

非定常性を考慮した砂粒子の離脱過程のモデル化 Dislodgement Process of Sediment Particles on Bed at Unsteady Flow

中川博次*・辻本哲郎**・後藤仁志***

By Hiroji NAKAGAWA, Tetsuro TSUJIMOTO and Hitoshi GOTOH

Real fluvial system is non-uniform and unsteady, therefore, the non-equilibrium sediment transport model should be developed in a space-and-time plane, in order to describe the real fluvial phenomena precisely. In this study, the convolution integral formed sediment transport model is developed along a temporal axis. The sediment pick-up rate, which is one of the fundamental parameters of the model, is estimated by means of a numerical simulation of incipient rolling motion, with particular reference to the effects of flow unsteadiness. The result of the simulation is compared with the experimental data of sediment particles' motion in an oscillation-current coexisting field to confirm the applicability of the method proposed.

Keywords : bed load, non-equilibrium sediment transport, pick-up rate, unsteady flow, convolution-integral model

1. まえがき

空間的に非一様・時間的に定常な場における非平衡流砂過程は、空間軸上の重畳積分形式の流砂モデルである中川・辻本¹⁾モデルにより記述され、空間的非平衡性に起因する種々の現象に対する良好な説明が可能となっている。ところで、現実の移動床場は空間的に非一様・時間的に非定常であるから、実現象をより正確に記述するには、時空間軸上に展開された非平衡流砂モデルが必要となる。本研究では、中川・辻本と同様の畳み込み積分形式の流砂モデルを時間軸上に展開し、モデルの構成要素であるpick-up rateとmoving periodの確率密度関数のうち、pick-up rateの推定法を提案し、空間的に一様・時間的に非定常な場である振動流・一方向流共存場における実験²⁾結果の検証を通して推定法の有効性を検討する。

2. 空間的に非一様・時間的に定常な場における非平衡流砂過程

空間的には一様で、時間的に非定常な場合の掃流過程は、中川・辻本モデル¹⁾と同様の重畳積分形式で時間軸上に展開されて、時刻 t での瞬間掃流砂量は、

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科
(〒920 金沢市小立野2-40-20)

*** 学生会員 工修 京都大学大学院 工学研究科博士課程土木工学専攻
(〒606 京都市左京区吉田本町)

$$q_B(t) = K_B d \int_0^\infty p_s(t-\tau) u_s(t|t-\tau) \int_\tau^\infty f_T(\xi|t-\tau) d\xi d\tau \quad (1)$$

となる。ここに、 $p_s(t)$ は、時刻 t のpick-up rate、 $f_T(\xi|t)$ は、時刻 t にpick-upされた砂粒子のmoving periodが ξ である確率密度関数、 $u_s(\tau|t-\tau)$ は、時刻 $t-\tau$ にpick-upされた砂粒子が運動を継続し、時刻 t においてすなわち時間 τ 後において持つ移動速度である。掃流砂量は以下のようにも表せる。

$$q_B(t) = K_B d \int_0^\infty p_s(t-\tau) U_T(\tau|t-\tau) d\tau ; U_T(\tau|t-\tau) = u_s(t|t-\tau) \int_\tau^\infty f_T(\xi|t-\tau) d\xi \quad (2)$$

ここに、 $U_T(\tau|t)$ は、システムの応答特性を規定し、速度の次元を有しているが、単なる砂粒子の移動速度ではなく、moving period $f_T(\xi|t)$ により時間 τ を経過する以前に停止する砂粒子の存在を考慮して求められた速度となっている。以下ではモデルの構成要素のうち、とくにpick-up rateについて検討することとする。

3. 砂粒子の離脱機構に関する数値シミュレーション

砂粒子離脱の力学過程を運動方程式を用いてモデル化することにより、pick-up rate を合理的に推定しようとする試みが、中川・辻本³⁾により行われている。中川・辻本は、運動方程式から砂粒子の離脱平均速度を評価し、1個の粒子の離脱に要する時間を求め、その逆数としての単位時間あたりの離脱粒子数と関連づけてpick-up rateを評価している。ここでは、転動離脱モデルにより河床粒子の離脱過程をモデル化し、河床付近の流れ場を乱数発生の手法により数値的に模擬して、離脱過程を数値的に模擬することを試みる。

初期移動形式として、図-1に示す球状粒子の転動離脱モデルを考える。純転動の運動方程式は、

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = (\varepsilon F_L - W) \sin \theta + \varepsilon F_D \cos \theta - F_f \quad (3)$$

で与えられる。ここに、 M は粒子の仮想質量、 F_L は揚力、 F_D は抗力、 W は水中重量、 F_f は移動しようとしている砂粒子(=A)と下流側の隣接砂粒子(=B)との間の摩擦力である。 ε は遮蔽係数であり、上流側砂粒子による遮蔽効果を表している。並進方向の移動距離 x と回転角 θ との関係($x = \theta d$)を考慮して、式(3)は、

$$M d \frac{d^2 \theta}{dt^2} = (\varepsilon F_L - W) \sin \theta + \varepsilon F_D \cos \theta - F_f \quad (4)$$

となる。砂粒子Aの周りの回転運動の方程式は、

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = F_f d/2 \quad (5)$$

であるから(I_0 =慣性モーメント、 ω =回転の角速度)、完全転動を仮定して、

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d\omega}{dt} \quad (6)$$

とすると、

$$F_f = \frac{4 I_0}{d} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (7)$$

となる。式(7)を式(4)に代入して、

$$\left(M d + \frac{4 I_0}{d} \right) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = (\varepsilon F_L - W) \sin \theta + \varepsilon F_D \cos \theta \quad (8)$$

を得る。なお、球状粒子であれば、運動方程式中の諸項は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} M &= \rho(\sigma/\rho + C_M) A_3 d^3 ; W = \rho(\sigma/\rho - 1) g A_3 d^3 ; I_0 = \frac{2}{5} d^2 M \\ F_L &= \frac{1}{2} C_L \rho \left(u - \frac{\cos \theta}{d} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 A_2 d^2 ; F_D = \frac{1}{2} C_D \rho \left(u - \frac{\cos \theta}{d} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 A_2 d^2 + \rho(1 + C_M) A_3 d^3 \frac{du}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

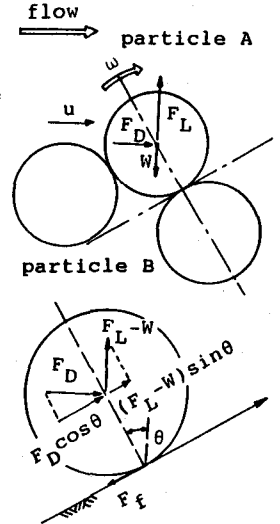


図-1 転動離脱

以上より、運動方程式(8)を数値積分することにより、回転角 θ を介して砂粒子の離脱状況が模擬できるとなる。なお、式(9)では、抗力に非定常項を加味している。式(9)における諸定数については、 $C_M=0.5$ 、 $C_D=C_L=0.4$ 、 $A_2=\pi/4$ 、 $A_3=\pi/6$ を用いた。

初期条件は、時刻 $t=0$ において $\theta=\beta$ (抜け出し角) であり、離脱時には、 $\theta=0$ となる。式(8)が厳密に解ければ、回転角を時間の関数として表すことが可能となり、1個の粒子の離脱に要する時間 T_d は次のように定式化できる。

$$\theta(T_d) = 0 \quad (10)$$

ここでは、式(10)の定義に基づき、1個の砂粒子の離脱に要する時間 T_d を推定し、その逆数として pick-up rateを推定することを試みる。

$$p_s = k_d/T_d \quad (11)$$

ここに、 k_d は経験定数である。

さて、砂粒子のpick-upを考えるには、砂粒子に作用する流体力を評価する必要があるが、ここでは、流体力の評価に関係するいくつかの仮定について述べることにする。計算に用いた平均流速分布と遮蔽係数分布について模式的に示したのが図-2である。はじめに、平均流速については、対数則を適用し、

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{30.1 \chi y}{k_s} \right] \quad (12)$$

とする ($k_s = \alpha d$, $\alpha=1.0$; χ =砂粒Reynolds数の効果を考慮した補正係数)。なお、平均河床面の位置については、下流側隣接粒子の中心にある ($y_0 = d \cos \beta$) と仮定することとする。次に遮蔽係数については、中川・辻本式と同様 $\varepsilon=0.4$ を基準値として用いることとし、離脱が進むにつれて遮蔽効果が小さくなることを考慮して、

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0 & ; y \leq y_0 \\ \varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0) \exp \left[-\frac{9}{2} \left(\frac{y - y_0}{d} - 1 \right)^2 \right] & ; y > y_0 \end{cases} \quad (13)$$

で与えることとする。次に、変動流速場について述べる。摩擦速度 u_* の変動が正規分布に従うと仮定する。摩擦速度の変動係数 η は、無次元せん断力の変動係数 η_0 と

$$\eta = \sqrt{\eta_0 + 1} - 1 \quad (14)$$

を用いて関係づけられる。Einstein⁴⁾に従い、 $\eta_0 = 0.5$ とすると、 $\eta = 0.225$ となる。この変動係数を用い、正規乱数を発生させて摩擦速度の時系列を模擬し、それを式(12)に代入することにより、局所流速の時系列を得ることができる(白色雑音モデル)。計算においては、抜け出し角 β をセットし、河床に抜け出し角 β で存在する砂粒子がどのように挙動するのかをシミュレートする。下流側砂粒子の真上に乗上げた状態を離脱完了と定義し(回転角 $\theta=0$: 離脱完了)、離脱が完了した砂粒子について離脱に要する時間を記録する。離脱が完了すると回転角をリセット($\theta=\beta$)し、次の瞬間から新たな砂粒子を追跡する。また、 $\theta > \beta$ となると、計算上は抜け出し角が増加したことになるが、実際は上流側砂粒子により拘束され抜け出し角は β 以上に増加しない。従って、 $\theta > \beta$ となると、粒子は移動しなかったと考え、回転角をリセットする。なお、計算の時間刻みについては、 $\Delta t = 1/200$ 秒とした。

本シミュレーションにより模擬された離脱過程を局所流速 u 、回転角 θ 、角速度 ω の時系列として 図-3 に示す。なお、抜け出し角については $\beta = \pi/4$ とした。離脱の判定は、回転角がゼロとなることで行っており、離脱完了の次の時間ステップから新たに、回転角 $\theta = \beta$ として次の砂粒子の挙動を追跡している。なお、 $\tau_* = 0.1$ の場合のみ図の見やすさに配慮して時間軸のスケールを4倍にとっている。

(a) $\tau_* = 0.1$ の場合、掃流力が限界掃流力を十分に上回る場合に相当するが、砂粒子が次々と離脱していくことが表されている。離脱時間は多少のばらつきはあるが、分散はそれほど大きくなく、平均的な掃流力

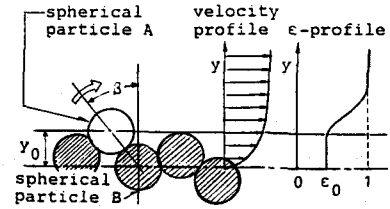


図-2 流れ場の模式図

により支配されていることが予想される。次に、(b) $\tau_* = 0.06$ の場合であるが、掃流力が限界掃流力を僅かに上回る程度の値をとる場合がこれに当たる。この場合、粒子の離脱は平均的な掃流力の値ばかりでなく掃流力の変動成分にも大きく支配される。回転角を見ると回転角の微小な擾乱いわゆるrocking現象が模擬されている。砂粒子はrockingを繰り返しつつ離脱の機会を待ち、平均値よりある程度大きい乱れが作用することにより離脱に十分な運動量が供給されると離脱するという様子が図から理解できる。

波動場における砂粒子の離脱過程をrocking motionとして定式化する試みは、土屋・上田・大下⁵⁾により行われている。土屋らは、流体力が周期的に変化する場におけるrocking motionの自動的な特性に着目し、不安定解の出現を離脱として定義しており、乱れの効果とは無関係に生じるrockingを扱っている。これに対し、本モデルにより再現されたrockingは乱れの効果のみにより生じるものであり、土屋らの指摘する砂粒子の離脱時の運動そのものの自動的特性に基づくrockingとは異なったものである。波動場では実際、両者ともに無視し得ないであろうが、非周期的な流体力変動が卓越する場合は、本モデルで考慮した白色雑音モデルで表された乱れの影響が主たる役割を果たしているものと思われる。

また、(c) $\tau_* = 0.05$ の場合は、(b)と同様rockingを繰り返しながら離脱の機会を待っているが、離脱の頻度は(b)に比べてかなり低くなっている。離脱時の角速度については、ばらつきはそれほど小さくなく、掃流力の大きさに対してほぼ一定していると考えられる。

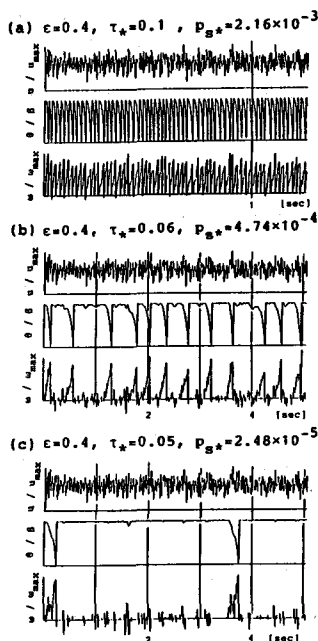


図-3 シミュレーション結果

4. 非定常流れ場でのpick-up rate推定式

非定常流れ場では、無次元掃流力の時間微分 $d\tau_*/dt$ を考慮して pick-up rateの推定式を導く必要がある。底面近傍の局所流速 u と摩擦速度 u_* との関係は、

$$\phi_p = \frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{30.1xy}{k_s} \right] \quad (15)$$

で与えられることすると、局所流速の時間微分は、

$$\frac{du}{dt} = \phi_p \frac{du_*}{dt} + u_* \frac{d\phi_p}{dt} \quad (16)$$

となる。底面近傍の局所流速 u と摩擦速度 u_* との位相差は僅かであると考えられるから、近似的に $d\phi_p/dt=0$ とすることは妥当であると考えられる。さらに、摩擦速度 u_* およびその時間微分は、無次元掃流力 τ_* を用いて、

$$u_* = \sqrt{\tau_*(\sigma/\rho-1)gd} \quad ; \quad \frac{du_*}{dt} = \frac{\sqrt{(\sigma/\rho-1)gd}}{2} \frac{1}{\sqrt{\tau_*}} \frac{d\tau_*}{dt} \quad (17)$$

と書けるから、無次元掃流力およびその時間微分を与えると、式(15)、(16)、

(17)を用いて、局所流速およびその時間微分が求められ、離脱時の運動方程式(8)の各項が評価される。

このようにして、非定常性の効果を考慮した数値模擬を実施した結果を図-4に示す。図中の破線は、後述の実験に用いた $\sigma/\rho=1.48, d=0.4\text{cm}$ の粒子を対象としたシミュレーション結果の近似式

$$p_{s*} = p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho-1)g} = F_0 \tau_*^{1/2} \left[1 - \frac{k_2 \tau_{*c0}}{\tau_*} \right]^{k_3 m} \quad (18)$$

である。ここに、 $F_0=0.011$, $m=0.8$, k_2, k_3 = 加速度の効果を表す補正係数, τ_{*c0} = 定常状態の移動限界で

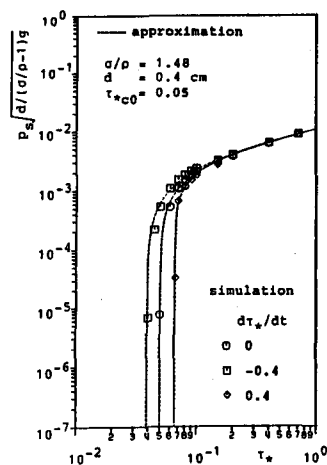


図-4 非定常性の効果

ある。なお、モデル化に伴う経験定数 k_d については $k_d=0.01$ とした。非定常性の効果（すなわち $d\tau_*/dt$ の効果）は、pick-up rate式の立ち上がり部分のみに顕著に現れていることが理解できる。

加速度の効果を表す補正係数 k_2, k_3 については、加速度を変化させて数値模擬を実施した結果、図-5に示す関係が成立することが分かった。なお、 t_* は無次元量で、 $t_*=t/(\sigma/\rho-1)g/d$ である。

図中の実線は、近似曲線

$$k_2 = 1 + \alpha_{c2} \frac{d\tau_*}{dt_*} + \beta_{c2} \Gamma_{c2} \quad (19)$$

$$k_3 = 1 + (\alpha_{c3} + \beta_{c3} \Gamma_{c3}) \frac{d\tau_*}{dt_*} \quad (20)$$

$$\Gamma_{c2} = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{1}{B_2} \left(\frac{d\tau_*}{dt_*} - \left(\frac{d\tau_*}{dt_*}\right)_1\right)\right) & ; \frac{d\tau_*}{dt_*} < \left(\frac{d\tau_*}{dt_*}\right)_1 \\ 0 & ; \frac{d\tau_*}{dt_*} \geq \left(\frac{d\tau_*}{dt_*}\right)_1 \end{cases}$$

$$\Gamma_{c3} = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{1}{B_3} \frac{d\tau_*}{dt_*}\right) & ; \frac{d\tau_*}{dt_*} > 0 \\ 0 & ; \frac{d\tau_*}{dt_*} \leq 0 \end{cases}$$

である。式中の定数については、図中に示した。

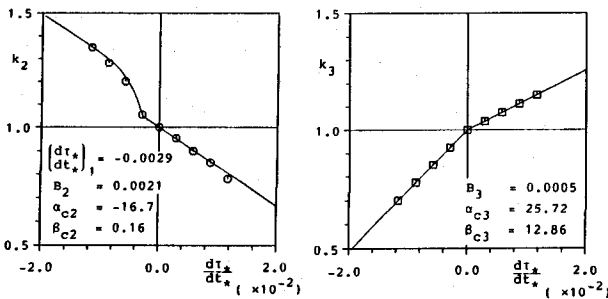


図-5 補正係数

なお、本シミュレーション結果の近似式(18)を自然砂に適用し既往の実験値および中川・辻本式とともに示したのが、図-6である。既存の実験値の傾向を良好に示す中川・辻本式と比較すると、本シミュレーション結果は、(i) 限界掃流力付近からの立ち上がりが急峻であり、一定勾配部への移行が速やかであり、(ii) 一定勾配部の勾配が1/2と緩やかである。前者は、流速変動によりpick-up rateが支配される領域がかなり狭いことを、後者は、平均的 τ_* の増加に対するpick-up rateの増加が緩やかとなることを示している。シミュレーションでは、当然のことながら場の理想化が行われており、種々の不確定要因は排除され、確率論的な要素は、流体力の変動のみに集約されている。ところが実際の移動床場では、砂粒子の配置状況の不規則性等の不確定要因が存在し、確率論的要素の介在する範囲を大きくしている。従って、離脱過程の力学構造を抽出しただけでは、実現象のすべてを良好に説明することはできず、既存の実験値の傾向と完全に合致するには至らない。これに対し、中川・辻本式は、運動方程式を直接解かず、離脱初速度を常に砂粒運動の固有周期にかかわる時間で平均化して近似し、実現象に近い曲線を得たものである。式(18)は、実験値を良好に説明する中川・辻本式と同形式の表示であり、加速度効果はむしろ決定論的な議論に負うものであるから、加速度効果を式中のパラメータの変化で抽出することとした。すなわち、定常状態においては既存の実験値を良好に説明する中川・辻本式を用い、加速度の効果による補正量の決定には、シミュレーション結果を用いると、加速度の効果を考慮して補正された中川・辻本式は、

$$p_{s*} = p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho-1)g} = F_0 \tau_* \left[1 - \frac{k_2 \tau_{*c0}}{\tau_*} \right] k_3^m \quad (21)$$

で与えられる。ここに、 $m=3$ 、自然砂については $F_0=0.03$ である。

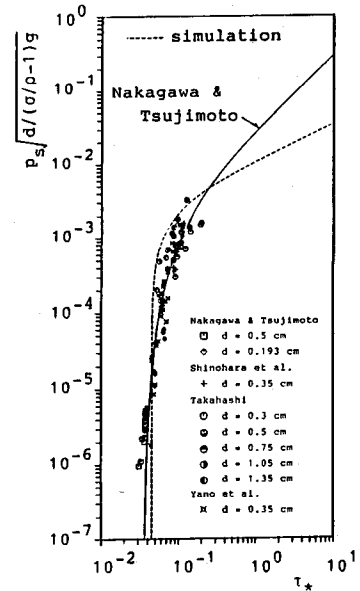


図-6 実験値との比較
(定常等流)

5. 振動流・一方向流共存場でのpick-up rateの評価

3・4章で提案したpick-up rateの推定法を、振動流・一方向流共存場に適用し、U字管式振動流装置(図-7)を用いて発生させた振動流・一方向流共存場での pick-up rateの測定結果と比較した。図-8 には、その一例^{*})を示す。実験条件を表-1 に示す。なお、 $F_0=0.036$ であり、標準値(中川・辻本式の $F_0=0.03$ を比重の効果で補正した値0.014)の2.6倍となっているが、定常等流下の実験値のばらつきからすると、この程度の差は許容されるものと思われる。

図中の実線は、本モデルにより加速度効果を補正した中川・辻本式を用いた計算結果、破線は補正を行わない場合の計算結果である。加速度の効果による補正の有無に関わらず、分布範囲については良好に推定されているが、詳細にみると、分布の立ち上がり部分については、補正された中川・辻本式の方が急激な立ち上がりを良好に表現しており、また実験結果では判読が難しいが、ピークをとる位相が僅かに遅れるなどの効果が現れている。全般的に加速度の効果は移動限界付近の限られた領域にのみ顕著に出現するが、掃流力がある程度大きくなると支配的でなくなってしまう。本実験の場合も移動限界付近は速やかに通りすぎるので、加速度の効果が顕著である領域は狭くなっている。

6. あとがき

本論文では、転動離脱モデルにより砂粒子の離脱過程をモデル化し、河床付近の流れ場を乱数発生の手法を用いて模擬し、離脱過程を数値的にシミュレートし、その結果を用いて、定常等流下のpick-up rate式である中川・辻本式を修正し、加速度の効果を考慮した pick-up rateの推定法を提案した。加速度の効果は主として移動限界付近で顕著に現れる。

表-1 実験条件

振動流の流速振幅 ($y=d/2$ での値)	$U_w=43.74$ cm/sec
一方向流の平均流速	$U_c=18.0$ cm/sec
流速比	$U_w/U_c=2.43$
振動周期	$T=4.0$ sec
無次元掃流力の最大値	$\tau_{*max}=0.40$

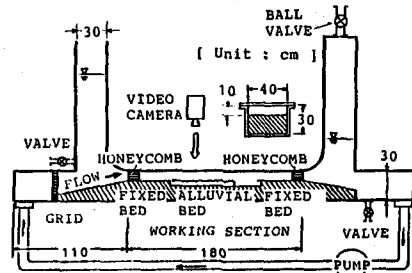


図-7 実験装置

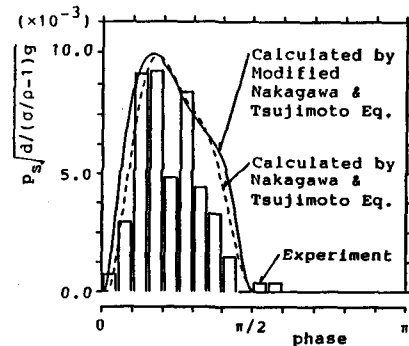


図-8 実験値との比較

(振動流・一方向流共存場)

参考文献

- 1) 中川・辻本: 砂れきの運動に伴う移動床砂面の擾乱発生過程, 土木学会論文報告集, 第291号, pp. 53-62, 1979.
- 2) 中川・辻本・後藤: 振動流・一方向流共存場での掃流過程の確率モデルに関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第33号 B-2, pp. 595-603, 1990.
- 3) 中川・辻本: 水流による砂礫の移動機構に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第244号, pp. 71-80, 1975.
- 4) Einstein, H.A.: The bed load function of sediment transportation in open channel flows, Tech. Bull., No. 1026, USDA, Soil Conservation Service, p. 78, 1950.
- 5) 土屋・上田・大下: 漂砂の移動限界の理論, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 272-276, 1984.

^{*})ここで示すケースの実験結果は、文献2)には記載されていないが、実験方法・データ処理の手順は、文献2)に準じて行われたものである。