

掃流運動のモデルとstep lengthの評価

Bed-Load Modelling and Evaluation of Step Length

村上正吾*・辻本哲郎**・中川博次**

By Shogo MURAKAMI, Tetsuro TSUJIMOTO and Hiroji NAKAGAWA

The step length often plays an important role in fluvial processes. In this study, two types of motion, sliding and saltation, are employed as models of bed-load motion to evaluate the step, and a common framework to describe the step length is presented based on the two models. An application of equations of motion is limited to the individual microsteps, a succession of which forms a step length, and the succession of the microsteps is subjected to the irregularities of sand beds. Thus, the framework is synthesized in a stochastic manner, but the constituent parts are described deterministically. The present study makes it possible to estimate the mean step length and reveals the applicable ranges of the respective models of bed-load motion.

Keywords : bed load, step length, sliding model, stochastic model, saltation

1. まえがき

流砂の stochastic modelにおいては、pick-up rateが初期移動過程を、step lengthが流送過程を代表する特性量であり、両者がその力学機構に基づき水理量に対して予測されることが重要である。pick-up rateが比較的合理的に推定されているのに対し¹⁾、step lengthはその本質的な特徴である河床砂粒との衝突現象の不規則性のため、理想化して抽出されたsaltation機構については厳密な解析²⁾がされるまでに研究が進んでいるものの、衝突・反発過程の力学的な取扱いと結合させ、さらに不規則性を考慮して、step lengthの評価に結び付けているものは数えるほどしかない^{3), 4), 5)}。すなわち、砂粒運動がsaltation形式で代表し得るとして、その取扱いをいかに厳密にしても、1つのstep lengthを構成するmicro-stepが如何に継続あるいは停止するかと言う視点がなければ、それはstep lengthの評価には直接つながらない。本研究では、こうした視点から平均step lengthを評価するのに最小限必要な運動機構と不規則性を抽出して議論する。非平衡流砂過程では平均step lengthのみならず、その分布形も重要な働きをする。その評価のためには不規則性を扱う精度をさらに向上させる必要があるが、これについては別の機会に論じる。

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科
(〒920 金沢市小立野2-40-20)

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室
(〒606 京都市左京区吉田本町)

2. 砂粒の掃流過程と step length の一般的表示

砂粒の掃流過程は、looseな河床面凹凸との衝突による、時によっては停止にいたる大きな変動と、主として流体力の変動に起因する緩やかな変動の複合体となっている（図-1参照）。

従って、掃流過程は次の衝突までの移動距離（確率変数）と、衝突・反発時の速度変化を表す推移確率によって記述される。後者は step lengthを規定する掃流運動の継続確率 p_0 に相当する。いま、第 n 番目の衝突・反発で停止する確率 $p_{t,n}$ 及び次の衝突・反発までの移動距離の確率密度関数 $f_L(\xi)$ が与えられると、step lengthの分布の密度関数 $f_x(\xi)$ は次式のように書ける。

$$f_x(\xi) = f_L(\xi) p_{t,1} + \sum_{i=2}^{\infty} \{ f_L^{(n)}(\xi) p_{t,i} \prod_{j=1}^{i-1} (1-p_{t,j}) \} \quad (1)$$

ここに、上付き添え字 n は n 重畳み込み積分を表す。 $p_{t,i}$ は、衝突直前の速度分布と衝突過程の力学機構によって決まる運動を継続するための限界値速度 $v_{i,0}$ を用いて次のように書ける。

$$p_{t,i} = \int_0^{\infty} \int_0^{v_{i,0}(\theta)} g_{i,i}(v) dv f_b(\theta) d\theta \quad (2)$$

ここで、 θ は床面の砂粒の配置特性（河床の凹凸、反発面の角度、ズレ動きに伴う反発係数の変化）を示し、 $f_b(\theta)$ は、床面特性値 θ の確率密度関数である。 $g_{i,i}(v)$ は i 番目の衝突直前の速度の確率密度関数である。

ところで、step lengthの平均値 Λ のみを知る上では、砂粒の移動速度及び移動距離の確率密度関数まで厳密に扱う必要はなく、無次元平均 step length $\lambda (\equiv \Lambda/d, d: \text{砂粒径})$ は、図-1に示した micro-stepの平均移動距離 L_0 と継続確率 p_0 より、Einstein⁶⁾の考えにならって次のように書ける。

$$\lambda \equiv \Lambda/d = L_0/(1-p_0) \quad (3)$$

衝突現象に伴う継続確率 p_0 は step lengthの特性を支配する河床面の不規則性と衝突直前の速度（移動過程を平均値で代表させていることより定常速度となる）を考慮することによって、次のように書ける。

$$p_0 = \int_{\theta_{c,1}}^{\theta_{c,2}} f_b(\theta) d\theta \quad (4)$$

ただし、 $\theta_{c,1}$ 、 $\theta_{c,2}$ は衝突時に micro-stepが継続する上限、下限であり、 Ψ が衝突あるいは反発の力学モデルを表すとき、 $\theta_c = \Psi(v_1)$ と書ける。

ここまでの議論では砂粒の運動形態には言及していないが、掃流力に応じた運動形式を設定することにより式(3)、(4)より統一の枠組みで平均 step lengthの評価が出来る。たとえば、掃流力の小さい場合には滑動形式で、大きくなると saltation形式で代表させるのが適当と考えられる。

3. 滑動砂粒の平均 step length の評価

砂粒運動が滑動形式で代表される場合、砂粒の移動距離は河床砂粒の凹凸の程度とその間隔に影響を受ける。すなわち、saltation運動の場合、その移動距離は反発後の速度を初期条件とする運動方程式によって決定されるのに対し、滑動砂粒の場合には、micro-stepの移動距離までもが河床面の不規則性を考慮しないと決定できないわけである。従って、河床砂粒の凹凸についての検討がこうした形式に従う掃流粒子の step lengthの評価では必要である。

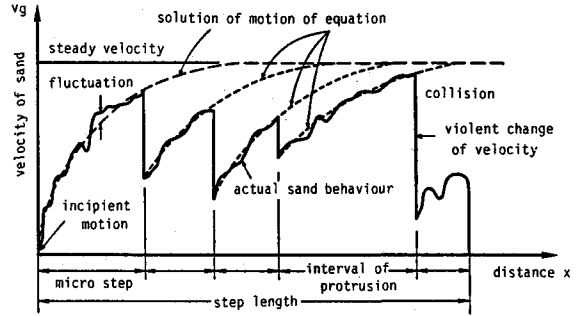


図-1 掃流過程の概念図

滑動砂粒の移動を考える運動面と砂粒運動の継続に関わる砂粒（有効突起と以降、呼ぶことにする）の高さとの関係を数値模擬で検討する。吉川・関根⁵⁾の河床面凹凸の実測に基づいて、粒子の平均河床面からの高さ{H}が従う、平均値 0, 標準偏差 $\sigma_H/d=1/3$ のGauss分布に従う乱数を粒径間隔で発生させ、仮定された運動面から測られた有効突起高さ Δ とその再帰間隔 X の確率的な特性の検討を行った。その結果を著者らの実験結果³⁾とともに図-2, -3に示す。図-2より再帰間隔 $\{x\}$ とその高さ $\{\Delta\}$ の平均値について次式が得られる。

$$X_{0.0} \equiv E[X]/d = 30(y_R/d)^2 + 2.65 \quad (5)$$

$$\Delta_{0.0} \equiv \Delta_0/d = 0.45 - 0.25 \cdot [1 - \exp\{-(y_R/d)/0.25\}] \quad (6)$$

一方、継続確率を評価する上で重要な $\{\Delta\}$ の分布としては図-3より次式のように指数分布を仮定する。

$$f_H(\Delta) = (1/\Delta_{0.0}) \cdot \exp\{-(\Delta/\Delta_{0.0})\} \quad (7)$$

ところで、掃流砂の1 step内での平均衝突間隔 $E[L]$ についての図-4に示す著者らの実験結果⁷⁾より、 $E[L]$ は次のように近似される。

$$E[L]/d = 14.0 \tau_*^{1/3} \quad (8)$$

滑動形式で砂粒が流送される場合、平均衝突間隔 $E[L]$ と平均有効突起間隔 $E[X]$ とはほぼ一致しているものと見なせ、式(5)と(8)とを等置することにより、平均運動面 y_R/d の無次元掃流力 τ_* に対する変化（図-5参照）が次のように推定できる。

$$y_R/d = \sqrt{(14 \cdot \tau_*^{1/3} - 2.65)/30} \quad (9)$$

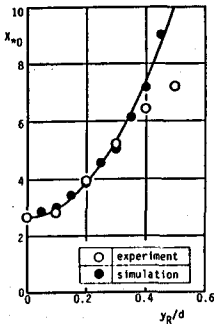


図-2(a) 平均有効突起間隔と運動面との関係

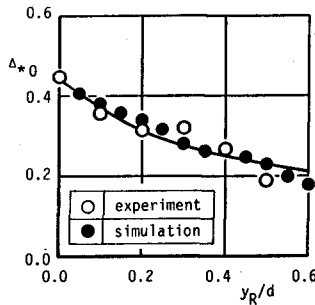


図-2(b) 平均有効突起高さ
と運動面との関係

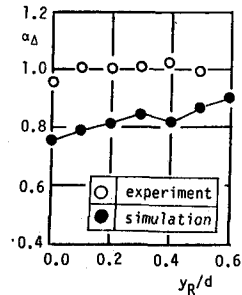


図-3 有効突起高さの変動係数

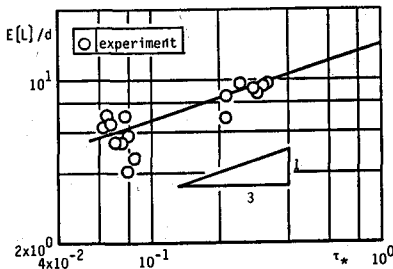


図-4 平均衝突間隔の τ_* に対する変化

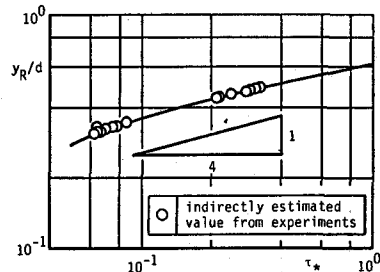


図-5 平均運動面高さの τ_* に対する変化

掃流過程を滑動形式で代表させると、有効突起との衝突間の運動は河床面との接触状況を動摩擦係数 μ_k で表した次の運動方程式によって表される。

$$dv_{0.}/dt = Q \cdot (A_0 - v_{0.})^2 - R_0/\tau_* \quad (10)$$

ここに、

$$v_{0.} \equiv v_0/u_* ; t_* \equiv tu_*/d ; Q_* = (C_0 A_2 / 2 A_3) / (\sigma/\rho + C_N) ; R_* = \mu_k / (\sigma/\rho + C_N) \quad (11)$$

であり、 v_0 ：砂粒の移動速度、 $A_* \equiv U_0/u_*$ 、 U_0 ：底面近傍の流速、 u_* ：摩擦速度、 σ/ρ ：砂粒の比重、 C_0 ：

抗力係数, C_H : 仮想質量係数, A_2, A_3 : 砂粒の形状係数である。動摩擦係数 μ_k は床面砂粒との接触具合によって決まるが, 主として粒子速度の増加に伴う平均運動面の上昇によって変化すると考えられ, 著者ら³⁾ は次の実験式を提案している (図-6参照)。

$$\mu_k = 1.2 / \{k_v (\sigma / \rho - 1) \tau \cdot v_0 + 1.0\} \quad (12)$$

ここで, k_v は実験定数であり, $k_v = 2 \sim 3$ 程度が適当である。

滑動形式で流送された砂粒は図-7に示すように平均運動面より高い河床静止砂粒と衝突, 速度が減少, とときには停止にいたる。衝突後の砂粒の速度 v_3 は直前の速度 v_1 及び乗り越す砂粒の高さ Δ が与えられれば, 非弾性衝突モデル¹⁾ によって次のように与えられる。

$$\hat{v}_3 = \text{func.}(\hat{v}_1, \Delta) = \sqrt{\{(1+4k \cdot \Delta \cdot \hat{v}_1^2)^2 / (1+4k \cdot \Delta)\} - 2\Delta \cdot B} \quad (13)$$

$$\hat{v} = v / \sqrt{(\sigma / \rho - 1)gd}; \quad B = \{(\sigma / \rho + C_H) \cdot (1+4k \cdot \Delta)\}^{-1} \quad (14)$$

ここに, $k \cdot d$ は砂粒の回転2次半径である。これより, 衝突直前の速度 v_1 に対する乗り越し可能な砂粒の高さ Δ が次のように求められる。

$$\Delta \cdot c = [1 + \{2(\sigma / \rho + C_H) \hat{v}_1^2\}^{-1} - \sqrt{\{1 + \{2(\sigma / \rho + C_H) \hat{v}_1^2\}^{-1} - 1\} (1+4k \cdot \Delta) / 2} \quad (15)$$

砂粒の平均衝突間隔 (平均有効突起間隔) を平均 micro-step 長 λ_0 で与え, 衝突直前の定常速度を v_{00} , これに対する乗り越し限界突起高さを $\Delta \cdot c$ とし, $\{\Delta\}$ の分布を指数分布とすると, 滑動砂粒の平均 step length は次のように与えられる。

$$\lambda = \lambda_0 / \exp(-\Delta \cdot c / \Delta \cdot c) \quad (16)$$

図-8は球形粒子を仮定し, $k = 0.1$ として計算された平均 step length の τ に対する変化を示したものであり, 従来の実験値の下限値を示しているようであり, 図中の平衡流砂量より逆算された曲線と似た傾向を表している。

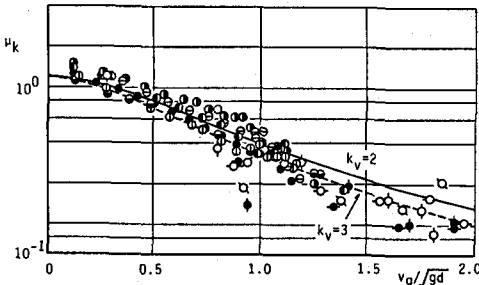


図-6 動摩擦係数と砂粒速度との関係

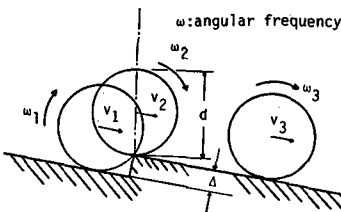


図-7 非弾性衝突-乗り越しモデル

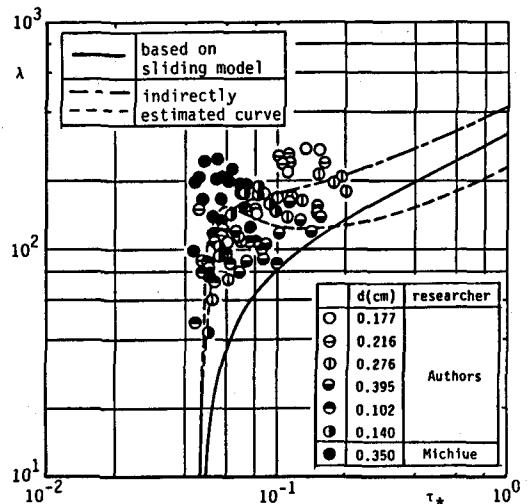


図-8 モデルと実測値 (直接測定) の比較

4. saltation運動する砂粒の step length の検討

掃流力の増加に伴い運動面が高くなり, 動摩擦係数で表現されるような河床面との関わりが少なくなると, 衝突・反発時にのみ河床面の不規則性が付加される。そこで移動距離, 衝突間隔が衝突直後の速度を初期条件として運動方程式より確定される小跳躍 (saltation) を micro-step として平均 step length を検討をする。

粗砂を対象とし, 流下方向 (x) と水深方向 (y) の運動方程式を独立して扱えるものと仮定し, saltation の流

下、水深方向の運動方程式をそれぞれ次のように与える。

$$d\hat{v}_x/dt = (\hat{U}_d - \hat{v}_x)^2 ; \quad d\hat{v}_y/dt = |\hat{v}_y| \hat{v}_y - 1 \quad (17)$$

ここに、速度 v 、時間 t 、長さ x 、 y は次のように無次元化されている。

$$\hat{v} = \{(C_D A_2 / 2A_3) / (\sigma / \rho + C_H)\} \cdot v / \sqrt{(\sigma / \rho - 1)gd} \quad (18)$$

$$\hat{t} = \{(C_D A_2 / 2A_3) / (\sigma / \rho + C_H)\} \cdot t \sqrt{(\sigma / \rho - 1)gd} \quad (19)$$

$$\hat{x} = \{(C_D A_2 / 2A_3) / (\sigma / \rho + C_H)\} \cdot (x/d) ; \quad \hat{y} = \{(C_D A_2 / 2A_3) / (\sigma / \rho + C_H)\} \cdot (y/d) \quad (20)$$

河床面はlooseな粒子で構成され、そこでの衝突・反発の力学機構を正確に表現することは難しいため、ここでは、河床面の不規則性を図-9に示すような仮想反発面（流下方向からの傾斜角 β が確率変数）で表現したモデル⁴⁾を採用する。移動床の特徴である衝突時の静止砂粒のずれ動き、摩擦の効果等を含めた仮想反発面の法線方向、接線方向の反発係数に相当するものを e 、 f とする。この時、仮想反発面に速度 $v_s(v_1, v_3)$ で入射した粒子が反発の後、飛び出す速度を $v_a(v_1', v_3')$ とすると、流下方向、水深方向の反発前後の速度には次の関係がある。

$$\hat{v}_1' = a \cdot \hat{v}_1 - b \cdot \hat{v}_3 ; \quad \hat{v}_3' = b \cdot \hat{v}_1 - a \cdot \hat{v}_3 \quad (21)$$

$$a = (f \cdot \cos 2\beta - e \cdot \sin 2\beta) ; \quad b = (e + f) \cdot \sin \beta \cos \beta \quad (22)$$

である。式(21)で与えられる反発後の速度を初期条件とするsaltationの次の入射速度 v_s は、式(17)、(18)より次のようになる。

$$\hat{v}_1' = \hat{U}_d - \{T_s + 1 / (\hat{U}_d - \hat{v}_1')\}^{-1} ; \quad \hat{v}_3' = -\tanh(T_s - t_p) \quad (23)$$

ここで、 t_p はsaltation軌道の最高点、 T_s は着地するまでの時間を表し、それぞれ次のように与えられる。

$$t_p = \arctan(\hat{v}_3') ; \quad T_s = t_p + \ln\{\sec(t_p) + \tan(t_p)\} \quad (24)$$

定常saltationは式(21)~(24)を満たす v_1, v_3, v_1', v_3' の組合せとして τ の関数として求められる。計算に当たっては、 e, f ともに一定値($e=f=0.5$)とした。 β については著者らが行った不規則継続跳躍砂粒の数値模擬の結果⁴⁾をもとに、次のような3角形分布（図-10参照）を仮定した。

$$f_B(\beta \cdot | \theta \cdot) = \begin{cases} \{2 / (\beta_{\cdot 2} - \beta_{\cdot 1})^2\} \cdot (\beta_{\cdot} - \beta_{\cdot 1}) & (\beta_{\cdot 1} \leq \beta_{\cdot} \leq \beta_{\cdot 2}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (25)$$

ここで、 $\beta_{\cdot} \equiv (180/\pi)\beta$ 、 $\theta_{\cdot} \equiv (180/\pi)\theta$ である（なお、 θ, β に $\cdot$ を付したものはdegree表示である）。 $\beta_{\cdot 1}, \beta_{\cdot 2}$ は入射角 $\theta_{\cdot}$ の関数として与えられ、図-11に示すように $\beta_{\cdot 1} = -\theta_{\cdot}$ 、 $\beta_{\cdot 2} = 30 \cdot \{1 - \exp(-\theta_{\cdot}/5)\}$ と表される（通常入射角 $\theta_{\cdot}$ は $(5 \sim 20)^\circ$ 程度である）。一方、saltation長 L_s は1 saltation長の平均粒子速度 u_0 とmoving period T_s の積（ $L_s = u_0 \cdot T_s$ ）として与えられる。 u_0 は平均saltation高さ $(d/2 + H_s)/2$ での流速として対数則型流速分布で与えられるものとする。すなわち、

$$L_s = [(u_{\cdot} / \kappa) \cdot \ln\{15.05(1/2 + H_s/d)\}] \cdot T_s \quad (26)$$

となる。ただし、 $u_{\cdot}$:摩擦速度、 κ :Kármán定数である。

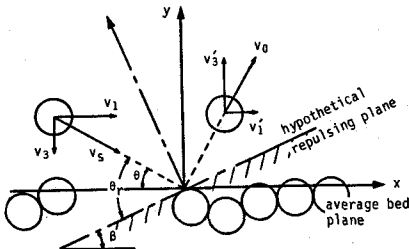


図-9 仮想反発面の定義図

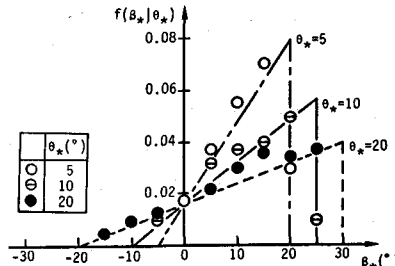


図-10 仮想反発面の傾斜角の確率密度関数

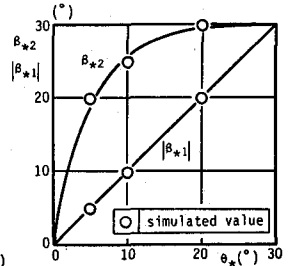


図-11 仮想反発面の下限値と上限値

図-12は式(21)～(26)より得られる L_s/d の τ_* に対する変化を示したもので、反発係数 e をパラメータにとり、また $e=f$ とした。 図中には石橋⁹⁾による平均saltation長 L_s の実験結果を併示してあり反発係数 e を適切に与えると L_s が上式で表現できる。 ただし、式(22)の計算に当たっては β_* の平均値を試算的に $\beta_*=13.5^\circ$ と仮定した。 図-13には τ_* に対する β_* の平均値 $E[\beta_*]$ 及び入射角 θ_* の変化についての計算結果を示した。

平均step lengthは式(3)に基づいて計算され、式(3)中の継続確率 p_a は砂粒が反発せずに停止する β の限界値が与えられると評価できる。 矢野ら⁹⁾は砂礫の落下角度がある値以上になると停止し易いことを実験によって見出ししている。 ここでは仮想反発面に対する入射角 $\theta_{r*} (= \theta_* + \beta_*)$ がある値より大きくなると停止するものと仮定し、継続確率を $p_a = \text{Prob.}[\theta_{r*} \leq \theta_{r*0}] = \text{Prob.}[\beta_* \leq \theta_{r*0} - \theta_*]$ で与えた。 図-14は限界入射角を $\theta_{r*0} = 20^\circ$ として上述のモデルで計算された平均step lengthと従来の実験値(間接測定)¹⁰⁾とを比較したもので、 τ_* が0.2以上の実験値を比較的良好に説明している。

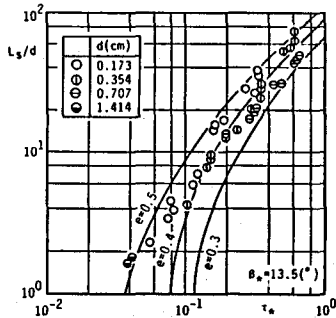


図-12 定常saltation長の τ_* に対する変化

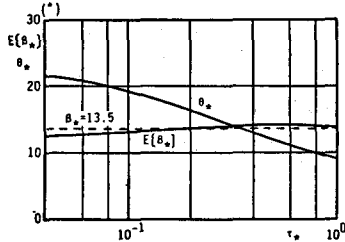


図-13 $E[\beta_*]$ 及び θ_* の τ_* に対する変化

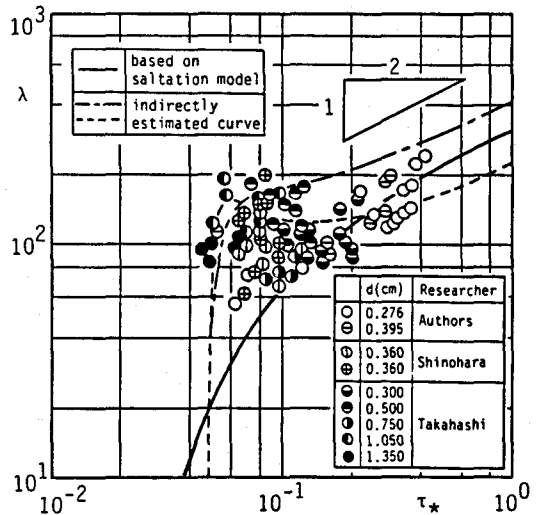


図-14 モデルと実測値(間接測定)との比較

5. あとがき

本研究ではstep lengthを決定する機構の中で、運動砂粒の河床静止砂粒との衝突・反発が最も重要との観点よりその機構のみに不規則性を考慮し平均step lengthの評価を行い、従来の実験値との比較よりその妥当性を検証した。 さらに掃流モデル上のslidingからsaltationへの遷移条件の検討とともに、ここでは省略された不規則性をも考慮したモデルの展開が今後の課題と考えられる。

参考文献

- 1) 中川・辻本：水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第244号，pp.71-80，1975。
- 2) 土木学会水理委員会：流砂量と河床形状に関する研究，研究小委員会報告，pp.102，1990
- 3) 中川・辻本・細川：移動床における掃流砂れきの不規則運動性状について，京大防災研年報，第22号B-2，pp.553-573，1979。
- 4) 辻本・中川：掃流粒子のsaltationの確率過程論的解析，土木学会論文集，第345号/II-1，pp.83-90，1984。
- 5) 関根・吉川：掃流砂の停止機構に関する研究，土木学会論文集，第399号/II-10，pp.105-112，1988。
- 6) Einstein, H.A.: Formulas for the transportation of bed load, Trans. ASCE, 107, pp.561-597, 1942。
- 7) 村上・中川・辻本：掃流力の増加に伴う砂れきの不規則運動性状の変化，第36回土木学会年講概要集，II-277，1981。
- 8) 石橋：ダム排砂設備の流下砂礫による摩耗・損傷に関する水理学的研究，土木学会論文報告集，第334号，pp.103-112，1983。
- 9) 矢野・土屋・青山：掃流砂れきのsaltationに関する実験，京大防災研年報，第12号B，pp.491-502，1969。
- 10) 中川・辻本：移動床流れの水理，pp.77，新体系土木工学23，1986。