

連続体モデルに基づく流砂量式の誘導

Derivation of Bed-load Formula from a View Point of Continuum Body

江頭 進治^{*}・芦田 和男^{**}・高濱 淳一郎^{***}・田野中 新^{***}

By Shinji EGASHIRA, Kazuo ASHIDA, Jun-ichiro TAKAHAMA and Shin TANONAKA

It is emphasized that there are no significant differences between the dynamics of debris flow and bed load so far as bed shear stress is large enough for forming a grain sheet flow. The constitutive equation, which is developed for debris flows, is applied in order to discuss the characteristics of bed-load such as the depth of bed-load layer h_s , particle-concentration $c(z)$ and velocity-distribution of bed-load layer $u(z)$. A bed-load formula is developed by integrating the product of $u(z)$ and $c(z)$ from 0 to h_s . According to this, non-dimensional bed-load rate is proportional to $\tau_*^{5/2}$.

Key words: bed-load, debris flow, grain flow, constitutive equation, continuum mechanics

1. 緒言

移動床水理現象における掃流砂の果たす役割がいかに大きいかは、掃流砂量式に関する研究の歴史から明らかであって、これまでに多くの流砂量式が提案されている。これらの誘導過程についてみれば、次元解析に基づくもの、砂粒子の運動を確率変数で表示するもの、剛体を含めた質点系力学を用いて表示しようとするものなどがある。このような方法で導かれた結果には、実用的な面では優れたものも少なくない。しかし、科学技術先進国には、それぞれによく用いられている流砂量式が必ず一つはあるような状況である。これは流砂量式の誘導過程において経験の異なる各々の研究者の直感が重要な要素になっており、さらに厳しい見方をすれば、力学原理に則して議論することがいかに難しいかを物語っている。

著者らは、土石流に代表されるような水と固体粒子の混合物の流れについて、連続体力学の立場から研究を進めており、これまでにその構成式を提案し、これに基づいて流速分布や濃度分布の解析を行う¹⁾とともに、これらの応用として土石流の流動・堆積現象のシミュレーションを行っている²⁾。このような研究を通して、土石流と掃流砂の力学の違いは何か、とくに、掃流力が大きいための掃流砂の運動と土石流の運動との間の違いについて検討し、連続体として表現する場合には両者には本質的な違いはないという結論に達した³⁾。そこで、本研究においては、掃流砂を水と固体粒子の混合物の流れとして扱ったとき、掃流砂の移動

* 正会員 工博 京大防災研究所助教授 (〒611 京都府宇治市五ヶ庄)

** 正会員 工博 京大防災研究所教授 (〒611 京都府宇治市五ヶ庄)

*** 学生員 京都大学大学院

層厚や掃流砂量式がどのように導かれるかを検討する。

2. 流砂モデル

2.1 流動砂層の応力構造

図-1のように、砂層の流動厚 h_s 、上方の水だけの流動層 h_w および全流動層 h_t をもつ2次元等流を考える。砂層の流れに関する運動方程式は x , z 方向に対してそれぞれ次のように与えられる。

$$0 = \rho_m g \sin \theta + \partial \tau / \partial z \quad (1)$$

$$0 = -\rho_m g \cos \theta - \partial p / \partial z \quad (2)$$

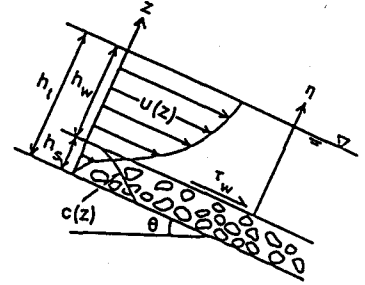


図-1. 2次元等流の模式図。

ここに、 ρ_m は混合物の密度である。砂の密度を σ 、水の密度を ρ 、砂の体積濃度を c とすると、これは次式で表される。

$$\rho_m = \rho \left\{ (\sigma / \rho - 1) c + 1 \right\} \quad (3)$$

式(1)に式(3)を代入して、これを z から h_s まで積分すれば外力としてのせん断力が次式のように求められる。

$$\tau(z) = \tau_w + \rho g \sin \theta \int_z^{h_s} \left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c + 1 \right\} dz \quad (4)$$

ここに、 τ_w は $z = h_s$ におけるせん断力である。

$$\tau_w = \rho g h_w \sin \theta \quad (5)$$

一方、式(4)の $\tau(z)$ は、一樣砂と水との混合物の流れに関する江頭・芦田¹⁾の研究によれば

$$\tau(z) = p_s \tan \phi_s + k_g \sigma (1 - e^2) d^2 c^{1/3} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + k_f \rho d^2 \frac{(1 - c)^{5/3}}{c^{2/3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (6)$$

ここに、 p_s は粒子の骨格応力あるいは静的な圧力、 ϕ_s は粒子の内部摩擦角、 e は粒子の反発係数、 d は粒子径、 k_g および k_f は係数であって、それぞれ次のような値をとる¹⁾。

$$k_g \approx 0.0828, \sqrt{k_f} \approx 0.4 \sim 0.5$$

式(6)の右辺第1項は降伏応力、第2項は非弾性衝突による応力、第3項は間隙水の乱れによる応力である^{1), 4)}。

圧力 p は、江頭・芦田¹⁾によれば、間隙水の圧力 p_w 、粒子骨格応力 p_s および衝突に伴う反発力 p_d からなっており、これらは次式のように与えられる。

$$p = p_w + p_s + p_d \quad (7)$$

ここで、 p_w は静水圧分布に従うものとする。さらに、動的な応力で支えられる外力と粒子骨格で支えられる外力との比を $\alpha : 1$ として、近似的に $\alpha \doteq \text{const.}$ とすれば、

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\frac{\rho g}{1 + \alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c \cos \theta \quad (8)$$

のように与えられる。 p_d は宮本⁴⁾によれば粒子衝突時に保存されるエネルギーに対応しており、

$$\frac{\partial p_d}{\partial z} = k_g \sigma d^2 e^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c^{1/3} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (9)$$

式(7), (8), (9)より

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \cos \theta - \frac{\rho g}{1 + \alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c \cos \theta + k_g \sigma d^2 e^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c^{1/3} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (10)$$

以上より流速分布および濃度分布に関する微分方程式が得られる。すなわち式(4), (6)より

$$(f_f + f_g) d^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = u_{*w}^2 + g \sin \theta \int_z^{h_s} \left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c + 1 \right\} dz - \frac{\tan \phi_s}{1 + \alpha} g \cos \theta \int_z^{h_s} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c dz \quad (11)$$

が得られ、式(2), (3), (10)より次式が導かれる。

$$k_g e^2 \frac{\sigma}{\rho} d^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c^{1/3} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} = -\frac{\alpha}{1 + \alpha} g \cos \theta \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c \quad (12)$$

ここに、

$$f_f = k_f \frac{(1-c)^{5/3}}{c^{2/3}}, f_g = k_g \frac{\sigma}{\rho} (1-c^2) c^{1/3}, u_{*w} = \sqrt{g h_w \sin \theta}, \alpha \simeq 0.25$$

である。式(11), (12)によれば、速度場と濃度場はinteractionによって互いに決定されていることが分かる。

2. 2 水流の層の応力と流速分布

等流状態において、水の運動方程式は式(1), (2)の ρ_m を ρ に置き換えたものになる。これより外力としてのせん断力は

$$\tau(\eta) = \rho g \sin \theta (h_w - \eta) \quad (13)$$

ここに、 h_w は水流の層の厚さで、 η は図-1に示すように砂層と水流層との境界から垂直上向きにとった座標である。一方、内力はプラントルの混合距離理論を用いれば、

$$\tau(\eta) = \rho \ell^2 (du/d\eta)^2 \quad (14)$$

のようである。ここに、 ℓ は混合距離であって、 $\eta = 0$ ，すなわち境界において有限値 ℓ_0 をもつものとして、次式を仮定する。

$$\ell = \ell_0 + \kappa \eta \quad (15)$$

ここに、 κ はカルマン定数である。 ℓ_0 は砂層の流れの間隙スケールに対応するものであり、江頭・芦田らの研究¹⁾に従って次式を仮定する。

$$\ell_0 = \sqrt{k_f} \left(\frac{1-c}{c} \right)^{1/3} d \quad (16)$$

式(13), (14), (15)により次式を得る。

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{u_{*w}}{\ell_0 + \kappa \eta} \sqrt{1 - \frac{\eta}{h_w}} \quad (17)$$

いま、 $u_{*w} = \sqrt{1 - \eta/h_w} = \text{const.}$ として境界近傍の流速分布を考えることにすれば、

$$u(\eta) = u_i + \frac{u_{*w}}{\kappa} \ln \frac{\ell_0 + \kappa \eta}{\ell_0} \quad (18)$$

ここに、 u_i は境界($\eta = 0$)における流速であって、これについては後述する。

2. 3 砂層の流速分布と濃度分布

(1) 近似解

流動砂層の濃度は、流動層と静止層との境界において静止堆積層の濃度 c_* に接続し、水流層との境界において0となる。そこで、移動砂層の平均濃度を

$$\bar{c} = c_*/2 \quad (19)$$

と仮定し、 $c(z) = \bar{c}$ として流速分布を求めよう。このとき、式(11)は次のようになる。

$$(f_f + f_g) d^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} \right)^2 = \frac{h_s u_{*w}^2}{g} - h_s^2 \beta (1 - z') \cos \theta \quad (20)$$

ここに、 $u' = u/\sqrt{g h_s}$ 、 $z' = z/h_s$ 、 β は次式で定義されている。

$$\beta = \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) \bar{c} \frac{\tan \phi_s}{1 + \alpha} - \left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) \bar{c} + 1 \right\} \tan \theta \quad (21)$$

式(20)を $z' = 0$ で $u' = 0$ として、後述の式(24)を用いれば、流速分布が次のように得られる。

$$u'(z') = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{f_f + f_g}} \frac{1}{B} \{A + B(1 - z')\}^{3/2} \quad (22)$$

ここに、 A 、 B は次のようである。

$$A = \frac{h_s u_{*w}^2}{g d^2}, B = -\left(\frac{h_s}{d} \right)^2 \beta \cos \theta$$

なお、上式によれば、式(18)における境界流速は次式で与えられる。

$$u_i = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{f_f + f_g}} \frac{A^{3/2}}{B} \sqrt{g h_s} \quad (23)$$

(2) 厳密解

式(11)および式(12)から明らかなように、流速分布と濃度分布はこれらの式の連立解として求められる。これらの解は解析的には得られないので、繰返し計算によって求める必要がある。まず、 $c(z) = \text{const.}$ として式(11)より流速分布を求め、これを式(12)に代入して濃度分布を計算するような方法で、両者が一定の分布形に収束するまで繰返し計算を行えば、厳密解が得られる。このときの境界条件は、 $z' = 0$ において $u' = 0$ および $c = c_s$ である。また、水流の層との境界は、本理論の基礎となっている式(6)が $c = 0$ において定義できないことを考慮して、 $c = 0.05$ となる位置を選ぶことにする。

図-2には、一例として流速分布に関する実験値、厳密解および近似解を示すとともに、掃流層と水流層との境界を示している³⁾。図中、 θ は平衡河床勾配、 d は粒子径、 q_s は流砂量、 q_w は給水量である。計算に用いた諸量は、 $\tan \phi_s = 0.8$ 、 $\sqrt{k_f} = 0.4$ などである。

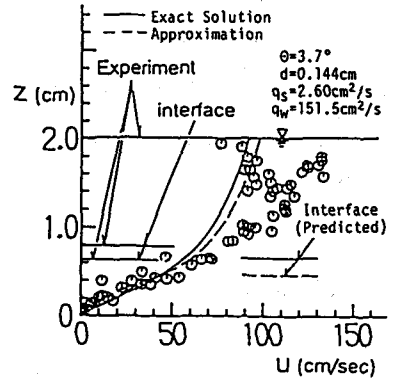


図-2. 流速分布に関する実験値、厳密解および近似解。

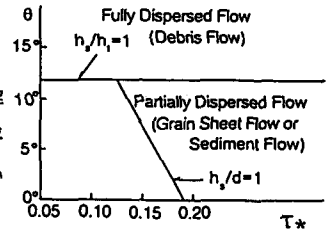


図-3. 流砂形態。

2. 4 掃流層の厚さと流砂形態

式(20)から明らかなように、砂層の流動は同式の右辺が正のときのみ起こり、 $z' = 0$ においては速度勾配も流速も0となる。したがって、 $z' = 0$ において次の関係が恒等的に成り立つ。

$$A + B = 0$$

さらに、図-1を参照すれば、

$$h_s + h_w = h_t$$

ここに、 h_t は全流動層(砂と水流)の厚さである。式(24)、(25)より、全流動層に対する流動砂層の厚さの比は次のように導かれる。

$$\frac{h_s}{h_t} = \frac{2 \tan \theta}{(\sigma/\rho - 1) c_s \{ \tan \phi_s / (1 + \alpha) - \tan \theta \}} \quad (26)$$

上式は、また、次のようにも変形される。

$$\frac{h_s}{d} = \frac{2}{c_s \cos \theta \{ \tan \phi_s / (1 + \alpha) - \tan \theta \}} \tau_* \quad (27)$$

ここに、 $\tau_* = h_t \sin \theta / (\sigma/\rho - 1) d$ である。

式(26)の左辺を1とおけば、粒子が自由水面まで分散して流れる条件(土石流の形成条件)が得られ、式(27)の左辺を1とおけば、grain sheet flowの条件(1粒径以上の砂層が移動する条件)が得られる。

図-3はこれらの条件を $\tan \phi_s = 0.8$ 、 $c_s = 0.6$ 、 $\alpha = 0.25$ 、 $\sigma/\rho = 2.65$ として求めたものである。

図-4には、 h_s/h_t に関する著者ら³⁾および高橋⁵⁾の実験値と式(26)を示すとともに、式(11)および式(12)の連立解として得られる厳密解も示されている。図示の結果が示すように、厳密解の方が実験値によく一致しているが、近似解(式(26))でも十分現象を説明していることが分かる。図-5は、ガラスビーズ

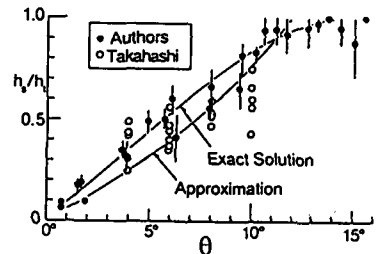


図-4. 移動砂層厚。

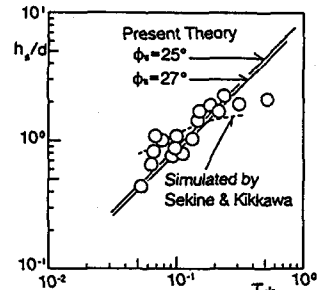


図-5. 平均跳躍高⁶⁾(ガラスビーズ)。

を用いて行われた関根・吉川⁶⁾の掃流砂(saltation)に関する実験値と式(27)を比較したものである。ここで、ガラスビーズの比重は $\sigma/\rho = 2.48$, $\phi_s = 25^\circ \sim 27^\circ$, $\cos \theta = 1$, $\tan \theta = 0$ としている。

図示の結果が示すように、関根・吉川の結果も式(27)によってほぼ説明できるようである。

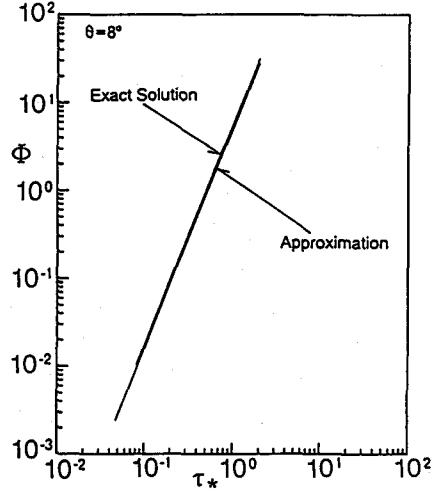


図-6. 式(30)と厳密解との比較。

3. 流砂量式

これまでに流速分布、濃度分布および流動砂層厚に関する議論を行った。流砂量式の定義は、次式で与えられる。

$$q_b = \int_0^{h_s} u(z) c(z) dz \quad (28)$$

前述の近似理論を上式に適用すれば、流砂量式が容易に導かれる。すなわち、 $u(z)$ に関して式(22)、 $c(z)$ に式(19)を適用すれば、

$$q_b = \frac{2}{15} \frac{\sqrt{g h_s}}{\sqrt{f_f + f_g}} A^{1/2} c_* h_s \quad (29)$$

さらに、上式の h_s に式(26)を適用して若干の変形を行い、無次元流砂量式の形に書き直せば、次式を得る。

$$\Phi = \frac{2}{15} \frac{1}{\sqrt{f_f + f_g}} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\beta^{1/2}}{(\beta + \tan \theta)^{5/2}} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right)^2 c_* \tau_*^{5/2} \quad (30A)$$

あるいは、 β の定義を用いて元の変数で書き改めれば、

$$\Phi = \frac{8}{15} \frac{1}{\sqrt{f_f + f_g}} \frac{\left[\frac{\tan \phi_s}{1 + \alpha} - \left\{ 1 + \frac{2}{(\sigma/\rho - 1) c_*} \right\} \tan \theta \right]^{1/2}}{\cos^2 \theta \left\{ \frac{\tan \phi_s}{1 + \alpha} - \tan \theta \right\}^{5/2}} \frac{1}{c_*} \tau_*^{5/2} \quad (30B)$$

ここに、
$$\Phi = \frac{q_b}{\sqrt{(\sigma/\rho - 1) g d^3}}, \quad \tau_* = \frac{g h_t \sin \theta}{(\sigma/\rho - 1) g d}$$

である。上式は無次元流砂量が無次元掃流力の $5/2$ 乗に比例することを示している。

以上は流速分布および濃度分布に関する近似を行った場合の流砂量式であるが、厳密解に基づく流砂量も算定できる。すなわち、これは $u(z)$, $c(z)$ および h_s を2.3(2)の方法にしたがって求め、これらを式(28)に適用することによって得られる。

図-6は $\theta = 8^\circ$ としたときの式(30)と厳密解による無次元流砂量を比較したものである。これによれば、両者の差異は顕著でなく、厳密解を得るために複雑な計算を行わなくとも、流砂量は近似理論によって十分に評価できることが分かる。なお、近似理論と厳密解との差は、 $\theta = 3^\circ$ では殆どなく、 $\theta = 10^\circ$ では図-6に示すものよりも少し大きくなるが、これらは無視できる程度のものである。また、無次元流砂量と無次元掃流力との関係は直感的には θ によって少し変化するように見えるが、式(30)の τ_* の因数部分の θ に対する変化は非常に鈍感であって、これも殆ど無視できる程度のものである。

4. 流砂量式の適用性

近似式と厳密解とはほぼ同じ流砂量を与えるので、ここでは式(30)と著者らの実験データおよび水山⁷⁾の実験データとを比較してみよう。図-7には式(30)と著者らの実験データを示している³⁾。図示のデータは

勾配が 8° 以上のものとそれ以下のものに分類されている。さらに、本理論の適用領域外と思われる流動厚の小さい

$h_s/d < 1$ のデータについても明記されている。図示の結果が示すように $h_s/d < 1$ のデータは流砂量式よりも上方にプロットされているが、それ以外のデータと式(30)とはかなりよく一致しているのが分かる。

図-8は、式(30)と水山のデータとを比較している。データの分類は図-7のものと同じである。 $h_s/d < 1$ のデータは図-7のものと同様に式(30)の上方にくるが、それ以外のデータは同式によってかなりよく推定されているのが分かる。

以上、流砂量式(30)と実験データとを比較したところ、掃流力の小さい領域のデータを除けば、式(30)によって流砂量をほぼ評価できるようである。これは、掃流力が大きく、流動砂層厚が $h_s/d > 1$ になるような流れにおいては、土石流であれ、掃流砂であれ、これらの運動を規定する力学は同じであって、これらを統一的に扱えることを示している。

5. 結語

掃流砂を水と固体粒子の混合物の流れと考えて、土石流に関する著者らの構成式をこれに適用し、掃流砂の移動層厚、流速分布および濃度分布を解析するとともに流砂量式を導いた。これは図-3に示す grain sheet flow ($h_s/d > 1$) の限界条件よりも掃流力の大きい領域を念頭において導かれている。

掃流力が小さく、砂が間欠的に運動するような条件においても、連続体としての解析はできる。しかし、この場合には粒子運動に伴うエネルギー散逸機構が式(6)に示すものとは少し異なってくる。例えば、同式の右辺第3項の散逸応力が純粹の粘性散逸応力に置き換えられるか、あるいは省略できるような形になるものと思われる。今後、掃流力の小さい領域における構成式についても考察を深め、連続体力学の観点から土石流や掃流砂を統一的に取り扱えるようにしたい。

最後に本研究の基礎となる構成式について、砂防地すべりセンターの宮本邦明氏、Univ. of Minnesotaの G.Parker氏、関根正人氏および Colorado State Univ. の P.Julien氏に有意義なコメントをいただいていることを記し、ここに深謝いたします。

参考文献

- 1) 江頭・芦田・矢島・高濱:土石流の構成則に関する研究,京大防災研年報 32号 B-2,1989,487-501.
- 2) 矢島啓・芦田和男・江頭進治:土石流の流動・堆積メカニズム,第45回土木学会,1990,II-133.
- 3) 江頭・芦田・高濱・田野中:エネルギー散逸機構に基づく流砂モデル,京大防災研年報,33号 B-2,1990,293-306
- 4) 宮本邦明:Newton流体を含む粒子流の流動機構に関する研究,立命館大学学位論文,1985.9,39-72.
- 5) 高橋保:土石流の停止,堆積機構に関する研究(3),京大防災研年報,25号 B-2,1982,327-348.
- 6) Sekine, M. and H. Kikkawa: A Fundamental Study on the Sediment Transport in an Open Channel Flow, Mem. School of Science & Engineering, Waseda Univ., No52., 1988, 103-141.
- 7) 水山高久:土石流から掃流に変化する勾配での流砂量,新砂防, Vol. 116, 1980, 1-6.

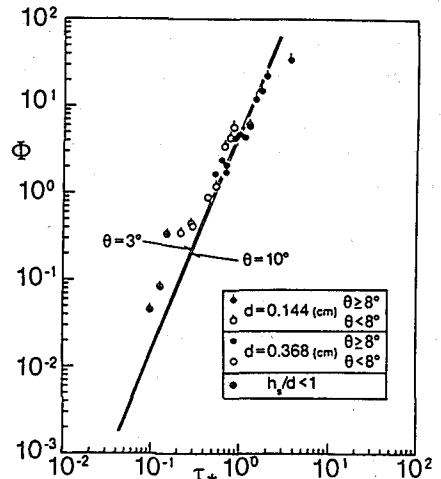


図-7. 式(30)と実験データとの比較。

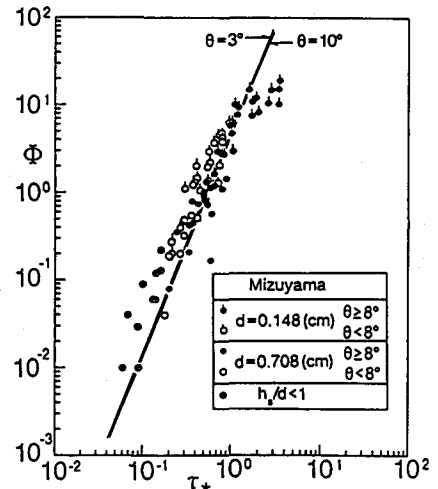


図-8. 式(30)と水山のデータとの比較。