

混合砂礫床の粗粒成分の移動限界に関する基礎的研究

Fundamental Study on Incipient Motion of Coarse Particles
in Mixed-Sediment Beds

岡部健士*・中野 晋**・吉田 弘***

By Takeshi OKABE, Susumu NAKANO and Hiromu YOSHIDA

The threshold condition of the incipient motion of coarse materials in mixed-sediment beds is studied with respect to spherical particles.

First, the influence of protrusion and relative depth on the fluid force is clarified experimentally. Secondly, a general equation for the threshold shear velocity is deduced through the theoretical consideration of the escape of the coarse particle from a hollow consisting of the finer sediment. The equation explains very well the experimental results of the threshold condition of isolated spheres.

Keywords: bed load, critical tractive force, fluid force measurement.

1. まえがき

混合砂礫床の流砂過程の予測においては、各粒径階の代表粒径 d_i (i は粒径階の番号)の粒径別移動限界掃流力 τ_{ci} を正確に推定することがまず重要である。ただし、このとき armor coat の形成・破壊の条件に深く係わる、河床表層の停止砂礫の移動(離脱)条件としての限界掃流力と、粒径別流砂量式の中に導入されている移動砂礫の停止条件としての限界掃流力とは、おのずと相違したものになる。本研究では、前者の意義の粒径別限界掃流力について考える。

さて、河床停止砂礫の粒径別移動限界に対しては、Egiazaroff¹⁾が作用流速の相違を考慮した理論に基づく条件式を提案して以来、これに準拠した、あるいはその修正式が幾つか提案されている^{2), 3)}。これらの適合性はいわゆる移動限界実験の資料との比較を通じて検証されている。しかし、armor coat の形成や破壊を伴う流砂現象では、とくに $d_i/d_m > 1$ (d_m : 河床表層の平均粒径)の砂礫粒子の τ_{ci} が、 d_i/d_m のみをパラメータにした上述の諸式だけでは表現できない複雑な特性を示すことが従来より指摘されている^{4), 5)}。それには表層砂礫の移動に伴う停止砂礫の露出状態の変化が深く係わっているよう

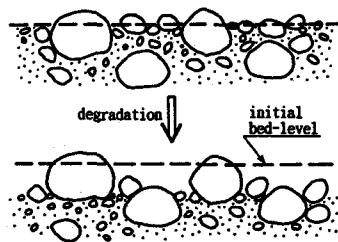


図-1 大径礫の不安定化

に思われる。たとえば図-1のように、当初平坦に仕上げた(移動限界実験はこのような状態でされる)

* 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科, ** 正会員 工修 同講師

*** 正会員 工修 同助手 (〒770 徳島市南常三島町2-1)

河床では、表面仕上げの際に $d_i/d_m > 1$ の粒子(以下、これを大径礫と呼ぶ)の露出度が小さく比較的安定であるが、このような河床が洗掘されると、大径礫の露出度が相対的に大きくなり不安定化する。これに対して Egiazaroff に代表される従来の理論式は、暗黙のうちに河床表層砂礫の重心位が同一平面内にあるとともに、離脱角度 (angle of escape) も一定であることを仮定しているの、後者の場合には、一般に過大な $\tau \cdot c_i$ を与えることになる。もちろん、堆積の過程ではこの逆の場合も起こり得る。したがって、今後は、大径礫の露出状態を考慮した移動限界の予測法を検討してゆくことが重要と思われる。

本研究は、以上のような課題に対するアプローチの第一歩として行われたものである。本文では、まず、孤立した大径礫に作用する流体力の諸特性と露出度との関係を、球でモデル化した流体力計測実験を通して明らかにする。ついで、この成果を利用しつつ大径礫の初動 (Incipient Motion) 機構について理論的な考察を加え、露出度の条件付の移動限界条件式を導き、球の離脱限界を調べた実験の結果に基づいてその妥当性を検討する。

2. 大径礫に作用する流体力

2.1 実験概要

実験には、長さ7.0m、幅40cm、勾配 1/508 の長方形断面水路を用いた。まず、水路床上に直径12mmのビー玉を一層だけ最密に敷き詰めて粗面河床のモデルとした。なお、この粗面の抵抗特性を実験的に検討した結果、理論河床面をビー玉頂点より2mm下位に置き、相当砂粒粗度 k_s を0.8mmとする場合に、流速分布が対数則に極めてよく従うことが明らかにされた⁹⁾。ついで、中央部において、図-2の要領で大径礫モデルを支持し、定格最大荷重500grfの3成分荷重計により流体力の抗力、揚力成分を同時に連続計測した。モデル下方の石膏は、実際の大径礫の下方の空間を充填する砂礫を模したもので、両者の間隙は、計測時に荷重計の歪みでモデルと石膏面が接触しない限界まで小さくした。大径礫モデルとして用いた球の直径 d は3cmである。モデルの露出状態は、ビー玉粗面の理論河床面からの露出高さ H_e と d との比 H_e/d が0.5~1.0倍の間で、0.1刻みで変化する6種とした。水深 h は、各露出高さごとに d の1.0, 1.25, 1.5 および 2.0倍の値をとるよう4種に変化させた。

2.2 抗力係数と揚力係数

時間平均の抗力 D と揚力 L は、一般に次式のように表示される。

$$D = 1/2 \cdot \rho C_D A_D U_R^2 \quad (1)$$

$$L = 1/2 \cdot \rho C_L A_L U_R^2 \quad (2)$$

ここに、 C_D 、 C_L ：抗力、揚力の係数、 A_D 、 A_L ：抗力、揚力に有効な面積、 U_R ：代表流速、 ρ ：流体の密度、である。 C_D と C_L の特性は U_R の取り方によってかなり変化するが、著者らの既往の論文⁶⁾で明らかにされているように、両者は物体の頂点の高さの接近流速を用いる場合に、変化の傾向が比較的単純になるので、本文でもこれに従う。また、 A_D は理論河床より上に出ている物体部分の流れ方向投影面積とした。

図-3および図-4に、 C_D および C_L と露出度 H_e/d の関係を、相対水深 h/d をパラメータにして点描している。なお、 U_R は、対数則に基づいて算定した。 C_D は、 $H_e/d=0.5$ において最も大きく、 H_e/d の増加につれて、かなり急速に h/d によって決まる値に漸近しているが、移動限界を考える際には、 H_e/d がほとんど1あるいはこれ以下でないか

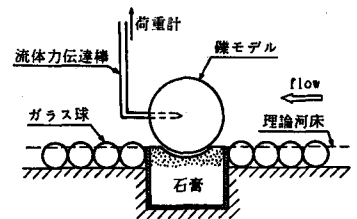


図-2 礫モデルの設置方法

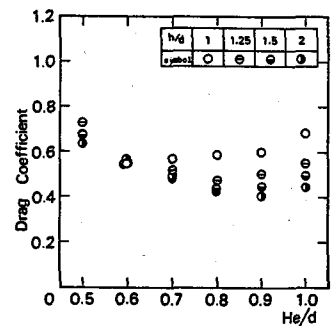


図-3 抗力係数

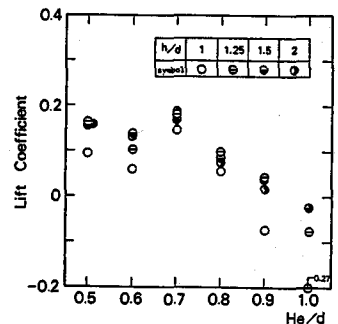


図-4 揚力係数

ぎり、0.5 程度の一定値を持つものと考えてよいようである。一方、 C_L は、 H_e/d が0.7より小さい場合は0.1~0.15の一定の値を保つが、それが1に近づくとはほぼ直線的に減少し、 $H_e/d \approx 1$ では負値をとる。また、 h/d の変化が C_L の値に及ぼす影響は、 C_D の場合に比してかなり小さい。つぎに、時間平均の揚力・抗力比 L/D を図-5に示す。 L/D は、 h/d が1に極めて近くない限り H_e/d のみの関数とみなせる。 L/D は、 $0.5 < H_e/d < 0.7$ の場合に約0.4の一定値であり、 $0.7 < H_e/d < 1.0$ では、 H_e/d の増加に対してほぼ直線的に減少する。

2.3 変動係数と確率密度

抗力、揚力の変動係数 η_D 、 η_L の計測結果を図-6、7に示す。 η_D 、 η_L ともに描点のバラツキが少し大きい、両者において h/d による系統的な変化は認められない。両者と H_e/d の関係については、 η_L が、 H_e/d が1に近い領域を除き、普遍的な値(≈ 0.4)になっているのに対し、 η_D は、 H_e/d の増加とともに、0.35~0.1の範囲で直線的に減少する傾向が認められる。ついで、図-8に、揚力、抗力の変動値の標準偏差の比 $\sqrt{L^2}/\sqrt{D^2}$ の特性を示す。やはり描点がかかなりばらつくが、両者の比はおおむね0.5である。つぎに、流体力の変動値の確率密度の代表例として、 $h/d=1.5$ 、 $H_e/d=0.8$ の条件で得られた結果を図-9に示す。図中の曲線は正規分布曲線で、計測値はこれによく一致している。これは、他のケースにおいても同様であったが、細かく見ると、 H_e/d が小さい場合にmodeがわずかに負の側に寄る傾向も認められた。

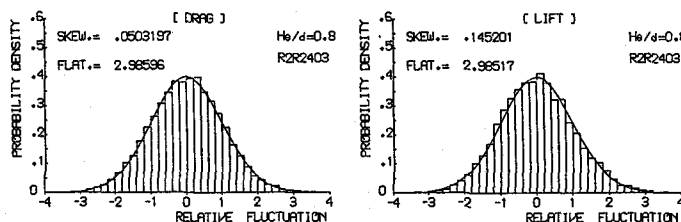


図-9 抗力と揚力の変動の確率密度

3. 大径礫の初動機構と露出度別限界掃流力

3.1 初動の形態と解析上の仮定

砂礫の初動形態には浮上、滑動、回転、転動など種々のものがあり、本研究の対象にしている大径礫においては浮上以外の形態が全て起こり得る。ただし、滑動は比較的偏平な形状の粒子に限られるであろうし、直下流に隣接している一個の停止砂礫を支点にした回転による離脱も大径礫の下面の空間には細粒成分が落ち込み易いこと、さらには自然砂礫の形状の不整さや堆積位置のズレなどを考慮すれば、比較的希ではないかと思われる。以上のことより、著者らは、大径礫の初動を、粒径がそれよりかなり小さい砂礫で形成された逆勾配斜面上を剛体が完全（滑りなしで）転動離脱する過程として取り扱うことにした。

本章では、いわゆる孤立した大径礫を対象にして、その露出度別限界掃流力の解析的表示を試みるが、数学的取り扱いの都合上、つぎのような基本的仮定を設定する。

(1)大径礫は、直径がそのnormal diameter に等しい球で置き換えることができる。

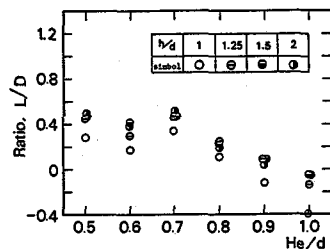


図-5 揚力と抗力の比

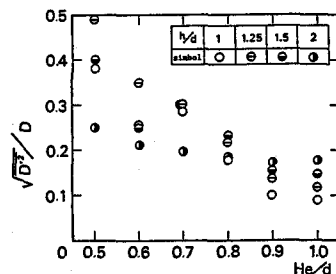


図-6 抗力の変動係数

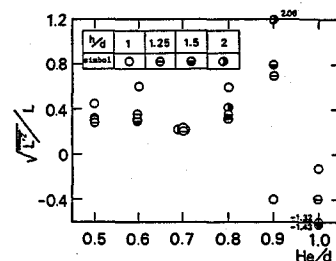


図-7 揚力の変動係数

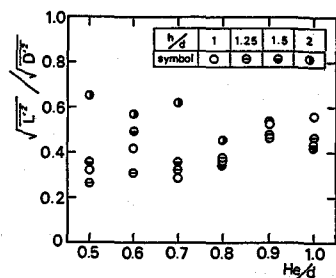


図-8 揚力・抗力の変動値の標準偏差の比

- (2)大径礫は、流れ方向にのみ傾斜した直線状斜面上で、横断方向に変位することなく運動する。
 (3)大径礫に作用する流体力および重力は、全てその重心を通るとともに、離脱の間は時間的に変化しない。
 (4)河床勾配は、転動斜面のそれに比して無視できる。

3・2 露出度別限界掃流力の定式化

図-10に示すように、直径 d の球が時刻 $t=0$ より過剰な流体力を受け始め、傾斜角度 β の一定勾配斜面を完全転動で登ってゆく過程について考える。まず、球の重心の移動方向 x に関する球の運動方程式は、

$$M(d/2)\ddot{\theta} = D_E \cos \beta + (L_E - W) \sin \beta - F \quad (3)$$

のように記述される。ここに、 M ：球の仮想質量、 θ ：球の回転角度、 D_E および L_E ：転動中に作用する抗力と揚力、 W ：球の水中重量、 F ：球と斜面の間の摩擦力、である。また、球の重心回りの回転に関する運動量の式は、

$$M k^2 \ddot{\theta} = F(d/2) \quad (4)$$

ここに、 k は球の回転半径、 $k^2 = d^2/10$ である。(3)および(4)式より F を消去すると、次式を得る。

$$M(d/2)(1+4k^2/d^2)\ddot{\theta} = \cos \beta \{D_E + (L_E - W) \tan \beta\} \quad (5)$$

上式の解を求めるに先立ち、前章の結果を参考にして、流体力をより取り扱いやすい形式で表示し直しておきたい。まず、 D_E および L_E を時間平均値 $([\cdot])$ と変動成分 $(\cdot')$ に分けてつぎのように記述する。

$$D_E = [D_E] + D_E' \quad (6-a), \quad L_E = [L_E] + L_E' \quad (6)$$

さて、図-5より、比 $[L_E]/[D_E]$ は、露出度 e ($\equiv H_e/d$)のみの関数とみなせるから、 $[L_E]$ は

$$[L_E] = [D_E] \eta_{LD}(e) \quad (7)$$

と表せる。ここに、 $\eta_{LD}(e)$ ：実験的に定める e の関数である（ただし、以下においては式を簡単にするため、 (e) の記述を省略する）。また、図-6より、 $\sqrt{D'^2}$ も D と e の関数と見なすことができる。

$$\sqrt{D'^2} = D \cdot \eta_{D'}(e) \quad (8)$$

ここに、 $\eta_{D'}(e)$ ： $\eta_{LD}(e)$ と同様な e の関数である。さらに、図-8に示された $\sqrt{L'^2}$ と $\sqrt{D'^2}$ の間の関係が L_E' と D_E' の間でも成り立つものと仮定すれば、 $L_E' = K'_{LD} \cdot D_E'$ 、

$$L_E' = K'_{LD} \cdot D_E' \quad (9)$$

のように記述することができる。ただし、 K'_{LD} は比例係数である。以上の(6)～(9)式を用いれば、(5)式をひとまず次式のように書き直すことができる。

$$M(d/2)(1+4k^2/d^2)\ddot{\theta} = \cos \beta \{[D_E] + D_E' + (\eta_{LD}[D_E] + K'_{LD} \cdot D_E' - W) \tan \beta\} \quad (10)$$

ところで、ある流れにおいて露出度 e で停止状態にある大径礫が(10)式で表されるような運動を開始する瞬間に作用している抗力の時間平均値およびその変動値をそれぞれ $[D_E]_s$ および D_c' とすれば、

$$0 = \cos \beta \{[D_E]_s + D_c' + (\eta_{LD}[D_E]_s + K'_{LD} \cdot D_c' - W) \tan \beta\} \quad (11)$$

そして、一回の離脱は大径礫がその後も転動を継続し、 θ がある値以上になって達成される。(10)式の $[D_E]$ と D_E' は、そのような運動中のもので、実際現象では、 e の変化や運動に伴う相対速度の変化などの影響で複雑に変化するが、このような変化を解析中で厳密に取り扱うことはまず不可能であろう。そこで本解析では、転動中の流体力を停止位置に固定された大径礫に作用するもので近似し得るとともに、 D_E' は時間的に不変で、その値は、 D_c' より大きい条件付きの D' の単純平均値(図-11参照)に等しいと仮定する。このような仮定に従うならば、まず $[D_E] = [D_E]_s$ とおくことができ、(10)式～(11)式により次式が得られる。

$$M(d/2)(1+4k^2/d^2)\ddot{\theta} = \cos \beta \cdot [D_E] (D_E' / [D_E] - D_c' / [D_E]) (1 + K'_{LD} \tan \beta) \quad (12)$$

上式中の $D_c' / [D_E]$ は、(11)式よりつぎのように求められる。

$$D_c' / [D_E] = (W / [D_E] \cdot \tan \beta - (1 + \eta_{LD} \tan \beta)) / (1 + K'_{LD} \tan \beta) \quad (13)$$

さらに、 $D_E' / [D_E]$ の表示は以下になる。まず、図-9を参考にして D' の確率分布をGauss式で近似すれば、 D_E' が次のように表される。すなわち、 $\sqrt{D'^2} = \sigma_D$ として、

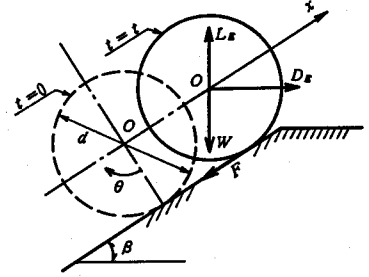


図-10 転動離脱の模式図

$$D_E' = \int_{D_c'}^{\infty} D' \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_D} \exp\left[-\frac{D'^2}{2\sigma_D^2}\right] dD' / \int_{D_c'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_D} \exp\left[-\frac{D'^2}{2\sigma_D^2}\right] dD' \quad (14)$$

$D' = \sigma_D \cdot y$ なる変数変換をするとともに、(8)式の関係を用いると、上式はつぎのように書き直される。

$$D_E' / [D_E] = \eta_{Dc} \int_{y_c}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy / \int_{y_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy \equiv \eta_{Dc} (I_1 / I_2) \quad (15)$$

ここに、 y_c は、 $y_c = D_c' / \sigma_D = D_c' / \sqrt{D'^2}$ であるから

$$y_c = \{W / [D_E] \cdot \tan \beta - (1 + \eta_{LD} \cdot \tan \beta)\} / (1 + K'_{LD} \cdot \tan \beta) / \eta_{Dc} \quad (16)$$

のように表される。また、本式と(13)式の比較により、次式も得られる。 $D_c' / [D_E] = \eta_{Dc} \cdot y_c$ (17)

(15)式の積分 I_1 は積分可能であり、一方、積分 I_2 には、かなり精度の高い近似式が導かれている⁷⁾。

$$I_1 = (1/\sqrt{2\pi}) \exp[-y_c^2/2] \quad (18-a), \quad I_2 \approx 1/2(1 - \sqrt{1 - \exp[-2y_c^2/\pi]}) \quad (18-b)$$

以上の(13)~(18a, b)式を(12)式に代入すれば、次式が得られる。

$$M(d/2)(1+4k^2/d^2)\ddot{\theta} = \cos \beta \cdot \eta_{Dc} [D_E] (I_1 / I_2 - y_c) (1 + K'_{LD} \cdot \tan \beta) \quad (19)$$

本式を $t=0$ にて $\dot{\theta}=0$ および $\theta=0$ の条件で積分し、離脱に要する時間 t_d と離脱に要する回転角度 θ_d の関係を求めると、次のようになる。

$$M(d/2)(1+4k^2/d^2)\theta_d = \cos \beta \cdot \eta_{Dc} [D_E] (I_1 / I_2 - y_c) (1 + K'_{LD} \cdot \tan \beta) t_d^2 / 2 \quad (20)$$

ところで、移動限界状態近傍での離脱は、図-11に示すように、非常に小さい頻度で生じる大きい流体力が作用した場合にのみ生じる。そして、このような大きい流体力の作用時間内には1回の離脱がようやく完了するだけであろう。したがって、移動限界状態の近傍に限り t_d をつぎのように表すことが可能であろう。

$$t_d = K_d P_o / p_s \quad (21)$$

ここに、 P_o : D' が D_c' を越える絶対確率、 p_s : pick-up rate,

K_d : 1に近い比例係数である。なお、 P_o は I_2 に等しいので、

I_2 に対する(18-b)の表示をそのまま P_o にも適用することができる。さらに、ここで、 $M = (\sigma + \rho C_M) \pi d^3 / 6$ (ただし、 σ : 礫の密度、 C_M : 仮想質量係数)、 $(1+4k^2/d^2) = 7/5$ 、 $p_s = p_{s*} \sqrt{s g / d}$ (ただし、 s : 礫の水中比重、 g : 重力の加速度)、などを導入する。また、 $[D_E]$ を、

$$[D_E] = 1/2 \cdot \rho C_D K_{AD} \cdot \pi d_2 / 4 \cdot U_R^2 = 1/2 \cdot \rho C_D K_{AD} \cdot \pi d_2 / 4 \cdot \phi_R^2 u_*^2 \quad (22)$$

のように記述する。ただし、 K_{AD} : 抗力の有効面積に関する係数で、球の場合、露出度 e を用いれば、

$$K_{AD} = 1 - \cos^{-1}(2e-1) / \pi + 4/\pi \cdot (e-1/2) \sqrt{1/4 - (e-1/2)^2} \quad (23)$$

さらに、 u_* : 摩擦速度、 ϕ_R : 抗力の代表流速と摩擦速度との比(U_R / u_*)である。

最後に、 θ_d を単純に β に比例するものとみなして、 $\theta_d = K_{\theta d} \beta$ のように表し、(20)式を移動限界条件式の形式に書き改めると、次式のようになる。

$$\frac{u_*^2}{s g d} = \frac{28/15 \cdot (\sigma / \rho + C_M) \cdot K_{\theta d} \beta / \cos \beta \cdot p_{s*}^2 / K_d^2}{C_D K_{AD} \phi_R^2 \eta_{Dc} (1 + K'_{LD} \cdot \tan \beta) \{I_1 / I_2 - y_c\} I_2^2} \quad (24)$$

なお、本式の y_c は、(22)式と(16)式に基づいて、つぎのように表示しておくのが好都合である。

$$y_c = \{4/3 \cdot s g d / u_*^2 \cdot \tan \beta / (C_D K_{AD} \phi_R^2) - (1 + \eta_{LD} \cdot \tan \beta)\} / \{\eta_{Dc} (1 + K'_{DL} \cdot \tan \beta)\} \quad (25)$$

(24)式は、 p_{s*} の条件付きになっているので、これから求められる u_* の定量的な意義が従来の形式のものより明らかである。ただし、 y_c に u_* が含まれているので、計算自体がかなり面倒にはなる。

3.3 実験値との比較検討

(1)実験概要: (24)式の適合性を検討するために、孤立状態のガラス球の移動限界条件を調べる実験を実施した。使用した水路は流体力計測実験のものと同じであるが、勾配を1/150と大きくした。観測の対象に

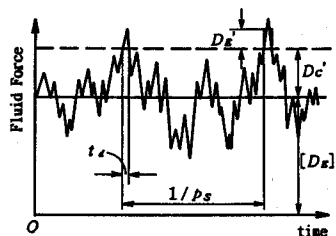


図-11 t_d の説明図

したガラス球は4個で、それぞれ直径が1.65, 1.96, 2.43 および 2.98 cm, 比重が 2.51, 2.53, 2.54 および 2.56 である。これらの球を図-12に示すような要領で、水路床上に設置し、図中の拘束ロッドを外したのち少なくとも10秒程度は石膏の窪み内に止まったのちに離脱する状態の摩擦速度を求めた。

(2) 実験結果ならびに計算値との比較

実験結果を整理して点描すると図-13のようである。

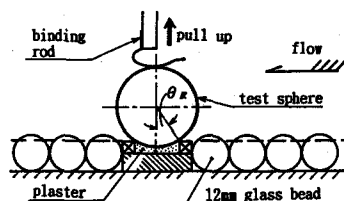


図-12 初動条件の実験方法

本図の横軸は、図-12に示した停止状態で露出度の大きさを表す角度 (rest angle) θ_R で、縦軸は上述の摩擦速度および試験球の物性から計算した無次元限界掃流力 $\tau \cdot c (=u_* c^2 / s g d)$ である。同一の θ_R に対する $\tau \cdot c$ はガラス球が大きいほど、わずかではあるが減少する傾向がある。この理由は主として、大きい球の場合ほど接近流速の代表値が相対的に大きくなるためと思われる。また、当然のことながら、 $\tau \cdot c$ の数値は一樣粒径の砂礫の場合に比して非常に小さくなっている。ただし、実験結果から $\theta_R \approx 90^\circ$ の $\tau \cdot c$ を外挿的に推定すると 0.03 程度の値にはなりそうである。

図-13に併記した曲線は(24)式による計算値である。計算条件は以下のとおりである。まず、式中の β には θ_R の値を代入した。諸係数の値は以下のようである。

$$C_D = 0.5, \quad C_M = 0.5, \quad K_{\theta d} = 1.0,$$

$$K'_{LD} = 0.5, \quad K_d = 1.0$$

$\eta_{LD}(e)$ には、図-5において $h/d > 1$ の描点群が示す特性に基づき、次式を与えた。

$$\left. \begin{array}{l} \text{for } e < 0.7: \quad \eta_{LD}(e) = 0.4, \\ \text{for } 0.7 \leq e \leq 1.0: \quad \eta_{LD}(e) = 4/3 \cdot (1 - e) \end{array} \right\} \quad (26)$$

また、 $\eta_{Dk}(e)$ は、実測(図-6)によると e の減少関数であるが、実験の θ_R が $15^\circ \sim 50^\circ$ であることより、本計算に関する限り一定値、 $\eta_{Dk}(e) = 0.2$ とした。

ϕ_R は、第2章で述べたビー玉粗面の相当砂粒粗度

を用い、対数型流速分布式で算定した。 p_s には、実験の p_s を 0.01~0.1 (1/sec) と見積もり、これに対応するかなり広い範囲の値を与えてみたが、計算結果はその範囲の p_s によってはたかだか15%程度しか変化しなかったため、図-13には $p_s = 0.05$ (1/sec) の場合の結果を選んで描いている。

さて、図-13において、計算曲線の示す傾向と実験結果の描点群の傾向とは全体としてかなり良好に一致している。これは、理論モデルとほとんど同一の実験をし、流体力の評価法も実測結果に基づいて行ったことにもよるが、著者らの離脱モデルの妥当性がある程度裏付けているものと言えよう。

4. あとがき

以上、本研究では、混合砂礫床の大径礫に着目し、その移動限界条件を支配する素過程としての初動機構を、球の場合について明らかにした。今後は、(24)式を実際の大径礫の初動条件を推定できるものに発展させるとともに、河床表層の大径礫群全体の露出度を考慮した移動条件式の誘導を目指すつもりである。

[参考文献]

- 1) Egiazaroff: Proc. ASCE, Vol. 91, HY4, pp. 73~80, '65.
- 2) 芦田・道上: 土木学会論文集, 195号, pp. 55~65, '71.
- 3) 林・尾崎・石橋: 第24回水講論文集, pp. 35~44, '80.
- 4) 道上・鈴木: 土木学会論文集, 399号, pp. 95~104, '88.
- 5) 中川・辻本・中野: 第25回水講論文集, pp. 67~72, '81.
- 6) 岡部ほか: 水工学論文集, 34巻, pp. 499~504, '90.
- 7) Boll (弥永・矢野共訳): 万能数値表, 白水社, p. 580, '68.

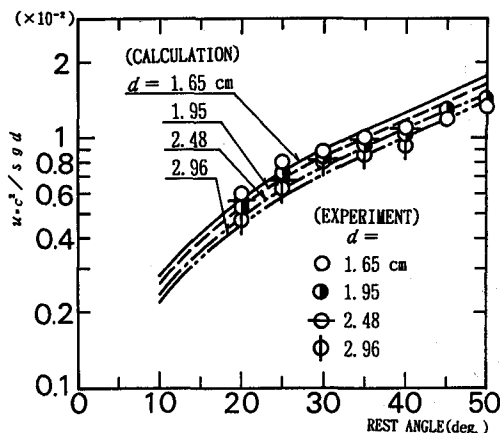


図-13 実験結果および計算値との比較