処理の影響", 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1990).