

非定常傾斜プリュームの数値モデル

Numerical Model of Unsteady Inclined Plumes

秋山壽一郎* Wei Wang** 浦 勝***

By Juichiro AKIYAMA, Wei WANG, and Masaru URA

Layer-averaged equations describing the characteristics of a two dimensional unsteady inclined starting plume, which consists of two parts, i. e. a front and a following, are derived. A numerical model is formulated on the basis of an explicit scheme of the characteristic method for the following flow and the fourth order Runge-Kutta method for the front flow. The model incorporates the major physical principles involved. For a wide range of practical applications the present model is capable of predicting characteristics of the flow such as velocity, thickness, and density.

KEYWORDS: Gravity current, Stratified flow, Numerical model

1. 序論

周囲水より密度の大きい水が傾斜面上に連続的に放出されると、傾斜面に沿って発達し、先端部 (front part) とそれに続く後続部 (following part) より成る重力下層密度流を形成する。この重力下層密度流は傾斜プリュームとも呼ばれ、貯水池や湖あるいは沿岸域における水質環境問題や土砂問題と密接に関わり、環境水理工学上極めて重要な現象である。そのため、傾斜プリュームの流動機構に関する研究はこれまでも実験及び理論的に活発に進められ、その流動機構について多くの知見が得られている^{1)~7)}。ところが、従来の研究は流入条件が連続的かつ一定に維持された場合を対象としており、このような状態が必ずしも現実的に

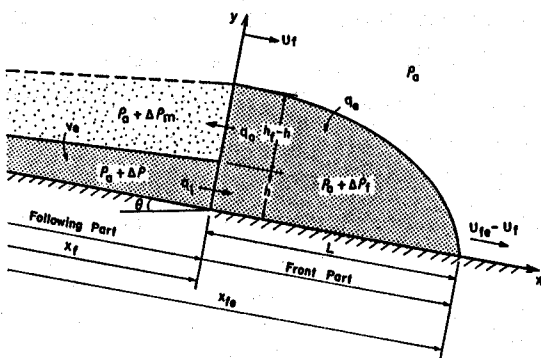


図-1 Definition Sketch of Inclined Plume

- | | | |
|---------|----------------|------------------------------|
| * 正会員 | Ph.D. 九州工業大学講師 | 工学部設計生産工学科 (〒804 北九州市戸畑区 鶴崎) |
| ** | 工修 アジア工科大学院元助手 | 水資源工学科 |
| *** 正会員 | 工博 九州工業大学教授 | 工学部設計生産工学科 |

起こり得ないことを考えると、非定常な流入条件下で流れの特性を予測可能なモデルの開発が望まれる。更にBritter & Linden¹⁾ が簡単なモデルで示したように、上流端での流入条件と底面勾配を与えることにより、ブリューム先端部の挙動を予測できることが実用計算上必要である。本研究では、まず流れの領域を後続部と先端部に分け、それぞれの領域の支配方程式を導く。次に、それぞれの領域を数値的に積分し、両部の移動速度と継続時間を考慮して両領域を接続する。そして流れの確立領域に対して得られた既存のデータを用いて、モデルのcalibrationを行なう。更に、仮想的な流入条件に対して流れのsimulationを行なう。

2. 理論

水平面と角度 θ をなす傾斜面上を流下する傾斜ブリュームを図-1に示すようにモデル化する。座標軸は傾斜面に沿ってx座標をとり、これと直交上向き方向にy座標をとる。先端部と後続部は異なる運動機構に支配されると考えられるので、以下それぞれの領域に対して支配方程式を求める。

2.1 後続部の支配方程式

後続部は図-1に示すように、先端部で間欠的に発生する渦が置去られることによって形成される層と重い流入水によって形成された下層の上部とが混ざりあった混合層及び通常等流部または定常部と呼ばれる下層の2つの層から構成されている。ここでは、後続部は混合層も含めた厚さと考え、連行量の評価を考慮した1次元非定常2層流としてモデル化を行なう。基礎方程式は下層流に関する体積保存式、質量保存式及び運動量方程式であり、これらは、 h を層厚、 B と U を断面平均浮力及び流速として、それぞれ次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Uh}{\partial x} = EeU \cdots \cdots (1) \quad \frac{\partial Bh}{\partial t} + \frac{\partial BUh}{\partial x} = 0 \cdots \cdots (2) \quad \frac{\partial Uh}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + \frac{f_2 Bh^2 \cos \theta}{2} \right) = f_1 Bh \sin \theta - f_b U^2 \cdots \cdots (3)$$

ここに、 Ee は連行係数、 f_b は底面抵抗係数、 B は $(\Delta \rho / \rho_a) g$ 、 g は重力加速度である。

f_1 と f_2 は次式で定義される形状係数であり、連行係数 Ee は芦田・江頭²⁾による経験式を使用する。

$$f_1 = \int b dy / Bh \cdots \cdots (4) \quad f_2 = \int 2b dy / Bh^2 \cdots \cdots (5) \quad Ee = 0.0015 / R \cdots \cdots (6)$$

ここに、 b は局所浮力であり、 $R = \text{Overall Richardson数} (= Bh \cos \theta / U^2)$ である。式(1)~(3)を数値的に解く方法はいろいろあるが、本研究では式(1)と(3)を特性曲線法を用いて流速 U と層厚 h を求め、同時に式(2)を差分化し、式(1)~(3)を連立させて解く方法を用いた。形状係数 f_1 、 f_2 を x 及び t に対して独立と仮定し、式(1)と(2)の偏微分方程式を $x-t$ 平面上の1対の特性方程式と1対の全微分方程式に変形すると、次式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = U + \lambda A_2 \cdots \cdots (7) \quad \frac{dU}{dx} + H \frac{dh}{dx} + G = 0 \cdots \cdots (8)$$

ここに、 H 及び G は次式で与えられる。

$$H = \frac{U + \lambda A_2}{h + \lambda} ; \quad G = \frac{A_1 + \lambda A_3}{h + \lambda} ; \quad \lambda = \pm \frac{(h/U)(D_3 + \sqrt{D_1})}{D_2 U} ; \quad D_1 = f_2 R ; \quad D_2 = -f_2 R ; \quad D_3 = 0$$

$$A_1 = -E_e U ; \quad A_2 = f_2 R U^2 / h ; \quad A_3 = U^2 \left[R \left\{ (f_2 / 2)(h/B) \frac{dB}{dx} - f_1 \tan \theta \right\} + f_b + E_e \right] / h$$

よって、上流端での流入条件 $[U(0, t), B(0, t), h(0, t)]$ を与えることにより流れが内部射流の場合、 $U(x, t)$ 、 $B(x, t)$ 、 $h(x, t)$ の流下方向の時間空間の発達について計算することができる。

2. 2 先端部の支配方程式

先端部のモデル化にあたって、先端部重心とともに移動する座標系を用い基礎方程式を導く(図-1)。先端部においては Britter & Linden¹⁾ や福岡²⁾ によって指摘されているように、先端部移動速度が後続部より遅いため、両領域間の相対速度が生じ、高密度の流体が後続部から先端部へ送りこまれる。それと同時に先端部では強い渦運動のため周囲水が連行され、先端部は混合希釈される。希釈された流体は境界面に発生した強いシェアーのため引きちぎられ、先端部後方へ混合流体を残しつつ、先端部は前進する。その結果、先端部後方に残された流体は混合層を形成する。先端部はこれらの機構を考慮してモデル化する必要がある。後続部から先端部へ供給される流量を q_1 、先端部における連行量を q_2 、先端部から出ていく流量を q_0 とし、これらは次式のように表わせると仮定する。

$$q_1 = h(U - U_f) \cdots \cdots (9) \quad q_2 = E_d U_f L \cdots \cdots (10) \quad q_0 = (h_f - h)(U_f - U_m) \cdots \cdots (11)$$

また、これらに対応する浮力束 q_{B1} 、 q_{B2} 、 q_{B0} はそれぞれ次式で与えられる。

$$q_{B1} = Bh(U - U_f) \cdots \cdots (12) \quad q_{B2} = 0 \cdots \cdots (13) \quad q_{B0} = B_m(h_f - h)(U_f - U_m) \cdots \cdots (14)$$

ここに、 E_d は先端部における連行係数、 L は先端部の長さ、 U_m は混合層の平均流速、 B_m は混合層の平均浮力、 U_f は先端部重心の移動速度である。

次に、モデル化に必要な関係として先端部の形状がある。先端部の形状は以下に定義する断面アスペクト比 $f(\theta)$ と体積補正係数 S_1 の2つのパラメーターによって表現することが可能である。

$$f(\theta) = h_f / L \cdots \cdots (15) \quad S_1 = A / (h_f L) \cdots \cdots (16)$$

ここに、 h_f は先端部最大厚、 A は先端部の断面積である。上記の諸関係を考慮すると、ブシネスク及び静水圧近似された運動量方程式、体積、及び質量保存の式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(1 + A_m) S_1 U_f h_f^2] &= [g(S_1 - 1) + S_1 B_f] h_f^2 \sin \theta \\ &+ f(\theta) [k_B B_f (h_f^2 - h^2) \frac{\cos \theta}{2} \frac{B h^2}{2} \cos \theta + (1 + \frac{B}{g}) h(U - U_f)^2 \\ &- k_a^2 (1 + \frac{k_B B_f}{g}) (h_f - h) U_f^2 - C_d U_f^2 h_f] \cdots \cdots (17) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} [S_1 h_f^2] = f(\theta) [(U - U_f) h - k_a U_f (h_f - h)] + E_d U_f h_f \cdots \cdots (18)$$

$$\frac{d}{dt} [S_1 B_f h_f^2] = f(\theta) [B(U - U_f) h - k_a k_B U_f (h_f - h)] \cdots \cdots (19)$$

ここに、 A_m は付加質量係数、 C_d は抵抗係数、 k_a 、 k_B は次式で定義される補正係数である。

$$k_a = 1 - U_m / U_f \cdots \cdots (20) \quad k_B = B_m / B_f \cdots \cdots (21)$$

先端部移動速度 U_f は先端部重心移動速度 U_f と先端部の発達率との和で決定されると仮定すると、 U_{f0} は次式で表わされる。

$$U_{f0} = U_f + \frac{1}{f(\theta)} \frac{dh_f}{dt} \cdots \cdots (22)$$

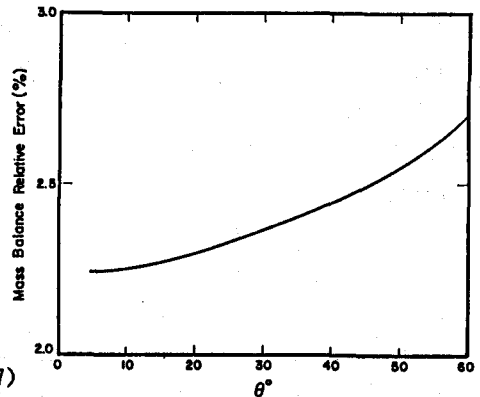


図-2 Mass Balance Relative Error

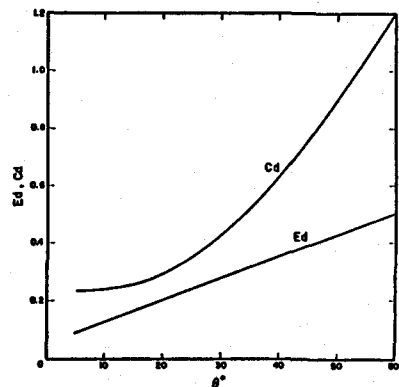


図-3 Dependence of E_d and C_d on θ

先端部の形状に関しては従来より多くの実験研究が重ねられている。ところが、先端部は発達・減衰を繰り返しながら流下するため²⁾、実験において先端部長 L を明確に定義することは極めて難しい。その結果、 $f(\theta)$ の値は研究者によってまちまちであるのが現状である。^{1), 3), 5)} そこで、本モデルでは広範囲の θ に対して得られた Britter & Linden¹⁾ の結果を用いる。彼らは Wood³⁾, Hopfinger⁴⁾ 及び彼ら自身のデータを用いて $\theta=5^\circ \sim 90^\circ$ に対して $f(\theta)$ は θ と共に linear に増加することを見いだした。彼らの結果は次のように式化することができる。

$$f(\theta) = 0.00275\theta + 0.24, \quad \theta = 5^\circ \sim 90^\circ \quad (23)$$

一方、 S_1 については、広範囲の θ に対して統一的に表現できるような関係は残念ながら見当たらない。実用計算において重要なのは先端部の形状ではなく、むしろ先端部の層厚、密度及び流速の流下方向への変化であるので、広範囲の底面勾配を対象として、先端部形状を矩形と仮定し、本モデルでは $S_1=1.0$ と置く。矩形形状に対する付加質量 M' は次式で与えられる。
 $M' = \rho \cdot P x h_r^2 / 4 \quad (24)$
 ここに、 P は $f(\theta)$ に依存し、近似的に次式で表わされる関数である。

$$P = 2.50 - 1.176f(\theta) + 0.761f(\theta)^2 \quad (25)$$

従って、付加質量係数 A_m は次式で表わされる。

$$A_m = P x f(\theta) / 4 \quad (26)$$

式(17),(18),(19)及び(22)が傾斜ブリュームの先端部の流動特性を与える基礎式である。これらの式から明らかに、先端部を解くためには、後続部の特性量である U, B, h が必要である。これらの諸量は2.1で述べたように後続部の計算を行なうことによって求められる。従って、与えられた上流端での流入条件 $U(0, t)$ $B(0, t)$ $h(0, t)$ に対し、 $U_r(x, t)$, $B_r(x, t)$, $h_r(x, t)$, $U_r(x, t)$ が求められる。

3. 数値計算手法

後続部はグリッド間隔 Δx を指定し、式(2),(7),(8)を差分化し、上流端での境界条件 $[U(0, t), B(0, t), h(0, t)]$ を与え、上流から下流に向かって計算を進めた。 Δx は初期層厚の10%とした。この Δx の値は後述する質量保存条件と計算の効率を考慮して決定した。計算時間間隔 Δt はクーロン条件 $\Delta t \leq \Delta x / (dx/dt)$ を満足するように定めた。先端部の諸量は後続部を解いて得られた値を先端部の境界条件として、式(17),(18),

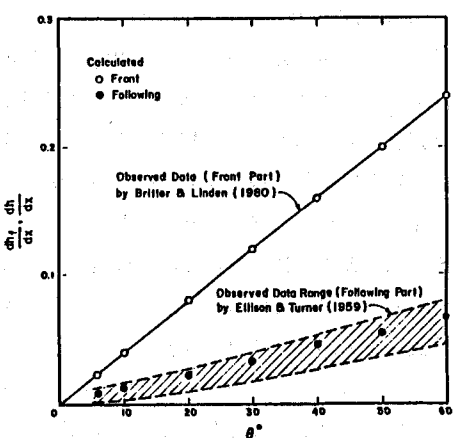


図-4 Dependence of $dh_r/dx, dh/dx$ on θ

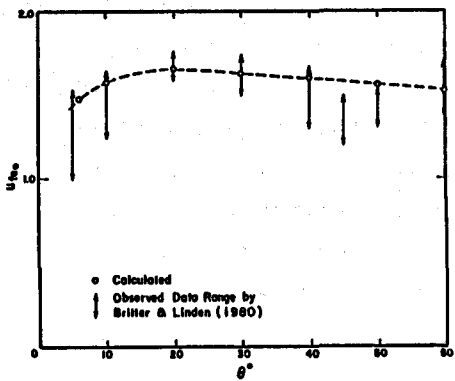


図-5 Dependence of $U_{r,s}$ on θ

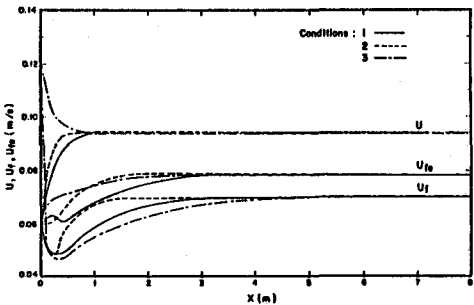


図-6(a) Variations of Flow Velocity

(19)の連立常微分方程式を4次のルンゲ・クッタ法で計算した。後続部と先端部は、両領域での計算経過時間が同一である事実を考慮し、これを接続条件とした。数値計算が正確に行なわれているかどうか、また適切な Δx 値はどれくらいかを判断するために、質量の流入量と流動層における貯留量との相対誤差を求めた結果が図-2である。 Δx を初期層厚の10%とした場合、 $\theta = 5^\circ \sim 60^\circ$ の範囲に対して誤差は約2.5%程度である。現象の複雑さを考慮すると計算精度は満足できるといえる。この図から明らかなように相対誤差は底面勾配が増大するとともに増加する。これは勾配が大きいと、流れの変化が急であることに起因していると考えられるので、勾配が大きい場合の計算をより精度良く行なうためには、計算時間を犠牲にして Δx をより小さくする必要がある。

4. モデルcalibration

本モデルは未定の係数 f_b, C_d, E_d, k_u, k_b を含むので、これらの値を何らかの方法で決定する必要がある。広く実験的に認められているように、傾斜ブリュームは斜面に沿って流下するとともに発達し、十分に発達した流れの確立領域では先端移動速度及び層厚変化率は一定となる。これは先端部で流下方向の重力成分、抵抗抗力、浮力がバランスし平衡状態に達するためと考えられる。モデルのcalibrationにあたってはこの流れの確立領域を対象として行なう。本研究では、 f_b の決定のために Ellison & Turner⁹⁾ によって得られた連続下層密度流の層厚変化率 dh/dx を用いた。先端部における諸係数(C_d, E_d, k_u, k_b)の決定のためには4つの条件が必要である。ここではBritten & Linden¹⁾ によって得られた無次元先端移動速度 $U_{r..}$ と層厚変化率 dh_z/dx 及び $dU_{r..}/dx = 0$ と $dh_z/dx = \text{一定}$ の条件を用いた。ここに、 $U_{r..}$ は流入浮力束 $B_0 q_0$ により無次元化された先端移動速度で $U_{r..} = U_{r..}/(B_0 q_0)^{1/3}$ で定義される。結果として、 $f_b = 0.01, k_u = 0.6, k_b = 0.2$, 及び図-3に示す C_d 及び E_d の値が得られた。 $U_{r..}$, dh/dx と dh_z/dx の計算結果を図-4と5に示す。両図から明らかなように、 f_b, k_u, k_b, C_d, E_d を与えれば、広範囲の斜面勾配 θ に対して、Britten & Linden¹⁾ によ

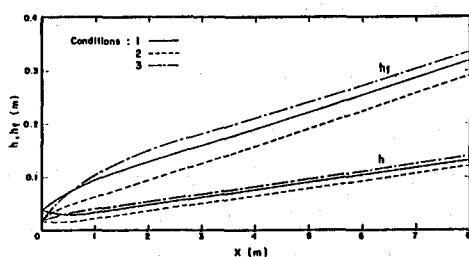


図-6(b) Variations of Flow Thickness

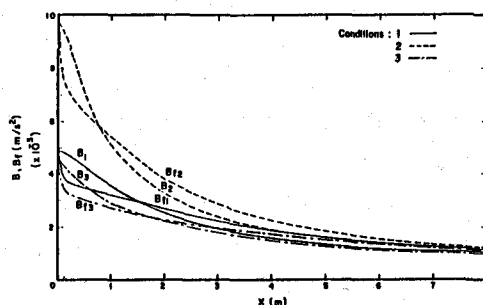


図-6(c) Variations of Buoyancy Forces

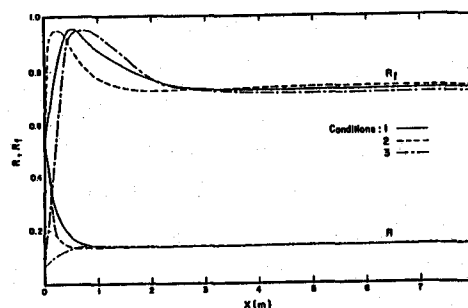


図-6(d) Variations of Richardson Number

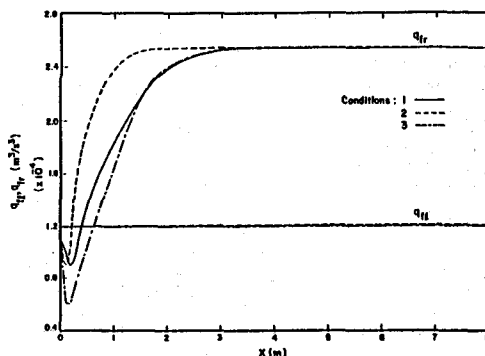


図-6(e) Variations of Buoyancy Fluxes

って整理された結果と良く一致する。

5. 数値simulation

本章においては一例として、連続かつ一定に保たれた流入浮力flux q_{r1} によって発生する $\theta=5^\circ$ の斜面上を流下する傾斜プリュームのsimulationについて検討

する。ここに $q_{r1}(x,t)=U(x,t)h(x,t)B(x,t)$ である。 $q_{r1}(0,0)$ を一定に保ち、表-1に示すような3通りの流入条件に対して simulation を行なった。条件1と2は流速、2と3は層厚、1と3は浮力がそれぞれ共通である。図-6に速度、層厚、浮力、Richardson数、浮力fluxの計算結果を示す。図-6aより明らかなように、後続部と先端部はそれぞれ一定の流速値に漸近し流れの確立領域においては流入条件に支配されない。また、その流速比 U_{r0}/U は0.74程度である。層厚は図-6bに示すように流入条件によって影響を受け、初期流速が最大である条件1で進行が活発に起こるため最大となり、流れの確立領域において平行となる。浮力は図-6cに示すように後続部、先端部ともに指数的に減少し、流入条件とは無関係にほぼ一定値に漸近する。Richardson数は図-6d から明らかなように、後続部では流入条件とは無関係に Richardson数一定のnormalな状態となる。一方、先端部は流入条件に若干依存するが、これもほぼ一定値となる。図-6eから明らかなように、後続部では浮力flux は当然依存されるので全域にわたって一定となる。また、流れの確立領域において先端部の浮力fluxも一定となる。

6. 結論

本報では、非定常状態の傾斜プリュームの挙動を予測する数値モデルを求め、流れの確立領域における既存のデータを用いてモデルの calibrationを行ない、抵抗係数、進行係数などの諸量を底面勾配の関数として逆算により求めた。本モデルはこれらの諸係数を用い、底面勾配と上流端での流入条件を与えることにより、先端部並びに後続部の流速、浮力、層厚などの特性量の時・空間変化を同時に追跡することができる。本モデルは流入条件が一定かつ連続に保たれないような条件下でも適用可能であり、汎用性が高いのが特徴である。 k_a と k_b は4章で述べた方法によって決定した。この方法によって得られた k_a と k_b が適切な値かどうか検証するために、実験を行ない、更に検討する必要があると考えられる。

謝辞：本論文の作成にあたって、松尾秀夫君（九工大4年）の熱心な協力を得た。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Britter, R.E. & Linden, P.F. : The Motion of the Front of a Gravity Current Traveling Down an Incline, J. Fluid Mech., 1980
- 2) 福岡ら：密度流先端部の流動機構に関する基礎的研究 土木学会論文報告集, No.274, 1978
- 3) Wood, I. R. : Studies in Unsteady Self Preserving Turbulent Flows The University of New South Wales, Water Research Labo. Report No.81, 1986
- 4) Hopfinger, E. J. & Tochon-Dangay, J. C. : A Model Study of Powersnow Avalanches, J. Glaciology 19(81), 1977
- 5) Hadano, K. : Study on the Front of a Turbidity Current, Memoirs of the Faculty of Eng., Kyushu Univ., vol.41, no.4, 1981
- 6) Middleton, G.V. : Experiments on Density and Turbidity Currents, I. Motion of the Head, Canadian J. Earth Sciences, Vol.3, 1966
- 7) Akiyama, J. & Wang, W., & Ura, M. : Numerical Model of Unsteady Gravity Currents, Proc. 7th Congress, APD, IAHR, Vol.1, Beijing, 1990
- 8) Ashida, K. & Egashira, S. : Hydraulic Characteristics of Thermocline in Reservoirs, Proc. 17th Congress, Vol.2, IAHR, 1977
- 9) Ellison, T. H. & Turner, J. S. : Turbulent Entrainment in Stratified Flow, J. Fluid Mech. Vol.6, 1959

表-1 計算条件

Upstream B.C.	U_0 (m/s)	h_0 (m)	ε_0
1	0.06	0.04	0.005
2	0.06	0.02	0.01
3	0.12	0.02	0.005