

非平衡流砂運動を伴う砂州崩壊

Scouring of Sand Bars
Due to Non-equilibrium Sediment Transport

邵 小敏* 田中 仁** 首藤伸夫***

By Xiaomin SHAO, Hitoshi TANAKA and Nobuo SHUTO

The scouring process of sand bars due to overflow is experimentally, theoretically and numerically studied. The bed load formula of Meyer Peter-Müller is extended to include the effects of local slope and pressure gradient, by using the experimental results. The equation of motion is derived to describe the sand motion under non-equilibrium condition. Numerical computations based upon these relationships simulate very well the temporal change of the measured profiles of sand bars.

Keywords: Bedload formulas, Non-equilibrium sediment, transport

1. はじめに

発達した河口砂州により河口位置がきわめて偏倚している場合、または河口が閉塞されている場合に大出水があると、流れは砂州を乗り越え、これを洗掘して新河口を形成する。このような砂州の崩壊機構について土屋ら¹⁾は、従来の掃流砂量公式を用いた河床変動計算では崩壊速度を過小に見積ることを報告している。しかし、その原因として掃流砂量公式、底面摩擦力の評価のいずれに問題があるかは必ずしも明確ではない。

本研究では、移動床と固定床について、まず、砂移動量、越流流量、剪断力等の実験を行なった。次に、砂移動の運動方程式を提案し、それに基づいて、数値計算により流砂量の非平衡性や底面勾配などの影響を再検討した。

2. 実験方法

2.1 移動床実験

実験は、幅15cm、高さ45cm、長さ5.5mの水路で行なった²⁾。下流端には量水堰が設置されている。水路中央部3m区間はガラス張りとなっており、その位置に砂州模型を設置した。実験条件を表-1に示す。表中の初期勾配とは砂州下流側の初期斜面勾配を表わす。また、「上げ底あり」とは、観測区間内の砂面上に跳水が生じないように、長さ1mにわたって底面を高さ1cmだけ高めたことを意味する。水面及び砂面の時間的変化をカメラにより撮影し、これをディジタイザーで読み取って数値化した。

2.2 固定床実験

* 学生員 工修 東北大学大学院 博士後期課程

(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

** 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科

(同上)

*** 正会員 工博 東北大学教授 工学部災害制御研究センター

(同上)

実験RUN30の移動床実験で得られた崩壊途中の砂州形状を三種選び、その固定模型をベニヤ板で作製した。その表面は砂粒を張り付け、移動床実験での粗度と同一になる様に調整した。水位はポイントゲージで、流速分布は二成分レーザ流速計で測定した。

3. 非平衡流砂量微分方程式の誘導

流れの空間的变化等の効果により、流砂量に非平衡性が生ずる。その影響に関する研究が多くなされている³⁾が、急勾配において、検討は十分ではない。ここで、運動量の保存則から急勾配の影響を含む非平衡状態での流砂量の支配方程式を導く。

河床高さを Z 、掃流層の上境界の高さを Z_1 、砂の濃度を C とすると、微小要素 ss に働く力を図-1に示した。 Z_1 の位置は浮遊砂と掃流砂の境界面である。本研究では、掃流状態で移動する砂のみを扱うものとする。

3.1 運動量保存式

微小要素 ss に働く力は次の通りである。まず、砂の重力 W は次式のように与えられる。

$$W = \sigma V g \Delta X \quad \dots\dots (1)$$

ただし、 σ は砂の密度、 g は重力加速度、 ΔX は微小区間の距離、また、 V は次式で与えられる掃流層の砂の厚さである。

$$V = \int_{Z_1}^Z C dZ \quad \dots\dots (2)$$

ここに、 C は砂の濃度である。

つぎに、浮力 B は、本来ならば、流れの条件に依って推定すべきであるが、流れが場所的に激しく変化しないと仮定すれば、式(3)となり、その方向は底面に垂直である。

$$B = \rho V g \Delta X \cos \theta \quad \dots\dots (3)$$

ここに、 ρ は水の密度で、 θ は斜面勾配である。

抗力 D は次のように推定される。ひとつの

砂粒子の進行方向への投影面積を A 、抵抗係数を C_d とすると、単位面積当たりの移動砂数は $n=V/A$ であるから、区間 ss 内に存在する $n\Delta X$ 個の砂粒子に働く全抗力は

$$D = (\rho/2) C_d A (u_b - u_s)^2 n \Delta X = (\rho/2) C_d V (u_b - u_s)^2 \Delta X \quad \dots\dots (4)$$

となる。ここに、 u_b は底面近くの流速、 u_s は砂の平均移動速度である。

最後に、底面剪断力 τ は次式のように書ける²⁾。

$$\tau = \tau_{10} + (\sigma - \rho) V g \mu_r \cos \theta \quad \dots\dots (5)$$

ただし、 τ_{10} は斜面における限界掃流力であり、 μ_r は動摩擦係数である。限界状態における力のつりあいから、 τ_{10} と水平床での限界掃流力 τ_{00} には次の関係²⁾

$$\tau_{10} = C_i \tau_{00} \quad \dots\dots (6)$$

が得られる。ここに、 C_i は

$$C_i = \cos \theta (1 - \gamma \tan \theta / \mu_r) \quad \dots\dots (7)$$

表-1 実験条件

RUN	粒径	初期 勾配	頂部 長さ	供給 流量	上げ 底
	mm		s(cm)	$Q_s(\text{cm}^3/\text{s})$	
RUN70	0.51	5.7°	0	150.1	あり
RUN50	0.51	6.6°	0	96.1	あり
RUN31	0.38	7°	0	74.8	なし
RUN30	0.38	7°	0	211.8	なし
RUN07	0.51	8°	20	104.5	なし
RUN01	0.51	8°	40	110.7	なし
RUN02	0.51	8°	40	249.0	なし
RUN08	0.51	8°	20	261.1	なし
RUN03	0.51	8°	40	351.0	なし
RUN09	0.51	8°	20	355.2	なし
RUN65	0.51	9.3°	0	185.2	あり
RUN04	0.51	16°	40	106.0	なし
RUN21	0.51	16°	20	234.1	あり
RUN20	0.51	16°	40	238.7	あり
RUN05	0.51	16°	40	260.0	なし
RUN06	0.51	16°	40	362.0	なし
RUN10	0.51	20°	20	102.4	なし
RUN11	0.51	20°	20	256.9	なし
RUN12	0.51	20°	20	364.5	なし
RUN80	0.51	29.5°	0	278.9	あり

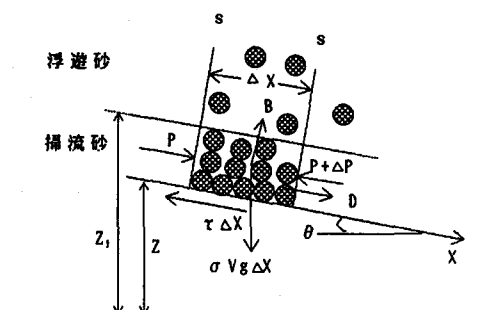


図-1 微小要素 ss に働く力

であり、 γ は浮力による影響を表わす係数で、等流の場合は次式で表わせる。

$$\gamma = \sigma / (\sigma - \rho) \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、添え字 l , 0 , C は、それぞれ、斜面上、水平床上、限界状態であることを表わす。

以上より、運動量保存則は次式のように表される。

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} (q_B) + \sigma \frac{\partial}{\partial x} (q_B u_s) = \sigma V g \sin \theta - \frac{\partial}{\partial x} (pV) + (\rho/2) C_d V (u_b - u_s)^2 - \tau_{l0} - (\sigma - \rho) V g \mu_f \cos \theta \quad \dots\dots (9)$$

ここに、 q_B は掃流砂量、 p は圧力である。

上式の両辺に u_s をかけ、次式を得る。

$$\sigma u_s \frac{\partial}{\partial t} (q_B) + \sigma u_s \frac{\partial}{\partial x} (q_B u_s) = \sigma q_B g \sin \theta - u_s \frac{\partial}{\partial x} (pV) + \{(\rho/2) C_d V (u_b - u_s)^2 - \tau_{l0}\} u_s - (\sigma - \rho) q_B g \mu_f \cos \theta \quad (10)$$

ここで、平衡状態を想定すれば、上式の左辺がゼロであるから、次式が得られる。

$$\{-\partial(pV)/\partial x + (\rho/2) C_d V (u_b - u_s)^2 - \tau_{l0}\} u_s = (\sigma - \rho) g \mu_f C_l q_{BIE} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 q_{BIE} は平衡掃流砂量である。左辺は流れからの有効仕事率である。非平衡状態においても(11)式で与えられる平衡状態の値を準用すれば、式(10)は次式のように書き改められる。

$$\sigma u_s \frac{\partial}{\partial t} (q_B) + \sigma u_s \frac{\partial}{\partial x} (q_B u_s) = (\sigma - \rho) g \mu_f C_l (q_{BIE} - q_B) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、流砂量の経時変化を無視すれば、上式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} (q_B u_s) = \frac{(\sigma - \rho) g \mu_f C_l}{\sigma u_s} (q_{BIE} - q_B) \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)は、砂の運動量 $q_B u_s$ の場所的变化が、非平衡流砂量 q_B と平衡流砂量 q_{BIE} との差を生むことを示している。

3.2 砂の移動速度 u_s

式(13)中の砂の移動速度 u_s について、次のように考える。底面に単位面積質量 m の砂粒子が移動開始後、平均移動速度 u_s になるまでの移動距離を L 、流れから受ける力を τ_l 、摩擦力と砂の重量の流れ方向の成分を f とすれば、ニュートンの第二法則から次式が得られる。

$$u_s^2 = 2(\tau_l - f)L/m \quad \dots\dots\dots (14)$$

底面剪断応力 τ_l が砂の移動限界剪断応力 τ_{l0} である時、 $u_s = 0$ であるから、式(14)から、 $f = \tau_{l0}$ になる。よって、 $B = 2L/m$ とおけば、式(14)は次式のように表わせる。

$$u_s^2 = B(\tau_l - \tau_{l0}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

B は、通常用いられる砂移動速度と有効摩擦速度の比 ($=8.5$) の自乗として 72.25 とする。

3.3 平衡流砂量 q_{BIE}

剪断力 τ_l による平衡流砂量 q_{BIE} は、次式のように与えられる²⁾。

$$q_{BIE}(\tau_l) = C_p \sqrt{C_l} q_{B0} (\tau_l / C_l - \tau_{l0}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 q_{B0} は水平床での剪断力 τ_l / C_l による平衡流砂量、 C_p は圧力修正係数で次式で表わされる。

$$C_p = \{ \tau_l - \tau_{l0} - \frac{\partial(pV)}{\partial x} \} / (\tau_l - \tau_{l0}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

水平床における平衡流砂量式として、Meyer Peter-Müller型の掃流砂量式、すなわち、

$$q_{B0E} / \sqrt{sgd^3} = a_s \{ (\tau_{l0} - \tau_{l0c}) / (sgd) \}^m \quad \dots\dots\dots (18)$$

を採用すれば、式(16)は

$$q_{BIE}(\tau_l) = a_s C_p \sqrt{C_l} \{ (\tau_l / C_l - \tau_{l0c}) / (sgd) \}^m \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。ただし、係数 a_s と m は実験定数である。

3.4 砂移動の微分方程式

式(15)を式(13)に代入すれば、式(20)を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ q_B (\tau_l - \tau_{l0})^{0.5} \} = \frac{\Lambda C_l}{(\tau_l - \tau_{l0})^{0.5}} (q_{BIE} - q_B) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、

$$\Lambda = \frac{\rho u_f l}{\beta_0 d} \quad \dots\dots\dots (21)$$

であり、剪断力および流砂量は次式のように無次元化した。

$$\phi_B = q_B / \sqrt{sgd^3}, \quad \phi_{BIE} = q_{BIE} / \sqrt{sgd^3} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\tau \cdot 1 = \tau_{10} / (sgd), \quad \tau \cdot 10 = \tau_{10} / (sgd) \quad \dots (23)$$

ここに、sは砂の水中比重である。

式(20)から、係数 Λ が大きい(粒径が小さい)ほど、あるいは $\tau \cdot 1$ が限界掃流力 $\tau \cdot 10$ に近い時、流砂量と平衡流砂量の差の絶対値は小さくなり、流砂量の非平衡性は減少する。

水平床の場合、 $\phi_B \partial(\tau \cdot 1 - \tau \cdot 10)^{0.5} / \partial X$ が無視できれば、式(20)は福岡・山坂⁴⁾、林・尾崎⁵⁾、Einsteinの半経験非平衡流砂量式と同じ形になる。

4. 実験結果及び考察

実験中は、上流側に一定流量を供給した。固定床実験でも、砂州越流量が供給流量と等しくなるには時間を要し、上流側水位は時間的に変化する。移動床実験では、越流が始まると、砂州の侵食、砂州頂部位置の低下が生じ、この影響によっても、上流側水位が時間的に変化する。このような原因により、砂州を越える流量は一定とはならない。

図-2は実験RUN21での単位幅あたりの越流流量を示す。実線は実験結果、丸印は砂州頂部での水深を限界水深 h_c として次式で推定した流量である。

$$q_c = \sqrt{gh_c^3} \quad \dots \dots \dots (24)$$

流量は時間的に増加し、 $t \approx 54s$ で供給流量 Q_0 の2倍となる。限界水深から推定された流量 q_c は $t=15s$ 以降、実験結果にかなり近い。支配断面が砂州頂部の最高点にあるとして良いことが判る。

平均流速を u 、摩擦速度を u_*c 、径深を R 、相当粗度を K_s とすれば、Manning-Strickler式

$$u/u_*c = 7.66(R/K_s)^{1/6} \quad \dots \dots \dots (25)$$

より摩擦速度が求まる。図-3は式(25)による計算値と、流速分布測定値から算定した摩擦速度 u_{*e} との比較である。越流流れは常流から射流への急変不等流であり、底面勾配も変化しているが、両者は良く一致している。これは、本研究においては越流水深が小さく、また底面勾配もあまり激しくは変化しないためであると考えられる。

時間的に変化する砂州断面形状から、局所的な流砂量を算定し、式(19)の係数を求める。縦軸 ϕ ($=\phi_{BIE}/(C_D \sqrt{C_1})$)、横軸 ψ ($=\tau \cdot 1/C_1 - \tau \cdot 00$)とする。図-4(a)は圧力差、勾配の修正を行わない場合($C_D=1, C_1=1$)である。図中の点線はMeyer Peter-Müllerの式、実線は実験値による曲線である。圧力差を修正すると、図-4(b)が得られる。(a)に比べると、点線に近いものになるが曲線的に分布している。さらに、勾配の補正をしたものが図-4(c)で、実験値は直線に近づく。この時、式(19)の係数は $a_s=4.4$ 、 $m=1.3$ となる。Meyer Peter-Müllerの式とずれているのは、おもに砂州崩壊前期の変化が大きい時

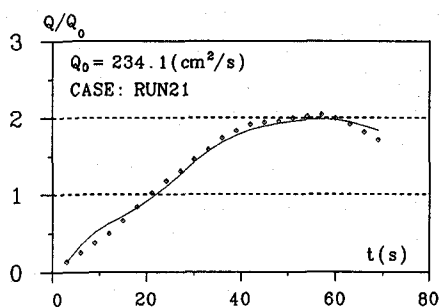


図-2 越流流量の経時変化

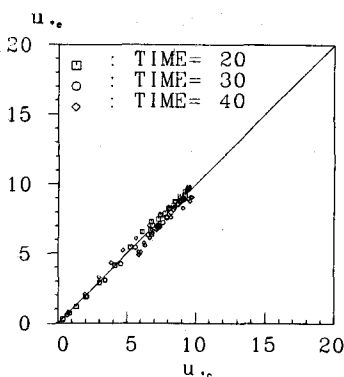


図-3 摩擦速度の比較

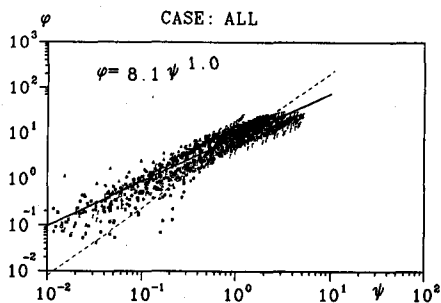


図-4(a) 実測流砂量と剪断力の関係

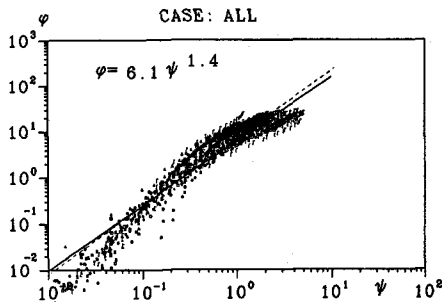


図-4(b) 圧力差を修正した流砂量

期の影響である。図-4(d)に砂州崩壊後期のもののみを示す。ばらつきが少なく、 $a_s=7.3$ 、 $m=1.4$ とMeyer Peter-Müllerの $a_s=8.0$ 、 $m=1.5$ と異なるが、実際にはその違いはほとんどないことが判るであろう。

5. 砂州崩壊の数値計算

5.1 計算方法

数値計算の支配方程式は、砂移動に関しては、砂の移動式(20)、斜面における平衡流砂量式(19)（ただし、実験値により、係数 $a_s=7.3$ 、 $m=1.4$ である）および砂の連続式

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

である。ただし、 z は砂面の鉛直座標、 λ は間隙率($=0.4$)である。

流れの計算については、次の流水の連続式、運動方程式及びManning-Strickler式(25)を用いた。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (h \cos \theta)}{\partial x} = i - i_f \quad \dots (27)$$

ただし、 Q は砂州の越流量、 h は水深、 i は底面勾配、 i_f は摩擦勾配である。

砂州の越流が常流から射流への急変不等流であるから、水面形の計算にあたっては、支配断面の位置を与えなければならない。移動床の実験結果を考慮し、支配断面は河床高が一番高いところにあると仮定し、そこでの水深勾配は次式のように与える。

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_0 = \frac{i_c}{2} - 0.5 \sqrt{i_c^2 + 4/3 h_c (\partial i / \partial x)} \Big|_0 \quad \dots (28)$$

計算の境界条件は、砂については無供給、越流量は図-2のように実験値を与え、支配断面の水深は式(24)により流量から計算する。

5.2 計算結果と実験結果との比較

図-5はRUN30での砂面の経時変化である。計算の初期条件は、 $t=10s$ での砂州形状とした。実線は実験値、丸印等はそれぞれ各時間の計算値である。計算値は実験値とよく一致している。水が砂州の頂部を越えると、裏法肩及び法面から洗掘されていく。下流水平部に流された砂は $t=50s$ 頃には明確に認められる反砂堆を形成し、水面にもこれを反映して跳水が発生した²⁾。このために、計算は $t=40s$ で中止した。

図-6はRUN21の結果である。 $t=6s$ での砂州形状を初期条件とした。本ケースは、RUN30のような跳水が生じないように、上げ底を設置した場合の実験である。図中の $Z_b=1cm$ の位置の太い直線が上げ底の表面に対応する。越流による侵食された砂はすべて上げ底の下流側に堆積するので、前ケースの様な反砂堆は形成されなかった。計算においては、砂州が上げ底以下まで侵蝕しないような条件を与え、また、上げ底の下端面($X=100cm$)では河床が変動せず、つねに $Z_b=1cm$ となる条件を与えた。すなわち、砂面 Z_b は次式を満たすように設定した。

$$Z_b=1cm \quad (Z_b < 1cm \text{ 或は } X=1m) \quad \dots\dots\dots (29)$$

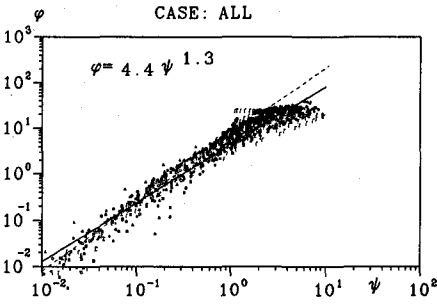


図-4(c) 勾配と圧力を修正した流砂量

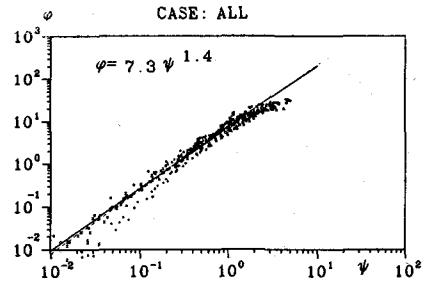


図-4(d) 修正した平衡流砂量と剪断力の関係

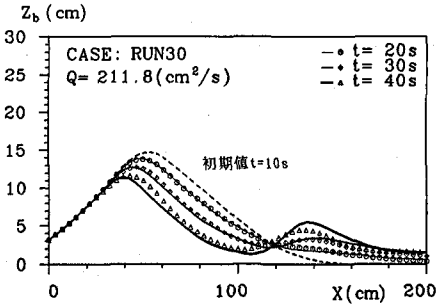


図-5 砂面の経時変化(RUN30)

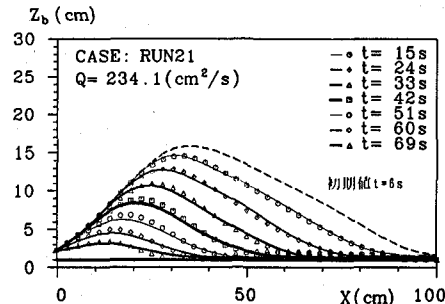


図-6 砂面の経時変化(RUN21)

図-5と同様に、計算値を実験値との対応は良好である。

次に、流砂の非平衡性及び勾配の影響を調べるために、RUN21に対して Λ と C_1 を変化させた計算を行った。

図-7は係数 Λ のみを変えて、 $t=33s$ まで計算した砂面形状である。丸印は実験値である。式(21)で推定した Λ の値を Λ_e として、 $\Lambda=\Lambda_e/2$ 、 $\Lambda=\Lambda_e$ 及び $\Lambda=2\Lambda_e$ の時の計算結果を実線で表わした。 Λ が Λ_e の半分の時、砂州下流面は上げ底に交差する $X=72cm$ まで、実測値より高く、ほぼ直線である。一方 Λ が Λ_e の2倍である時、 $X=45cm$ まで砂州の崩壊速度が大きく、その後小さくなるのがわかる。このように、非平衡性を表わす係数 Λ の値によって砂州の崩壊速度、および崩壊途中での砂州形状が大きく異なる。

平衡流砂量に対する勾配の影響を検討した結果が図-8である。点線は初期地形である。細い実線は $C_1=1$ 、すなわち勾配の影響を修正しない場合、太い実線は $C_1=C_{1e}$ 。 $(C_{1e}$ は式(7)で推定した勾配の修正係数を表わす)として計算した $t=33s$ 時の砂州形状であり、丸印はその時の実測値である。図-8より、 $C_1=1$ の時には砂州の崩壊速度が小さいことがわかる。これは、勾配の影響を修正しない時には、平衡流砂量が過小評価されるためである。

6. 結 論

本研究で得られた主要な結果は次の通りである。

- (1). 砂の運動量方程式を導き、平衡状態と非平衡状態の掃流砂量の関係を明確にした。
- (2). 砂州を越える流れの流量は供給流量とは一致しない。支配断面を砂州頂点に仮定すれば、これを精度良く計算できる。また、砂州模型上の剪断力はManning-Strickler式で近似できる。
- (3). 式(19)のように、Meyer Peter-Müllerの式の拡張として、圧力差、局所勾配の補正をした平衡流砂量式の妥当性を確かめた。
- (4). 砂州崩壊のような非平衡砂移動に対し、非平衡流砂量式(20)を得た。
- (5). 砂州崩壊の計算において、流砂量の非平衡性を表わす係数 Λ の効果等を検討した。 Λ を大きく評価すれば、砂州の崩壊速度は速くなる。勾配の影響を修正しなければ、崩壊速度は小さくなる。

謝辞：本研究に対し、文部省科学研究費（一般研究(C)No.01550396、代表：東北大学 首藤伸夫）の補助を受けたことを付記する。

参 考 文 献

- 1). 土屋昭彦・山口高志(1967)：河口砂州の崩壊に関する研究，第11回水理講演会論文集，PP.37-42.
- 2). 邵小敏・田中仁・首藤伸夫(1990)：越流による砂州崩壊に関する実験，水工学論文集第34巻，PP.373-378.
- 3). 辻本哲郎ら(1989)：流砂の非平衡の理論とその応用，第33回水理講演会論文集，PP.445-461
- 4). 福岡捷二・山坂昌成(1983)：直線流路の交互砂州，第27回水理講演会論文集，PP.703-708.
- 5). 林 泰造・尾崎幸男・和泉雄一(1981)：掃流砂量式と掃流砂量の遅れの距離について，第25回水理講演会論文集，PP.9-19.

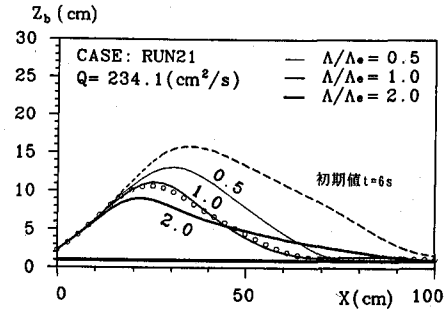


図-7 係数 Λ による影響

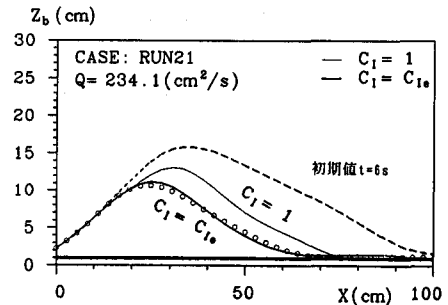


図-8 勾配による影響