

非平衡浮遊砂による砂面不安定

Sand Bed Instability Due to Non-Equilibrium Suspended Sediment Transport

辻本哲郎*・北村忠紀**

By Tetsuro TSUJIMOTO and Tadanori KITAMURA

Sand bed instability due to non-equilibrium suspended sediment is analyzed. Non-equilibrium suspended sediment concentration distribution is described by using the convolution integral model for turbulent flux distribution of suspended sediment of which impulse response is determined from the transition process of the Reynolds stress distribution of open channel flow with abrupt change of bed roughness. The results reveals the effect of non-equilibrium suspended sediment on sand bed instability by comparing them with the analysis based on non-equilibrium bed-load transport model.

Keywords : sand bed instability, non-equilibrium suspended sediment, impulse response, Reynolds stress, diffusion

1. まえがき

Kennedy (1) の論文によって、河床波は、移動床砂面の不安定の結果として出現すること、砂面不安定の要因は、(1) 河床形と底面せん断応力分布の位相差と (2) 底面せん断応力分布に対する流砂量の遅れ (あるいは河床高さの時間変化率の遅れ、 $\partial z/\partial t = -\{1/(1-\rho_0)\} \partial q_s/\partial x$, ρ_0 : 空隙率, z : 河床高さ, q_s : 流砂量) の和である流砂量と河床形の位相差であることが認識され、その後 (1), (2) を評価する研究が行なわれてきた。とくに後者について、中川・辻本 (2) は掃流砂の非平衡流送モデルから合理的評価を試みて、砂面不安定を論じた。掃流砂では河床から離脱するフラックスと落下するフラックスが砂の *step length* で関係付けられる点がポイントとなっているのに対し、浮遊砂ではこの関係が非平衡浮遊砂濃度分布に影響される。

底面せん断応力が縦断方向に変化している場での Reynolds 応力の変化は、粗度急変流れの実験結果から明らかのように河床近傍ですばやく、河床から離れるに従って遅い。これによって Reynolds 応力分布が平衡状態のそれ (三角形分布) とは異なる過渡的状态が出現する。Reynolds 応力が運動量の乱流フラックスであること、Reynolds 相似を考慮すると、浮遊砂の乱流フラックス分布にも同様な過渡的状态が現われる。これが非平衡浮遊砂濃度分布を与える。著者らは、先に Reynolds 応力分布の遷移過程をインパルス応答を用いた緩和モデルで記述することを提案した (3) が、さらに同じインパルス応答を用いて非平衡状態の浮遊砂濃度分布を推定する方法を提案した (4)。本論文

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科

(〒920 金沢市小立野 2-40-20)

** 学生会員 金沢大学大学院 工学研究科修士課程土木建設工学専攻

(〒920 金沢市小立野 2-40-20)

は、この手法を用いて浮遊砂が砂面不安定に及ぼす影響を調べたものである。浮遊砂が卓越した場合の砂面不安定については、Engelund & Fredsøe (5) が流砂の遅れ距離が延びることを考慮しているし、また最近では渡辺・平野 (6) が検討した結果があるが、その浮遊砂モデルが非平衡流砂を適切に表現したものであるか否かに言及されていなかった。

2. 砂面不安定解析のフレームワーク

線形近似による砂面不安定解析は次のように要約できる。河床形を次式のように正弦波の微小擾乱とする。

$$z(x,t) = a \sin k(x-ct) \quad (1)$$

ここで、 z : 平均河床より測られた河床高さ、 a : 砂面擾乱の振幅、 k : 擾乱の角波数、 c : 擾乱の伝播速度である。線形近似の下では、この擾乱路床上の流れ特性、流砂特性量のいずれも振幅・位相差の異なる同じ波数と速度を持つ正弦波で表される。流れ・流砂について適切なモデルを適用し、流砂の連続式を用いると、

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a r_T \sin \{k(x-ct) - \phi_T\} \quad (2)$$

と表現するときの r_T , ϕ_T が水理パラメータ及び砂の性質の関数として求められる。式(2)を式(1)の直接時間微分と比較することで、

$$\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} = r_T \cos \phi_T; \quad ck = r_T \sin \phi_T \quad (3)$$

のように、振幅増幅率・伝播速度が水理パラメータ及び砂の性質の関数として表されることになる。正の増幅率が河床波の形成を意味する。

3. 壁面せん断乱流の乱流フラックス分布の緩和過程の表現

著者らは壁面条件を底面せん断応力で代表し、鉛直方向乱流フラックスの流下方向への緩和を次式で表現した。

$$T(\eta, \xi) = \int_0^\infty T_e(\eta, \xi - \delta) \cdot g_R(\delta, \eta) d\delta \quad (4)$$

ここに、 $T(\eta, \xi)$: (鉛直方向) 乱流フラックス、 $\xi = x/h$, $\eta = y/h$, x : 流下方向距離、 y : 河床からの高さ、 h : 水深、 $g_R(\delta, \eta)$: 相対高さ η での乱流フラックスのインパルス応答である。また添字 e は、平衡状態を意味する。著者ら(3)は、Jacobs(7)が風洞実験で調べた底面粗度の急変に対するレイノルズ応力の変化過程から乱流フラックスのインパルス応答 $g_R(\xi, \eta)$ を次のように同定した。

$$g_R(\xi, \eta) = \frac{1}{\Lambda(\eta)} \exp \left\{ -\frac{\xi}{\Lambda(\eta)} \right\}; \quad \Lambda(\eta) = 20\eta(1+1.5\eta^3) \quad (5)$$

ここで、 Λ : 水深で無次元化した相対高さ η での緩和距離である。さらに、橋津ら(8)による開水路での粗度急変流れについての精度良い実験を用い、式(5)のインパルス応答が開水路流れでも修正せずに適用できること、式(4)の緩和モデルに基づいて開水路粗度急変流の乱流構造が極めて良い近似で記述できることを示した。

さらに、Reynolds相似は、式(4), (5)が浮遊砂の鉛直方向乱流フラックスにもそのまま適用できることを示唆する。

4. 浮遊砂の非平衡流送モデル

浮遊砂の平衡状態においては、浮遊砂の乱流フラックス $\Psi \equiv \overline{c'v'}$ (c' : 濃度変動、 v' : 乱れの鉛直方向成分) は沈降フラックス Cv_p (C : 浮遊砂濃度、 v_p : 砂の沈降速度) と釣り合う。浮遊砂の乱流輸送モデルとして拡散モデル ($\overline{c'v'} = -\epsilon_s dC/dy$, ϵ_s : 浮遊砂の拡散係数) を用い、浮遊砂の拡散係数 ϵ_s を水深方向に一定 (さらに渦動粘性係数に等しいとし、 $\epsilon_s = K_0 u_* h/6$) とすると、平衡状態の濃度分布 C_e 、浮遊砂の乱流フラックス分布 Ψ_e は次のようになる ($K_0 = \text{Kármán constant}$)。

$$C_e(\eta, \xi) = C_{ae} \exp(-E\eta); \quad \Psi_e(\eta, \xi) = C_{ae} v_p \exp(-E\eta) \quad (6)$$

ここで、 $E = v_p h / \epsilon_s = (6/K_0)(v_p/u_*)$, C_a : 底面濃度、添字 e は平衡状態での値を示す。さて、式(4)の T に Ψ を用いれば、非平衡状態での浮遊砂の乱流フラックス分布の変化が次のように記述できる。

$$\Psi(\eta|\xi) = v_p \int_0^{\infty} C_{ae}(\xi-\delta) \cdot R(\xi-\delta) \cdot g_R(\delta|\eta) d\delta \quad (7)$$

但し、 $R(\eta|\xi) = \exp\{-E(\xi) \cdot \eta\}$ である。非平衡状態の浮遊砂濃度分布はこれによって与えられるフラックス分布を水深にわたって積分することで得られる。

$$C(\eta|\xi) = -\frac{h}{\varepsilon_s(\xi)} \int_0^{\eta} \Psi(\zeta|\xi) d\zeta + C(0|\xi) \quad (8)$$

$C(0|\xi) = C_a(\xi)$ は積分定数で、底面濃度を表す。積分定数を決める境界条件は、水面においてy方向のネットのフラックスがゼロであることで、すなわち、 $v_p C_s(\xi) = \Psi(1|\xi)$ である。 $\Psi(1|\xi)$ は緩和モデルによってすでに知られており、結局水面での濃度の縦断方向変化 $C_s(\xi) = C(1|\xi)$ は、次式のように書ける。

$$C_s(\xi) = \int_0^{\infty} C_{ae}(\xi-\delta) \cdot R_s(\xi-\delta) \cdot g_R(\delta|1) d\delta \quad (9)$$

水面での濃度が与えられると、非平衡状態の浮遊砂の絶対濃度分布が、次の第1式のように与えられ、とくに底面濃度について書くと次の第2式のようにになる。

$$\frac{C(\eta|\xi)}{C_{ae0}} = \Omega(\eta|\xi) - \Omega(1|\xi) + \frac{C_s(\xi)}{C_{ae0}}; \quad \frac{C_a(\xi)}{C_{ae0}} = \frac{C_s(\xi)}{C_{ae0}} - \Omega(1|\xi) \quad (10)$$

但し、 Ω は次式で定義され、計算されたものである。

$$\Omega(\eta|\xi) = \frac{C(\eta|\xi) - C_a(\xi)}{C_{ae0}} = -\frac{E(\xi)}{C_{ae0} v_p} \int_0^{\eta} \Psi(\zeta|\xi) d\zeta \quad (11)$$

$v_p C_a$ は底面での浮遊砂の沈降フラックスを与える。一方、乱れによる上向きのフラックスはそれが局所摩擦速度に瞬時に応答することから $v_p C_{ae}$ で与えられる。そしてこのフラックスの差が河床高さ変化をもたらす。

5. 支配方程式の線形化

砂面擾乱が式(1)で与えられるとき、その上の流れの摩擦速度は線形近似下では次のように位相差を持った正弦波で表わされる。

$$u_*(x,t) = u_{*0}[1 + r_f a \sin\{\kappa(x-ct) - \phi_f\}] \equiv u_{*0}(1 + r_f a \sin\Theta) \equiv u_{*0}(1 + \omega_f) \quad (12)$$

ここに、 $r_f a u_{*0}$ 、 ϕ_f ：摩擦速度の変化の振幅及び砂面形状に対する位相差、添字0は非擾乱値を示す。

E 、 C_{ae} 及び R は摩擦速度によって一意的に決まる量で、これらのそれぞれの非擾乱値で規準化された振動は次のように規準化された摩擦速度の振動と関係付けられる。

$$\begin{aligned} \omega_E = \frac{\partial E}{\partial u_*} \bigg|_0 \frac{u_{*0}}{E_0} \cdot \omega_f &= -\omega_f; & \omega_{cae} = \frac{\partial C_{ae}}{\partial u_*} \bigg|_0 \frac{u_{*0}}{C_{ae0}} \cdot \omega_f &= A(u_{*0}) \cdot \omega_f; \\ \omega_R = \frac{\partial R}{\partial u_*} \bigg|_0 \frac{u_{*0}}{R_0} \cdot \omega_f &= E_0 \eta \cdot \omega_f \end{aligned} \quad (13)$$

このとき、浮遊砂の乱流フラックス分布は、

$$\Psi(\eta|\xi) = C_{ae0} v_p R_0(\eta) \int_0^{\infty} [1 + (A + E_0 \eta) \omega_f(\xi-\delta)] \cdot g_R(\delta|\eta) d\delta \quad (14)$$

で与えられ、これより水面濃度 $C_s(\xi)$ 及び $\Omega(1|\xi)$ が求められ、さらに底面濃度の変化が、次のように求められる。

$$\frac{C_a(\xi)}{C_{ae0}} = 1 + R_0 s (A + E_0) \omega_f(\xi|1) + E_0 \int_0^1 (A + E_0 \eta) R_0(\eta) \omega_f(\xi|\eta) d\eta \quad (15)$$

ここで、添字sは水面での値を示し、また

$$\omega_f(\xi|\eta) \equiv \int_0^{\infty} \omega_f(\xi-\delta) \cdot g_R(\delta|\eta) d\delta = \ar f\{B_2(\eta) \cdot \sin\Theta - B_1(\eta) \cdot \cos\Theta\} \quad (16)$$

であり, B_1, B_2 は次のように緩和距離スケール (Λ) と波長 ($2\pi/\kappa$) の比の関数となる ($\kappa^* \equiv \kappa h_0$) .

$$B_1(\eta) = \frac{\kappa^* \Lambda(\eta)}{1 + \{\kappa^* \Lambda(\eta)\}} ; \quad B_2(\eta) = \frac{1}{1 + \{\kappa^* \Lambda(\eta)\}^2} \quad (17)$$

結局規格化された底面濃度の摂動は, 次のように書ける.

$$\omega_{ca} = \arctan(K_2 \sin \Theta - K_1 \cos \Theta) = \arctan r_{ca} \sin(\Theta - \phi_{ca}) \quad (18)$$

$$r_{ca} \sin \phi_{ca} = K_1 \equiv \left\{ R_{0s}(A+E_0)B_{1s} + E_0 \int_0^1 (A+E_0\eta)R_0(\eta)B_1(\eta) d\eta \right\} ;$$

$$r_{ca} \cos \phi_{ca} = K_2 \equiv \left\{ R_{0s}(A+E_0)B_{2s} + E_0 \int_0^1 (A+E_0\eta)R_0(\eta)B_2(\eta) d\eta \right\} \quad (19)$$

これらの結果を以下の連続式に代入して整理すると,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_p C_{ae0}(\omega_{ca} - \omega_{cae}) = \arctan v_p C_{ae0} r_{zt} \sin(\Theta - \phi_{zt}) \quad (20)$$

$$r_{zt} \sin \phi_{zt} = K_1 ; \quad r_{zt} \cos \phi_{zt} = K_2 - A \quad (21)$$

となる. $\arctan v_p C_{ae0} r_{zt} \sin \phi_{zt}$ は, $\partial z / \partial t$ の摂動の振幅及び摩擦速度の摂動に対する位相差である.

$\partial z / \partial t$ の摂動の砂面形状に対する位相差 Φ_T は ϕ_{zt} と ϕ_f の和で与えられるから, 式 (3) を適用して, 結局砂面振幅の増幅率, 伝播速度について, 次の無次元表示が得られる.

$$M^* \equiv \frac{h_0}{v_p a} \frac{\partial a}{\partial t} = r_T \cos \Phi_T = C_{ae0} \{ -K_1 r_{fs} \sin \phi_{ft} + (K_2 - A) r_{fs} \cos \phi_{ft} \} \quad (22)$$

$$N^* \equiv \frac{c}{v_p} = r_T \sin \Phi_T = \frac{C_{ae0}}{\kappa^*} \{ K_1 r_{fs} \cos \phi_{ft} + (K_2 - A) r_{fs} \sin \phi_{ft} \} \quad (23)$$

ここで, $r_{fs} \equiv r_{fh0}$ (無次元) であり, 河床材料が一定であれば E_0, R_0, A は (u_*0/v_p) の関数である. 一方, B_1, B_2 は κ^* の関数であり, また後述のように r_{fs}, ϕ_{ft} は κ^* と流れのパラメータ (例えばフルード数) の関数となる.

6. 砂面不安定解析の実行とその結果

本論文では砂面不安定要因の一つである摩擦速度と $\partial z / \partial t$ の間の位相差を浮遊砂の非平衡流送モデルに基づいて評価した. 砂面不安定解析に実行のためには砂面形状とその上の流れの摩擦速度の位相差を評価しなければならない. これについてはこれまでいくつかのアプローチが試みられているが解析結果の精度は必ずしも確認されていない. アプローチの方法としてはせん断流モデルの優位が動かないが, 非平衡性を適切に表現できる掃流砂モデルとの組み合わせで不安定性解析がこれまで定量的にはうまい結果 (林(9)の解析結果とほぼ同じ) が得られていない現状に鑑み, 中川・辻本(2)が非平衡掃流モデルを用いて比較的受容しやすい結果を得たときのモデル (ポテンシャル流理論で評価される局所流速に空間的加速効果 (ポテンシャル流理論で求められる水面形を利用) を考慮した抵抗則を適用するという便法) をそのまま援用した. すなわち, 底面せん断応力を次のようにポテンシャル流モデルで与えられる局所流速 U , dh/dx と関係付けた.

$$\tau_b(x) = \beta_f \rho U^2 \left(1 - \frac{\gamma}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (24)$$

ここに, $\tau_b = \rho u_*^2$: 底面せん断応力, ρ : 水の密度, β_f, γ : 経験定数である. このとき r_{fs}, ϕ_{ft} は次式のように κ^* と非擾乱流れのフルード数 $Fr \equiv U_0 / \sqrt{gh_0}$ の関数として与えられる.

$$r_{fs} \sin \phi_{ft} = \frac{\gamma \kappa^* (R^* - 1)}{2 Fr^2} ; \quad r_{fs} \cos \phi_{ft} = \kappa^* F^* \quad (25)$$

$$R^* = \frac{Fr^2 \kappa^* \operatorname{sech} \kappa^*}{Fr^2 \kappa^* - \tanh \kappa^*} ; \quad F^* = \frac{1 - Fr^2 \kappa^* \tanh \kappa^*}{\tanh \kappa^* - Fr^2 \kappa^*} \quad (26)$$

空間的加速効果の効果を考慮しない場合は $\gamma = 0$ で, ϕ_{ft} は単に 0 から π である.

さて、流砂の問題としては ($A(u_{*0})$ を表現するため)、平衡底面濃度と摩擦速度の関係を定式化する必要がある。従来の研究結果 (例えば(10)参照) を基に、次の実験式が適当と判断した。

$$C_{ac} = \alpha \left(\frac{u_*}{v_p} \right)^m \left\{ 1 - \beta_c \left(\frac{v_p}{u_*} \right)^2 \right\}^n \quad (27)$$

ここで、 α, m, n は経験定数で、 $\alpha \approx 0.002 \text{ m} \approx 2; n \approx 1.5$ 程度である。また $\beta_c \equiv (u_{*c}/v_p)^2$, u_{*c} : 移動限界摩擦速度で、岩垣式とRubeyの式 ((10)参照) を組み合わせて辻本・斎藤(4)が調整した次式を用いることとする。

$$\sqrt{\beta_c} = u_{*c}/v_p = (0.0455d^*)^{-0.65} + 0.25 \quad (28)$$

ここで、 $d^* \equiv (\sigma/\rho - 1)gd^3/\nu^2$, d : 粒径, σ : 砂の密度, ν : 水の動粘性係数である。このとき、 A は次のように表される。

$$A = m + 2n\beta_c \left\{ \left(\frac{u_*}{v_p} \right)^2 - \beta_c \right\}^{-1} \quad (29)$$

無次元化された砂面擾乱の増幅率、伝播速度は、それぞれ次のようである。

$$M^{**} \equiv \frac{M^*}{C_{ac0}} \equiv \frac{h_0}{C_{ac0}v_p a} \frac{\partial a}{\partial t} = \left\{ -\frac{K_1 \gamma(R^*-1)}{2Fr^2} + (K_2 - A)F^* \right\} \kappa^* \quad (30)$$

$$N^{**} \equiv \frac{N^*}{C_{ac0}} \equiv \frac{c}{v_p C_{ac0}} = K_1 F^* + \frac{(K_2 - A)\gamma(R^*-1)}{2Fr^2} \quad (31)$$

Froude数が次の関係を満たす (このとき上式の分母が0) とき、限界Froude数の状態であり、Froude数がこれより大きい小さいかで、水面と砂面が同位相あるいは逆位相となり、これで upper regime と lower regime が区分される。

$$Fr^2 = \tanh \kappa^* / \kappa^* \quad (32)$$

図1には、河床形状と摩擦速度の間の位相差 ϕ_f をFroude数をパラメータとして無次元波数 (κ^*) に対して示したものの (式(25)) でこれは中川・辻本(2)の結果と全く同じものである (すなわち 非平衡掃流砂モデルを用いては林(9)の結果と同等のものを得ることができる)。図2は本研究の主題である非平衡浮遊砂モデルを用いて計算された摩擦速度と河床の時間変化率 ($\partial z/\partial t$) の間の位相差 ϕ_{zt} の κ^* による変化で、 u_{*0}/v_p とFroude数をパラメータとしている。図中の破線は中川・辻本(2)の非平衡掃流砂モデルを適用した結果で本研究との相違が低波数域で顕著なことがわかる。パラメータ Λ/h は平均step lengthと水深の比であり、浮遊砂を極めて長いstep lengthを想定しても必ずしも掃流砂モデルでは説明しきれないことがわかる。図1, 2に示した位相差の和が河床形状と河床高さの時間変化率の間の位相差 ϕ_T を与える。これを計算して u_{*0}/v_p とFroude数をパラメータとして κ^* に対して示したのが図3で、 ϕ_T が属する象限で砂面の安定性と擾乱の進行方向が判断される。図4, 5はKennedy(1), 林(9)にならって $Fr \sim \kappa^*$ 面にそれぞれ擾乱の伝播方向区分、安定・不安定領域を示したものである。擾乱の伝播方向区分も u_{*0}/v_p をパラメータとするがこれによる相違は小さく $u_{*0}/v_p = 5$ の場合の結果のみ示した。安定・不安定領域は u_{*0}/v_p によって顕著に変化するため、図5は $u_{*0}/v_p = 1, 5$ の場合に分けて不安定領域を右上がり斜線で示した。 u_{*0}/v_p が大きくなるにつれ浮遊砂が卓越するが、それとともに upper regime で低波数の擾乱の不安定性が弱くなり、lower regime で

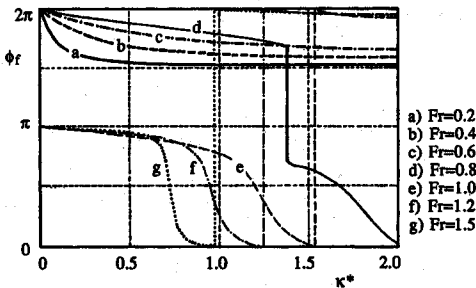


図1 摩擦速度の河床形状に対する位相差

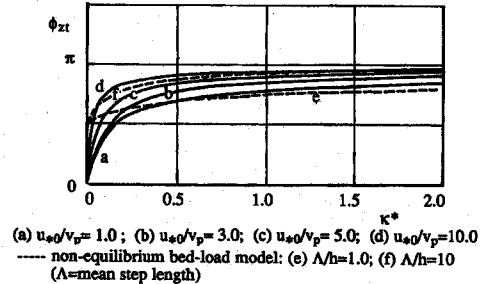


図2 河床高さの時間変化率の摩擦速度に対する位相差

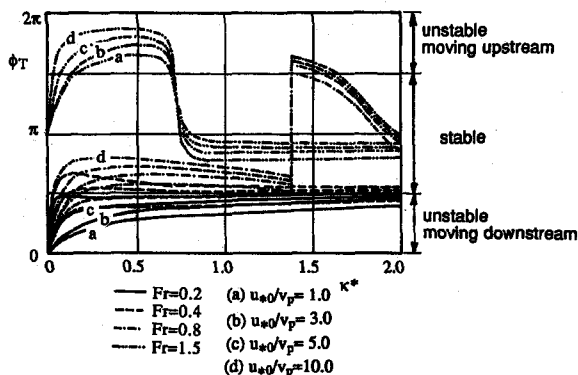


図3 河床高さの時間変化率の河床形状に対する位相差

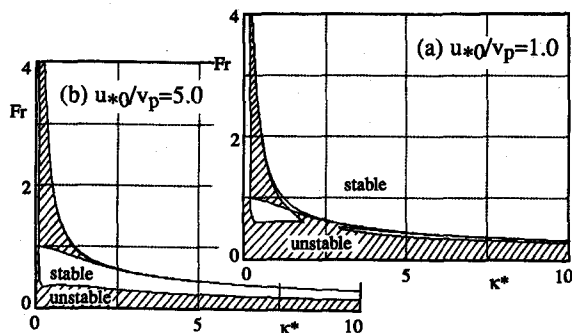


図5 非平衡浮遊砂による砂面不安定の出現領域

Froude数が比較的大きく低波数のもの (dunes) が安定化 (平坦化) する。なお図6には非平衡掃流砂モデルに基づいた中川・辻本(2)の解析 (非平衡流砂モデル以外は同じ設定) 結果を比較のため示した。さらに、擾乱の無次元増幅率 M^{**} の κ^* による変化 (u_{*0}/v_p , Fr をパラメータとして) を調べることから $Fr \sim \kappa^*$ 面に最大増幅率をもつ擾乱を示すことができる。これを図5に併示した。

7. あとがき

本論文では、粗度急変流での Reynolds 応力分布の遷移を表すインパルス応答を浮遊砂の乱流フラックスに適用して提案された非平衡状態での浮遊砂濃度分布を表す式に基づいて移動床砂面の不安定性を調べた。特に中川・辻本が非平衡掃流砂モデルを用いた解析と流砂モデル以外の枠組みは統一したので、非平衡浮遊砂による砂面不安定の特徴が特定できた。

参考文献

- 1) Kennedy: The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, *J. Fluid Mech.*, 16, pp.521-544, 1963.
- 2) Nakagawa & Tsujimoto: Sand bed instability due to bed load motion, *J. Hydraul. Div., ASCE*, 106-HY12, pp.2029-2051, 1980.
- 3) 辻本・Cardoso・斎藤: 底面せん断応力が変化する開水路流れの特性, 水工学論文集, 34, pp.433-438, 1990.
- 4) 辻本・斎藤: 非平衡状態での浮遊砂濃度分布, 土木学会論文集, 423, pp.135-143, 1990.
- 5) Engelund & Fredsøe: Transition from dunes to plane bed in alluvial channels, *Series Paper 4*, ISVA, Tech. Univ. Denmark, 1974.
- 6) Watanabe & Hirano: Effect of suspended sediment on formation of sand waves, *J.H.H.E.*, JSCE, 6-2, pp.29-42, 1988.
- 7) Jacobs: Uniformung eines turbulenten Geschwindigkeits-Profils. *ZAMM* 19, 1939.
- 8) 楠津・中川ら: 開水路粗度急変流れの流速分布及び河床せん断応力の応答特性, 水工学論文集, 34, pp.501-506, 1990.
- 9) Hayashi: Formation of dunes and antidunes in open channels, *J. Hydraul. Div., ASCE*, 96-HY2, pp.357-366, 1970.
- 10) 中川・辻本: 移動床流れの水理, 新体系土木工学23, 技報堂出版, 1986.

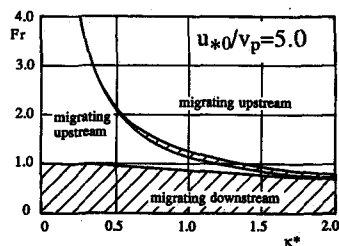


図4 砂面擾乱の伝播方向

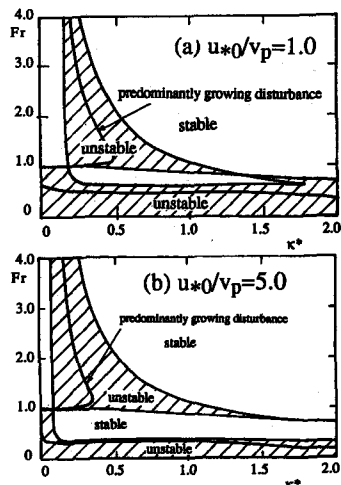


図6 非平衡掃流モデルによる結果

