

高速流における水際線の取扱いとその適用について

High Velocity Flow with Free Boundary in Open Channels

岩佐義朗^{*}・細田尚^{**}・河村直明^{***}・米山望^{***}

By Y. IWASA, T. HOSODA, N. KAWAMURA and N. YONEYAMA

The method of calculation of high velocity flow with free boundary is developed by means of the method of characteristics. The basic equations used here are the plane two-dimensional flow equations in the steady state. These equations are transformed into the characteristic form. It is shown that the position of free boundary is determined as the intersection of stream line (λ_1 -line) and another characteristic line λ_2 or λ_3 . The hydraulic variables along the free boundary are also calculated by using the relation satisfied along λ_1 - and λ_2 -line or λ_1 - and λ_3 -line. The numerical method shown here is applied for some typical high velocity flows with free boundaries studied by Rouse and Knapp. The calculated results are compared with the previous experimental results in order to verify the method of calculation.

Keywords: high velocity flow, oscillation of free surface, method of characteristics

1. 緒言

本研究は、水深がゼロとなる線（以後、水際線と呼ぶ。）の変動を考慮した開水路高速流に関する数値解析法について考察したものである。開水路高速流の研究は、Ippen¹⁾がまとめているように、古くはダム水利構造物の設計のために行われてきた。さらに、雨水排除施設やレジャー施設において、種々の断面形状をもつ螺旋水路などが用いられるようになり、そこでは複雑に変化する水面形が生じている。このような高速流の水面形解析を行うときの問題点の一つに、断面形状に応じて自在に変動する水際線の位置の決定が挙げられる。この水際線の水理学的な取扱いを考察するとともに、従来の実験的及び理論的研究成果と比較することによりその妥当性を検討することが本研究の目的である。

2. 特性曲線法を用いた定式化²⁾

開水路高速流の水面は、流れ方向だけでなく水路幅方向にもかなりの変化を示すため、少なくとも平面流れとしての解析を行う必要がある。まず、このための基礎式を示し、水面形解析を行うための定式化について述べよう。

2. 1 基礎式と特性曲線上の関係式

基礎式として、慣用の静水圧分布を仮定した定常状態での平面流れの式を用いる。それは、図-1に示

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室

*** 学生員 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻

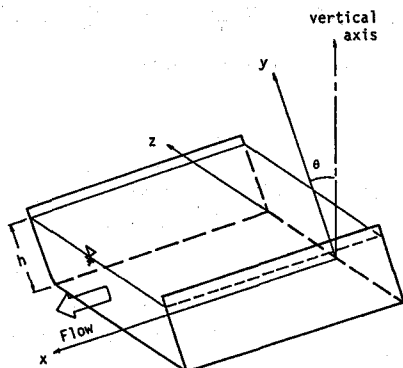


図-1 座標系

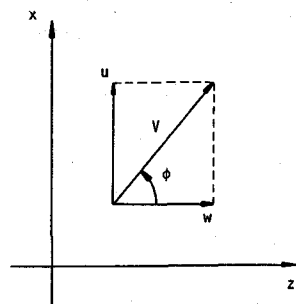


図-2 u-w平面への変換

す座標系のもとで、簡単のため行列表示を用いて示せば次のようになる。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial z} = B \quad (1)$$

(1) 式において、 U, A_1, A_2, B は次のように定義される。

$$U = \begin{bmatrix} h \\ u \\ w \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} w & 0 & h \\ 0 & w & 0 \\ g & 0 & w \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ g \sin \theta - \tau_{bx}/\rho h \\ -\tau_{bz}/\rho h \end{bmatrix}$$

ここに、 (u, w) :水深平均流速ベクトルの x, z 成分、 h :水深、 (τ_{bx}, τ_{bz}) :水路床に作用する応力ベクトルの成分、 ρ :水の密度、 g :重力加速度、 θ :水路床勾配である。

(1) 式の特性曲線は $A_1^{-1} A_2$ の固有値を用いて表され、次式となる。

$$\lambda_1; \frac{dz}{dx} = \frac{w}{u} \quad \lambda_2; \frac{dz}{dx} = \frac{uw + \sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{u^2 - gh} \quad \lambda_3; \frac{dz}{dx} = \frac{uw - \sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{u^2 - gh} \quad (2)$$

(2) 式中、 λ_1 は流線を表す。また、 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ に対応する固有ベクトルを μ_i とし、 $\mu_i A_1^{-1}$ を (1) 式に左から乗ずることにより、特性曲線上の関係式 (3) が導かれる。

$$\mu_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + A_1^{-1} A_2 \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \mu_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \mu_i A_1^{-1} B \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

(3) 式を λ_1 及び λ_2 に関して書き下せば次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) + \frac{w}{u} \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) = \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho gh} - \frac{\tau_{bz} w}{\rho gh u} \quad (4-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{hu} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{w}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = \left(g \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho h} \right) \frac{uw + \sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{u(gh - u^2)} - \frac{\tau_{bz}}{\rho gu} \end{aligned} \quad (4-b)$$

2. 2 u-w 平面への変換

(4-a) 式は流線に沿って成立するベルヌーイの式であり、水路床勾配及び底面せん断応力を無視するとき流れの全域で成立する (5) 式となる。

$$(u^2 + w^2)/2g + h = H_0 \quad (5)$$

(4-b) 式を、水際線の取扱いの考察に便利のように変数変換する。すなわち、(4-b) 式右辺を無視するとき、 $V = \sqrt{u^2 + w^2}$ と $u = V \sin \phi$, $w = V \cos \phi$ を用いて書き換えれば次式が得られる (図-2 参照)。ただし、(6) 式の誘導には (5) 式を用いている。

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} = - \frac{\sqrt{H_0 - V^2/2g}}{\sqrt{3V^2/2g - H_0}} \quad (6)$$

3. 水際線の取扱いとその応用例

次に、(5) 式及び (6) 式を用いて水際線の取扱いについて考察する。さらに、水際線の移動を考慮した数値解析法を示し、その応用例として急勾配水路急拡部の流れの水面形を計算する。

3.1 急勾配水路急拡部の流れ

急勾配水路急拡部では、Rouse³⁾ が実験的に検討しているように、水際線を伴いながら放射状に拡がる流れが生じる (図-3 参照)。まず、簡単のため路床勾配及び底面せん断応力を無視するとき、流れの水深及び流速が (5) 式及び (6) 式で定められることを示す。図-4 は、流れを覆う λ_2 及び λ_3 で構成される特性曲線網の概略である。この図から解るように、流れは I, II 及び III の 3 領域に区分され、I は上流端の水深及び流速がそのまま保たれる領域、II は水際線の始点である B 点から放射状に出る特性曲線 (λ_3) 上で水深及び流速が一定となる領域、さらに III は B 点から出発した特性曲線が x 軸 (水路中心軸) で反射したものと B 点から出発した特性曲線の交点として水理量が定まる領域である。図-4 の A~E 点を (6) 式の解 (It' サイロイド' 曲線) を用いて $u-w$ 平面に変換すれば図-5 のようになる。この図から、水際線上の水理量が (5) 式と λ_2 上の関係式から定められることが理解できる。すなわち、水深がゼロの線は図-5 では半径 $\sqrt{2gH_0}$ の円周に対応し、領域 I 内の C 点を出発した特性曲線 (c-line) は It' サイロイド' 曲線を描きながらこの円周上の D 点でとまる。このように、水際線上の水理量は (5) 式 (より一般には流線上で成立する (4-a) 式) と λ_2 上の関係式 (4-b) から定められ、 λ_2 は水際線上で止まることがわかる。

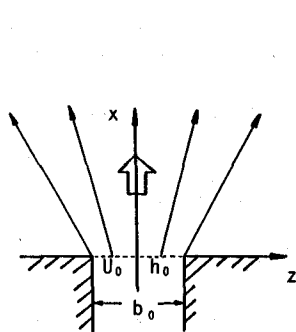


図-3 急勾配水路急拡部の流れ

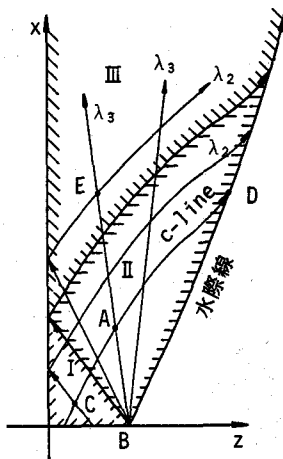


図-4 特性曲線網

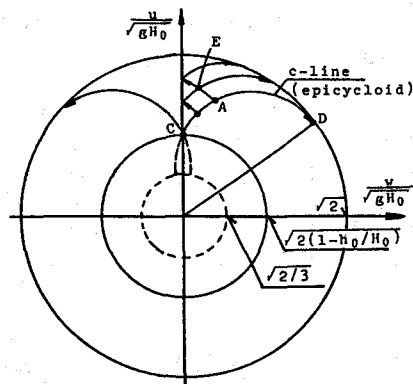


図-5 $u-w$ 平面での特性曲線の挙動

3.2 数値解析法

実際に水面形解析を行うときには、3.1 で述べた方法は煩雑であり、路床勾配及び底面せん断応力を考慮するときにはほとんど不可能と考えられる。そこで、上述したことを念頭において、(3) 式を適当に離散化して数値解析を行う。図-6 に離散化の方法を示した。 $x = k \cdot \Delta x (=x_k)$ 上の格子点の水理量が既知のとき、 $x = x_{k+1}$ 上の格子点を P とし、P を通る 3 本の特性曲線と $x = x_k$ の交点を $Q_i (i=1, 2, 3)$ とすると、未

知量 U_P は (7) 式で求められる。ただし、 Q_i 点の位置と水理量 U_{Q_i} は、 $x=x_k$ 上の格子点の値を用いて線形補間によって求めた。

$$\lambda_i; (\mu_i)_{Q_i} \cdot \left(\frac{U_P - U_{Q_i}}{\Delta x} \right) = (\mu_i A_1^{-1} B)_{Q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

水際線の水理量は次のようにして求められる。図-7 において $x=x_k$ の水際の位置を Q_k とすると、既知の (u_{Qk}, w_{Qk}) を用いて $x=x_{k+1}$ 上の P 点の座標を $(x_{k+1}, z_k + \Delta x \cdot (w_{Qk}/u_{Qk}))$ として定める。P 点で止まる λ_2 と x_k の交点 Q_2 の位置及び水理量を線形補間により定め、 $i=1$ 及び 2 とした (7) 式を連立して P 点の水理量が求められる。ただし、水際線上の水深は、底面せん断応力を無視するときには $h = 0$ とし、Manning 則を適用してせん断応力を評価するときには微小な値 h_e を与えた。

上流端境界条件は、計算上の上流端 $x/(b_0/2) = 0.25$ として、その上の水理量を 3. 1 の方法で求めた。

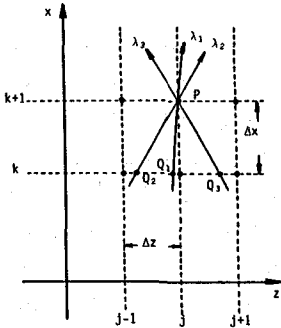


図-6 離散化の方法

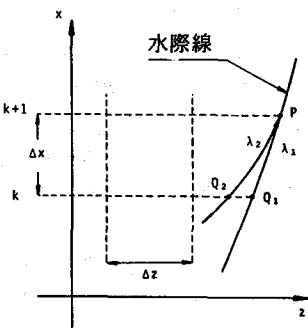


図-7 水際線の取扱い

3. 3 計算結果の考察

Rouse の行った実験に合わせて数値計算を行った。計算の水理諸量を表-1 に示した。図-8 は底面せん断応力を無視した Run-1 の水深分布である。放射状に広がる水面形が再現されている。水深の水路幅方向分布について Rouse の実験結果と比較したのが図-9 である。計算結果と実験結果は良く一致しているとともに、水深分布には底面せん断応力の影響は小さいことがわかる。しかし、図-10 に示した流速分布には底面せん断応力の影響が顕著に現れている。

表-1 計算の水理諸量

	Fr_0	$(b_0/2)/h_0$	$gn^2/h_0^{1/3}$	h_e/h_0
Run 1	2	—	—	—
Run 2-1	2	1	1.68×10^{-3}	0.1
2	2	2	2.11×10^{-3}	0.1
3	2	4	2.66×10^{-3}	0.1

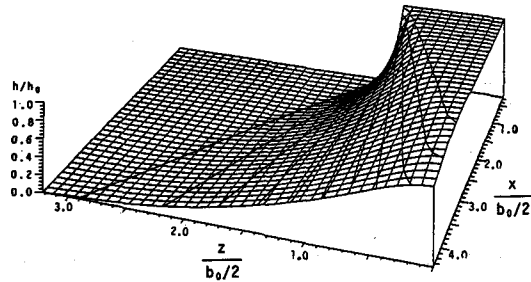


図-8 水面形(Run-1)

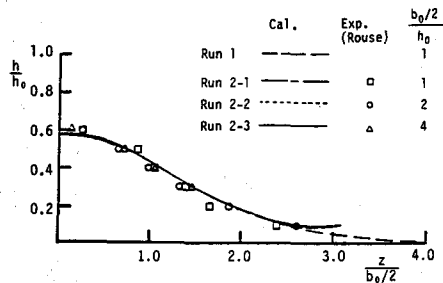


図-9 水深の横断分布 ($x/(b_0/2) = 3$)

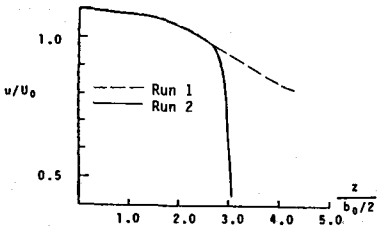


図-10 流速の横断分布 ($x/(b_0/2) = 3$)

4. 台形断面を有する湾曲水路の振動流への適用

3. で述べた数値解析法を台形断面を有する湾曲水路の高速流に適用しよう。この流れには内岸側と外岸側に二つの振動する水際線が存在する。

4. 1 水面形解析法

(1) 式に示した平面流れの基礎式を図-11に示した円柱座標系を用いて表せば次のようになる。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + A_2 \frac{\partial U}{r \partial \theta} = B \quad (8)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ u \\ w \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} rv_r & rh & 0 \\ g & v_r & 0 \\ 0 & 0 & v_r \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} rv_\theta & 0 & rh \\ 0 & v_\theta & 0 \\ g & 0 & v_\theta \end{bmatrix}$$

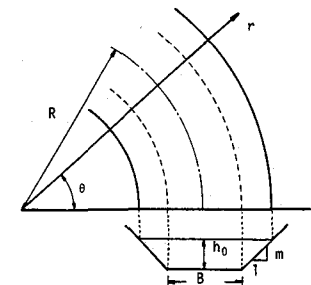


図-11 座標系

$$B = \begin{bmatrix} -v_r h \\ v_\theta^2 - \tau_{rr}/\rho h - g \frac{\partial y_b}{\partial r} \\ -v_r v_\theta / r - \tau_{r\theta}/\rho h - g \frac{\partial y_b}{r \partial \theta} \end{bmatrix}$$

ここに、 v_r, v_θ : 流速ベクトルの r, θ 方向成分、 y_b : 規準水平面からの路床の高さである。

特性曲線及びその上で成立する関係式は2. で示した(2)及び(3)式とほぼ同じなので省略する。数値解析を行うにあたっての離散化も、図-12を参照して、3. で示した方法を用いて行われる。水際線が2種類存在しかつ振動を繰り返すため、その取扱いは単調に変化していた急拡部の流れの場合よりも多少複雑であるが、基本的には3. と同様である。すなわち、外岸側については、 θ_{i+1} の位置 O_{i+1} を $r_{O_{i+1}} = r_{O_i} + (v_{r_{O_i}}/v_{\theta_{O_i}}) \cdot r_{O_i} d\theta$ として定めた。また O_{i+1} の水量は、流線上の関係式を離散化した

$$\frac{E_{O_{i+1}} - E_{O_i}}{r \Delta \theta} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\tau_{\theta\theta}}{\rho h} \right)_{O_i} - \left(\frac{v_r \tau_{rr}}{g v_\theta \rho h} \right)_{O_i}$$

$$E_O = \left(h + y_b + \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2g} \right)_O$$

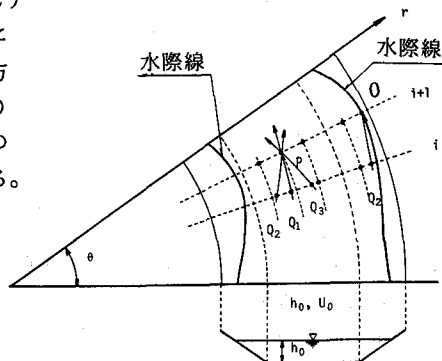


図-12 離散化の方法

及び λ_2 上の関係式と、せん断応力を無視したときには $h = 0$ 、考慮したときには微小な水深 $h = h_e$ を連立することにより求められる。内岸側も同様である。

4. 2 計算結果の考察

(a) Lenauの解との比較⁴⁾

Lenauは、摂動法を用いて外岸側で最初に最大水位が生じる位置 θ_{max} と水位偏差(最大水位と断面平均水位の差) Δh_{max} に関して次式を導いている。(記号の説明は図-11に示した。)

$$\frac{\Delta h_{max}}{h_0} = Fr_0^2 \cdot \frac{B}{R_0} \cdot \left(2m \cdot \frac{h_0}{B} + 1 \right) \quad \theta_{max} = Fr_0 \cdot \frac{B}{R_0} \cdot \left(2m \cdot \frac{h_0}{B} + 1 \right) \cdot \beta \quad (9)$$

計算結果と(9)式を比較してみよう。表-2は計算に用いた水理諸量であり、 h_0/B を一定として R/B 及び Froude数を変化させている。まず、Run-2 ($Fr_0=2$)の水深の水路幅方向分布を示したのが図-13である。水面が振動しながら変化している様子が再現されている。次に、 Δh_{max} と θ_{max} について計算結果と(9)式を比較したのが図-14及び図-15である(せん断応力を無視した結果を示している)。これらの図から、 R/B の増加(摂動パラメータの減少)とともに計算結果が(9)式に漸近していくことがわかる。

表-2 計算の水力諸量
(Lenauの解との比較)

	R/B	Fr ₀	h ₀ /B	m
Run 1	10	2, 4, 6, 8	0.2	2
Run 2	20	2, 4, 6, 8	0.2	2
Run 3	100	2, 4, 6, 8	0.2	2
Run 4	200	2, 4, 6, 8	0.2	2

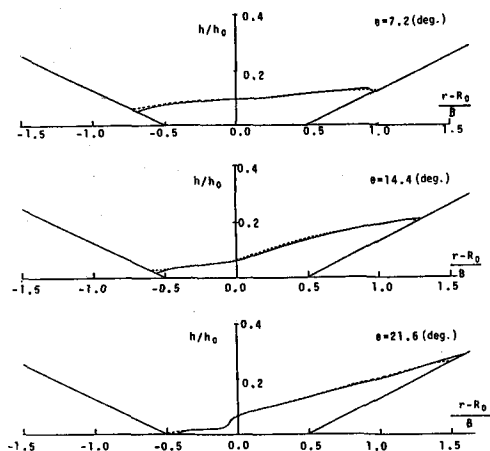


図-13 水深の横断分布 (Run 2, Fr₀=2)

(b) Knappの実験結果との比較⁵⁾

Knappは、湾曲水路の高速流に関する実験的研究のなかで、台形断面水路を用いた実験も行っている。この実験の条件に合わせて数値計算を行った(せん断応力を無視している)。計算の水力諸量を表-3に示した。図-16は外岸側の水際線の水位の変化を示したものである。Run K-3を除けば計算結果と実験結果はよく一致している。

5. 結語

本研究は、水際線の変動を考慮した開水路高速流の水面形解析法について考察したものである。特性曲線法を用いて水際線の位置及びその上の水量を定める方法について説明し、これを急勾配水路急拡部の流れ及び台形断面を有する湾曲水路の高速流に適用した。計算結果は従来の実験的及び理論的結果と概ね一致し、数値解析法の妥当性が示されたと考えられる。

参考文献

- (1) Ippen, A.T.: Mechanics of Supercritical Flow, Trans. ASCE 116, 1951, pp. 265-295.
- (2) 岩佐・細田: 漸縮水路の高速流に関する数値解析, 京大防災年報第32号B-2, 1989, pp. 657-667.
- (3) Rouse, H and Bhoot, B.D.: Design of Channel Expansion, Trans. ASCE 116, 1951, pp. 347-363.
- (4) Lenau, C.W.: Supercritical Flow in Bends of Trapezoidal Section, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol. 105, No. EM1, 1979, pp. 43-54.
- (5) Knapp, R.T.: Design of Channel Curves for Supercritical flow, Trans. ASCE, 1951, pp. 296-325.

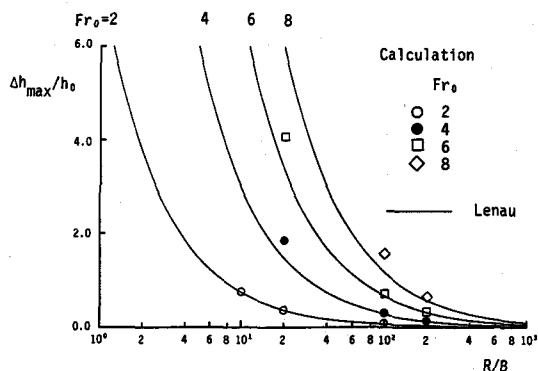


図-14 Lenauの解との比較 (Δh_{max})

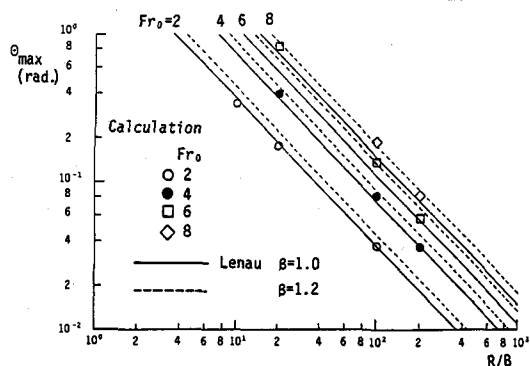


図-15 Lenauの解との比較 (θ_{max})

表-3 計算の水力諸量
(Knappの実験との比較)

	B(m)	h ₀ (m)	R ₀ (m)	Q(m ³ /s)	m
Run K-1	0.3048	8.44x10 ⁻²	7.62	1.56x10 ⁻¹	1.5
Run K-2	0.3048	7.74x10 ⁻²	7.62	1.28x10 ⁻¹	1.5
Run K-3	0.3048	7.05x10 ⁻²	7.62	0.99x10 ⁻¹	1.5
Run K-4	0.3048	5.15x10 ⁻²	7.62	0.71x10 ⁻¹	1.5

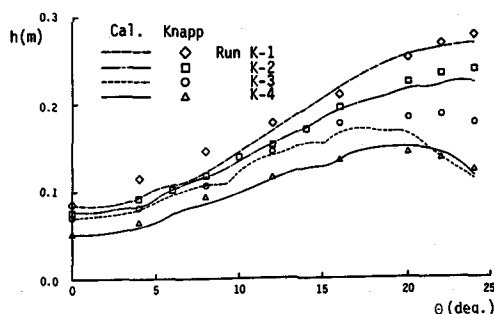


図-16 Knappの実験結果との比較
(外岸側水際線の水位)