水工学論文集　第35巻　1991年2月

数値地形情報に基づく河川流域のフラクタル次元について
Fractal Dimension of River Basins Based on Digital Terrain Maps

宝　　馨*・高棹琢馬**・杉原宏章***
By Kaoru TAKARA, Takuma TAKASAO and Hiroaki SUGIHARA

The authors have developed an automatic data processing system for analysis of geomorphologic features of river basins and channel networks, using digital terrain maps (DTM) such as the Digital National Land Information released by the Geological Surveying Institute, the Ministry of Construction. This paper describes the fractal dimension of rivers obtained by using the system and the DTM of ten river basins in Japan with the area of several hundred square kilometers. The relationships are also investigated between the fractal dimension and some characteristic values of channel network used in conventional analyses.
Keywords: fractal, river geomorphology, digital terrain map, computer-aided analysis, GIS

1　研究の背景と目的

地形，地質，植生，土地利用や道路・鉄道・パイプラインなどのネットワークといった地域の様々な空間的情報（地理情報）が，数値化されデータベースとして整理されるようになってきた．この数値化された地図（ディジタルマップ）をコンピュータによって多角的に解析処理するシステムは地理情報システム（GIS, Geographic Information System）と呼ばれ，米国やカナダを中心に多くの機関で利用が進んでいる．わが国でも，建設省国土地理院の国土数値情報[1]をはじめとして同様の情報の整備が推進されており，国公立の研究施設，地方自治体，民間等においてGISの開発および利用が始められている[2,3]．

水文学の分野でも，このようなディジタルマップを利用して流域地形の解析とそれに基づく流出解析がなされ始めている[4-13]．多様な空間データの整備と情報処理能力の向上によって，河川流域の諸情報をなるべく忠実に反映する解析法の構築が可能となってきたのである．

筆者らは，地形図から読み取った標高・河道位置のデータや国土数値情報などのそれらのデータを用いて，水文地形解析の省力化・客観化を図るとともに，河川流域地形に関する基礎的検討を行ってきた[4-6]．本論文は，これまでの筆者らの検討の延長線上として，河川流域のフラクタル次元を取り扱ったものである．

フラクタル（fractal）とは，複雑な形を記述するための概念で1975年にMandelbrotによって創案された[14]．フラクタル図形は，自己相似性をもち，その形状を特徴づける非整数値の次元（フラクタル次元）が定義される．フラクタルの概念は様々な分野で応用され始めているが，水文学においては，河川がフラクタルの典

*　正会員　工博　岐阜大学助教授　工学部土木工学科　（〒501-11　岐阜市柳戸1－1）
**　正会員　工博　京都大学教授　工学部土木工学科　（〒606　京都市左京区吉田本町）
***　学生会員　京都大学大学院　工学研究科修士課程土木工学専攻　（同上）

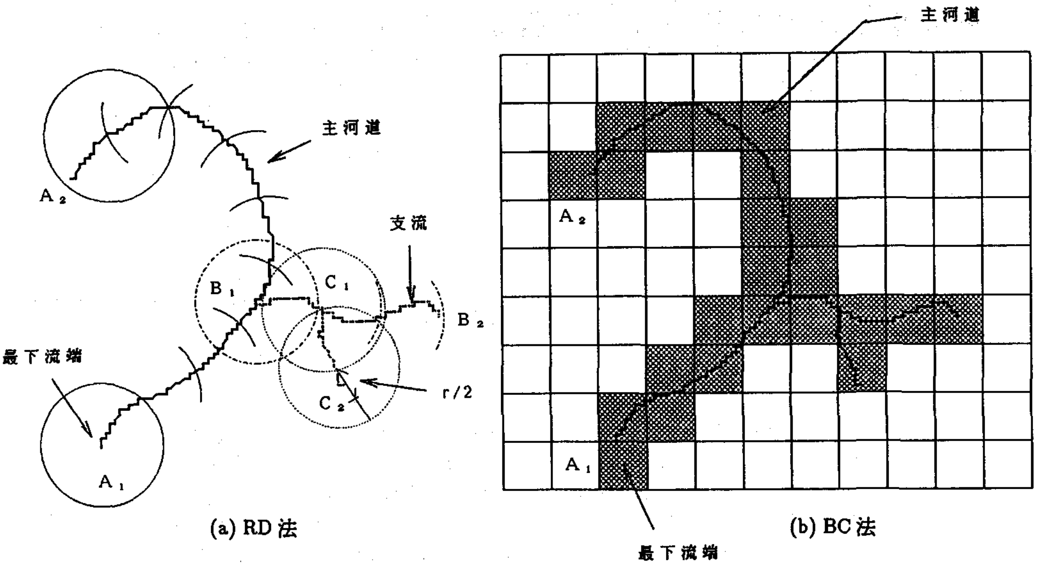

図1: 粗視化の度合を変える方法の説明図 [(a) RD法, (b) BC法]

型であると言われ，主河道のみ，あるいは多数の分岐をもつ河道網全体どちらについてもその形状はフラクタルであるとされている[15].

小川・和泉は，東京都内の中小河川および下水管網に被覆法（後述するbox-counting法）を適用してフラクタル次元を求め[16]，都市化すると河川は直線に近く（すなわちフラクタル次元の値が1に近く）なり，下水管網が発達するとフラクタル次元が増大することを示した．さらにフラクタル次元と洪水到達時間を関連づけようとしている[17]．河川の線形の変化をフラクタルの概念で解析しようとした点は着眼に優れており，また洪水予測という工学的目的への応用を図った点は評価できるものである．

本論文は，これまで筆者らが構築してきたcomputer-aidedな水文地形解析手法とフラクタルの概念とを結合して，このようなフラクタル解析をより容易にかつ客観的に実行できるようにしようとしたものであって，以下の諸点を研究目的としている．

- 数値地形情報に基づく擬河道網に対してフラクタル次元を求めるアルゴリズムを開発する．
- 二つの被覆法（ruler-dividing法とbox-counting法）を実行し両者を比較する．
- 実河道と擬河道の両方に対して求められるフラクタル次元を比較する．
- フラクタル次元と，位数理論やマグニチュード理論に基づく地形特性量との関連を調べる．

2 方 法

フラクタル図形の次元の定義にはいくつかの流儀がある．それはすべてのフラクタル図形に対して一律の次元の定義が現在のところ確立されておらず，次元を測る対象となるものによって定義を変える必要があるからである．フラクタル次元の実用的な定義のうち，河川のフラクタル次元算定に適用可能な二つの方法（粗視化の度合を変える方法と測度の関係より求める方法）を用いる．そのほか，相関関数，分布関数，スペクトルなどにより求める方法が知られている[15]が，ここでは取り扱わない．

数値地形情報から河道網を求めるには，野上らのアルゴリズム[18]を用いる．まず，メッシュ交点の標高データを基に落水線を描く．流域によっては落水線の追跡がうまくいかない場合があるが，その際には流路位置データを補助的に用いる[5]．1次河道の始まりを規定するしきい値を設けて水系図を描く（筆者らは，この水系図のことを，実際の河道を模擬したものという意味で「擬河道網」と呼んでいる）．しきい値が大きくなるにつれ粗い擬河道網が作成される．こうして得た擬河道網に対してフラクタル次元を自動的に算定するシステムを構築した．数値地形情報として，ここでは国土数値情報（KS-110-1）を用いた．すなわち，約250mメッシュの標高データをベースとしている．

表 1: RD 法による主河道のフラクタル次元

河川名	安曇川	愛知川	日置川	日野川	桂　川	古座川	大野川	重信川	天神川	野洲川
水系域コード	86061	86061	86289	87073	86061	86290	86060	88087	87072	86061
流域面積(km^2)	290	192	399	870	814	357	344	460	475	285
D	1.03	1.08	1.14	1.07	1.15	1.12	1.16	1.04	1.09	1.08

（実河道の位数1の河道数 N_1 を保存するようなしきい値について Dを求めた.）

2.1 粗視化の度合を変える方法

フラクタル（と思われる）図形を，円や球，線分や正方形，立方体といった特徴的な長さをもつ基本的な図形によって近似する方法である．その特徴的な長さ（粗視化の度合）を適宜変えていってフラクタル次元を求める．ここでは，次に述べる二つの方法，RD (ruler-dividing) 法と BC (box-counting) 法を採用する．これらはいずれも河道網を覆い尽くす方法であるので「被覆法」とも呼ばれる．

(a) RD (Ruler-Dividing) 法　任意の一定長さ r の線分で河道を下流端から上流に向かって分割していく（図-1(a)）．支流については分岐点を始点とし上流に向かう．得られる線分の総数は r の大きさに依存する．これを $N(r)$ と記す．もし河道が一直線であれば

$$N(r) \sim 1/r = r^{-1} \tag{1}$$

なる関係を満たすはずである．しかし，河道は複雑に曲がりくねっており，r を小さくすると，r が大きいときに見逃していた小さな構造が見えてくるので一般に

$$N(r) \sim r^{-D} \tag{2}$$

なる関係がある．この D をその河川のフラクタル次元と定義する．一定長さ r の定規（あるいはディバイダ）で分割していくので，ruler-dividing と名付けた．國上[20] の折れ線近似法とは，主河道に適用する場合には同じであるが，河道網に適用する場合にはやり方が異なる．r を変えて $N(r)$ を求める作業を繰り返し，横軸に r，縦軸に $N(r)$ をとり両対数紙にプロットする．その回帰直線の傾きからフラクタル次元 D を求める．

(b) BC (Box-Counting) 法　河道網を含む平面を間隔 r の格子によって一辺が r の正方形に分割する（図-1(b)）．河道網を含む正方形の個数を $N(r)$ とする．r を変化させたとき $N(r) \sim r^{-D}$ なる関係を満たせば，この河川はフラクタルで，次元 D をもつという．この方法は，河川のようにたくさんの分岐をもつ図形の解析に適した一般性の高い方法であるとともに，コンピュータで処理するのにも適している．

2.2 測度の関係より求める方法

1950年代後半から1960年代にかけて，Hack や Gray などが米国の多数の流域の実測結果から，本流（主河道）の長さ L とその地点までの流域面積 A との間に

$$L = \alpha A^{\beta} \tag{3}$$

なる関係を見いだした．α，β は定数であり，前者は流域の特性によって異なるが，べき指数 β は地域を問わず常に0.5より大きくなる．このことはその後多数の研究者によって確かめられている[19]．

ここで示す方法は，測度の関係より次元を求める方法であり，フラクタルが非整数次元の測度をもつことを利用している．一般に，長さを2倍にすると，2次元測度は 2^2 倍になり，3次元測度は 2^3 倍になる．すなわち，長さ S，面積 A，体積 V の間には次の関係が成り立っている．

$$S \sim A^{1/2} \sim V^{1/3} \tag{4}$$

ここで，D 次元測度をもつ量を X とすると，(4)式は次のように一般化できる．

$$S \sim A^{1/2} \sim V^{1/3} \sim X^{1/D} \tag{5}$$

この関係から次元を決定する．すなわち，本流（主河道）の長さ L を D 次元測度をもつ量 X と考え，(5)式より，2次元測度をもつ量である流域面積との関係 $A^{1/2} \sim L^{1/D}$ から，河川（この場合主河道）のフラクタル次元を求めるのである．(3)式の β より，$D = 2\beta$ となる．

表 2: RD法による擬河道網のフラクタル次元

しきい値	安曇川	愛知川	日置川	日野川	桂 川	古座川	大野川	重信川	天神川	野洲川
5	1.12	1.11	1.10	1.13	1.14	1.16	1.17	1.16	1.18	1.09
8	1.15	1.13	1.16	1.17	*1.20	1.15	*1.20	1.14	1.22	1.09
10	1.13	1.11	1.19	1.17	1.18	1.18	1.21	1.16	1.22	1.18
12	*1.13	1.12	*1.21	1.15	1.18	1.13	1.19	1.15	1.31	1.13
14	1.12	1.14	1.21	1.14	1.15	*1.12	1.18	*1.16	1.24	1.16
16	1.13	*1.13	1.18	*1.16	1.16	1.14	1.15	1.16	1.28	1.13
18	1.13	1.12	1.19	1.17	1.16	1.15	1.16	1.15	1.27	*1.14
20	1.12	1.13	1.19	1.17	1.16	1.16	1.17	1.16	*1.27	1.17
25	1.13	1.15	1.17	1.17	1.14	1.13	1.14	1.15	1.21	1.16
30	1.09	1.14	1.11	1.14	1.12	1.15	1.15	1.14	1.15	1.15
40	1.08	1.11	1.14	1.14	1.13	1.15	1.16	1.10	1.16	1.10
50	1.10	1.09	1.13	1.12	1.14	1.18	1.17	1.11	1.16	1.09

(*印は，実河道の位数1の河道数 N_1 を保存するようなしきい値を示す.)

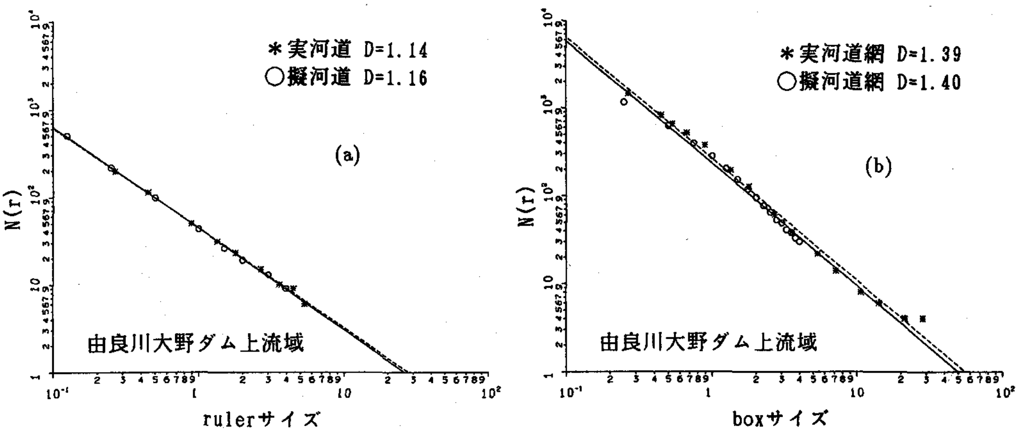

図 2: RD法(a)とBC法(b)の擬河道網への適用結果［大野川，しきい値=8］

3 結果と考察

3.1 RD法について

RD法を文献[6]で取り扱った10河川流域の主河道に適用した結果を表-1に示す（国土数値情報に収められている各河川の水系域コードと流域面積を併記しておいた）．主河道のフラクタル次元 D は，1.03から1.16までの値をとった．この値は杉山[21]の求めた1.02から1.23（日本の河川については1.02~1.17）の値とほぼ一致する．各河川について，擬河道網算出の際のしきい値を5から50まで変化させてみたが，Dの値はほとんど変化しない[22]．これは，しきい値が変化しても主河道長の変化は1.0km以下と小さいことによる．

RD法を擬河道網に適用した結果を表-2に示す．これによればフラクタル次元 D は1.1から1.3程度の値をとる．この値は，河道網に対するDとしてよく示される1.4から1.8程度の値に比してかなり小さい．しきい値が大きくなると徐々に支流が短くなるので D が少しずつ減少するが，その減少の仕方は後述するBC法ほど顕著ではない．この方法は，面的な広がりを測定するというよりも，河川総延長を線的に追跡している（主河道に全支川を直列に連結したのとほぼ同様）ことになるので，むしろ主河道のフラクタル次元に近い値となる．図-2(a)は，RD法の適用結果を示している．プロットされた点が直線的に並んでおり，主河道はフラクタル的であると言えよう．また，実河道に対して手作業で行ったもの（*印および破線）と回帰直線の傾きはほとんど変わらない．すなわち，筆者らの算定方法がうまく機能していると言える．

表 3: BC法による擬河道網のフラクタル次元

しきい値	安曇川	愛知川	日置川	日野川	桂　川	古座川	大野川	重信川	天神川	野洲川
5	1.54	1.39	1.49	1.59	1.57	1.46	1.48	1.55	1.46	1.50
8	1.47	1.32	1.43	1.53	*1.51	1.39	*1.40	1.49	1.39	1.44
10	1.45	1.29	1.40	1.49	1.48	1.36	1.36	1.45	1.36	1.41
12	*1.41	1.26	*1.38	1.47	1.46	1.34	1.33	1.43	1.33	1.39
14	1.39	1.25	1.36	1.45	1.43	*1.31	1.31	*1.40	1.31	1.37
16	1.38	*1.23	1.35	*1.43	1.41	1.30	1.30	1.38	1.30	1.35
18	1.36	1.22	1.33	1.41	1.40	1.28	1.28	1.36	1.28	*1.33
20	1.34	1.23	1.32	1.40	1.38	1.27	1.26	1.34	*1.26	1.32
25	1.30	1.20	1.30	1.37	1.35	1.25	1.24	1.31	1.24	1.31
30	1.28	1.17	1.27	1.34	1.32	1.23	1.22	1.29	1.21	1.29
40	1.24	1.14	1.25	1.29	1.29	1.19	1.18	1.26	1.18	1.26
50	1.21	1.12	1.24	1.26	1.26	1.19	1.16	1.23	1.17	1.21

(*印は，実河道の位数1の河道数 N_1 を保存するようなしきい値を示す.)

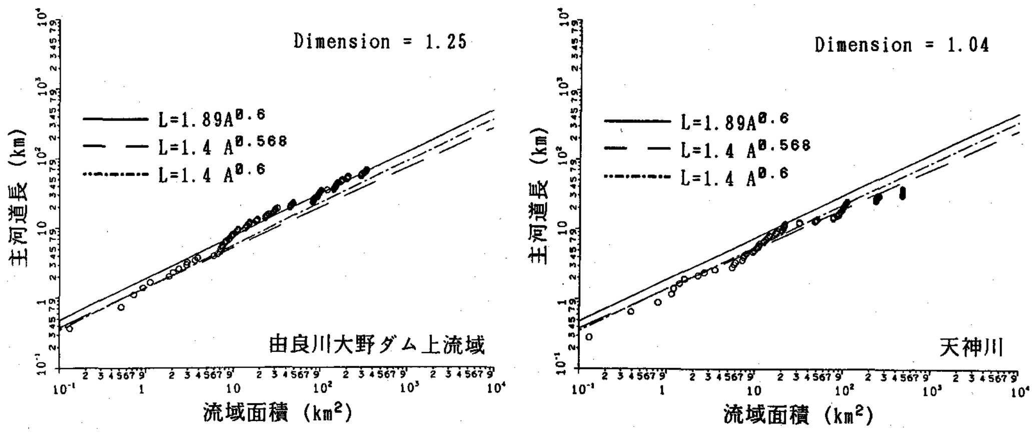

図 3: 測度の関係より求める方法の適用結果 [(左)大野川; (右)天神川]

3.2 BC 法について

BC法を主河道に適用すると，$D<1$となる場合が散見された．擬河道網はメッシュ交点を結ぶ落水線を基本としており，そのメッシュ間隔を利用して正方形 (box) を取っているので，河道が box の頂点あるいは辺上のみを通過する部分がでる．これにより，カウントされる box の数が小さくなり D が1を下回ることが生じる．この方法は，主河道のフラクタル次元算定には適当でない．

擬河道網に適用した結果の1例を図-2(b)に示す．図-2(a)と同様，実河道に対する手作業と変わらない良好な算定結果を得ている．この場合も，プロット点は直線的に並んでおり，河道網のフラクタル性が窺える．表-3に，しきい値を変えたときBC法によって得られるフラクタル次元の値を示す．しきい値を大きくしていくにつれ擬河道網は粗くなっていくので，フラクタル次元の値も $1.1<D<1.6$ の範囲で徐々に小さくなっていく．しきい値5の場合と50の場合ではDの値が0.3程度も違ってくるので，実河道のフラクタル次元を推定するには，しきい値の設定が重要になる．しきい値の決定規準については筆者らの検討[6]を参考にされたい．実河道の位数1の河道数 N_1 を保存するようなしきい値の場合に，ここで検討した10流域のフラクタル次元は1.23から1.51程度の値となった．

3.3 測度の関係より求める方法について

筆者らは先に，主河道長と流域面積との関係からここで取り扱った10流域の平均的なフラクタル次元を求めようと試みたが，10点程度のプロットでは回帰直線を引くのが困難であった[22]．そこで，ここでは，主河道上の多数の点 (100から400個程度，表-4に示した) で上流からその地点までの河道長と集水面積を求め，D

表 4: 主河道と集水面積の関係から求めた主河道のフラクタル次元

河川名	安曇川	愛知川	日置川	日野川	桂　川	古座川	大野川	重信川	天神川	野洲川
プロット点数	176	147	300	230	367	193	236	127	141	157
D	1.18	1.21	1.32	—*	1.40	1.26	1.25	1.08	1.04	1.37

（実河道の位数1の河道数 N_1 を保存するようなしきい値についてDを求めた．
* 日野川については集水面積を求めるプログラム上のバグにより算定できなかった．）

表 5: Tarboton ら[23] の方法により求めた擬河道網のフラクタル次元

河川名	安曇川	愛知川	日置川	日野川	桂　川	古座川	大野川	重信川	天神川	野洲川
$D = \frac{\log R_b}{\log R_l}$	1.72	1.66	1.34	1.63	1.69	1.65	1.40	2.46	1.96	1.54

（実河道の位数1の河道数 N_1 を保存するようなしきい値についてDを求めた．）

を流域ごとに算出することとした．この方法は，手作業では非常に大変で，今までこのような解析を行った例はないが，落水線—擬河道に基づく本研究での方法では，極めて容易に実行できるものでる．図-3 はその例で，上流から（図では左下から）順次プロットしていくと大きな支流が合流した時点で集水面積が急増するので，そのとき右方向に少し離れてプロット点が描かれる．参考のため，従来からよく引用される経験式 $L = 1.89A^{0.6}, 1.4A^{0.568}, 1.4A^{0.6}$ を併記しておいたが，どの流域もその近くにプロットされた．この方法で得られたフラクタル次元を表-4 に示す．D の範囲は 1.04 から 1.40 であり，RD 法による結果（表-1）より大きい目の値を与える．

3.4 地形特性量とフラクタル次元の関係

筆者らは，位数理論やマグニチュード理論に基づく地形特性量を 10 流域に対して既に求めている[6]．それらの値とフラクタル次元の関係を調べてみた（図-4）．地形特性量としては，(a) 位数1の河道数 N_1，(b) 位数2の河道数 N_2，(c) 分岐比 R_b，(d) 河道長比 R_l，(e) 河道勾配比 R_s，(f) 平均ソース高さ E_n，(g) 最大ソース高さ D_n，(h) 平均外部リンク長 LE，(i) 平均内部リンク長 LI，(j) 平均外部リンク勾配 SE，(k) 平均内部リンク勾配 SI の 11 種を選んだ．

図-4 によれば，N_1，N_2 とは比較的高い相関がありそうである．実際，位数1および2の河道の数が多いということは，河道網が発達している（すなわち河道が2次元空間を覆い尽くす）ということであるから，N_1，N_2 が大きくなるとフラクタル次元が2に近い値となることが予想される．他の特性量については図が示すように，顕著な相関は見られない．これら以外の地形特性量や調査流域数を増やすなどとともに，整理の仕方にもさらなる工夫が必要である．

Tarboton ら[23] は，分岐比 R_b と河道長比 R_l のそれぞれの対数の比が河道網のフラクタル次元を与える（$D = \log R_b / \log R_l$）として9流域に適用し，7流域でDが 1.7 から 1.9，2流域で 2.4 と 2.5 を得ている．筆者らが同様の検討を行ったところ，Tarboton らと同じような結果であった（表-5）．すなわち，相対的に大きなフラクタル次元が得られ，場合によっては $D > 2$ となる．このようなことが起きるのは R_b や R_l といった値が，最大位数がたかだか5程度の流域においては，かなり不安定なことによる．実際，河道網の認識の仕方の違い（あるいはしきい値のとり方）によってこれらの値はかなり変動する[4,5]．したがって，この方法はフラクタル次元算定には不適切であると言える．また，分岐比，河道長比や河道勾配比といった地形特性量とフラクタル次元との明確な関係が出てこないのは，これと同じ理由によっている．

4 おわりに

従来，河川流域の地形特性量の算定は地形図をもとに行われてきた．その作業はかなりの労力を要するものであったが，筆者らは数値地形情報を用い，コンピュータを援用して落水線—擬河道網の解析を行うことにより省力化・客観化を図ってきた[4-6]．本研究は，同じ手法をフラクタル解析に適用したものであって，その成果を列挙すれば以下のようになる．

- 粗視化の度合を変える方法として二つの被覆法（RD法とBC法）をアルゴリズムとして実現した．このアルゴリズムによれば，実河道網（地形図から読み取った河道網）に対して手作業で行った結果と極めて近い結果を与えることが示された．

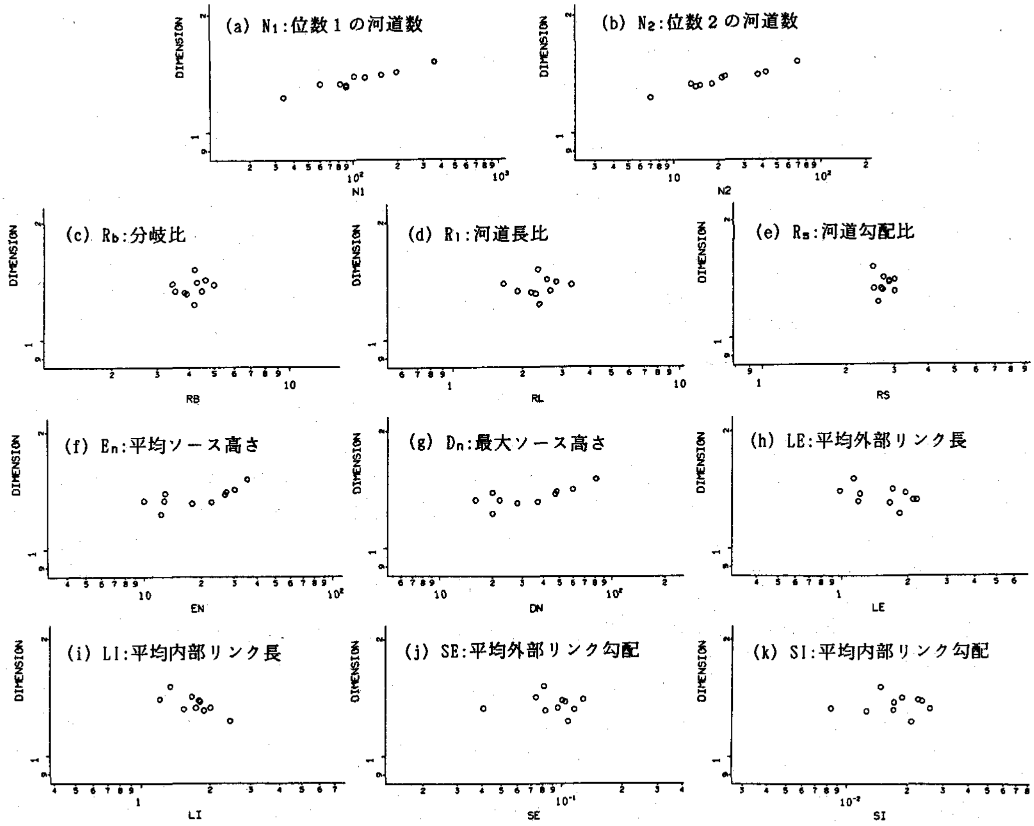

図 4: 種々の地形特性量とフラクタル次元の関係

- さらに，測度の関係から求める方法として主河道長と集水面積の関係による方法もアルゴリズムとして実現した．今までは多数の流域の面積と主河道長との関係から，それらの流域の平均的なフラクタル次元を求めていたのであったが，これにより 1 流域内での解析が可能となった．
- RD 法と BC 法は，それぞれ異なるフラクタル次元を与える．前者は主河道のフラクタル解析に適しており，後者は河道網全体の解析に適している．これらの手法をわが国の 10 個の河川流域に適用した結果，主河道のフラクタル次元は 1.1 程度（1.03~1.16），河道網のそれは 1.4 程度（1.23~1.51）の値となった．
- 主河道と集水面積の関係より求められた主河道のフラクタル次元は 1.2 程度（1.04~1.40）であり，RD 法による値より大きい（天神川の場合を除く）．
- 種々の地形特性量とフラクタル次元との関連については，その関連性を明確にするには至らなかった．位数 1 および 2 の河道数 N_1, N_2 とは比較的高い相関がありそうである．調査流域数を増やすとともに，整理の仕方にもさらなる工夫が必要である．

河川はフラクタルである，としばしば言われる．河川がフラクタルであると言える領域は，上限 100km 平方（10000km^2）程度とも言われており（文献[14]の第 12 章），下限にも何らかの制約が存在する可能性がある．しかし，わが国のような比較的小さい流域では，その上限を越えることはないし，ここで見てきた河川においては，主河道，河道網ともにフラクタルとみなしてよいようである．

では，河川のフラクタル次元を求めてそれがどのような工学的目的に利用できるのか．本論文では，その疑問に答えるまでには至っていない．フラクタル図形は自己相似性をもつものであるから，その性質を地形および流出の解析に利用できないだろうか，というのが本研究の動機のひとつである．小さな流域での形態あるいは現象が，自己相似性（フラクタル次元）を通じて，大きな流域へも適用できる（またはその逆）というような手法が開発できないものであろうか．

ただし，同じ流域であっても解析方法によって求められるフラクタル次元の値が異なることがある．この点はフラクタル解析を応用しようとする際に問題となってこよう．また，ここでは，河川の平面的な形状のみを取り扱ったが，現象論的には地形の起伏状態も大きな要素となる．フラクタルによって自然の地形に似た3次元的形状の表現も可能であり，この点に着目した研究の余地が残されている．本論文が，水文流出系におけるフラクタルの工学的応用への何らかの参考となれば幸いである．

本論文の作成にあたっては，国土情報整備事業の一貫として建設省国土地理院において作成された地形および流域等に関する国土数値情報資料を使用した．また，神戸大学理学部高安秀樹氏および東京都土木技術研究所の小川進氏からは関連する文献を提供して頂いた．ここに記して謝意を表する次第である．

なお，本研究は，文部省科学研究費補助金・一般研究(C)01550404「国土数値情報を用いた水文流出系の解析」(代表：高棹)，同・奨励研究(A)02855132「フラクタル次元と河道網構造および流出特性の関係に関する実証的研究」(代表：宝）の補助を受けて行われたものであることを付記し，謝意を表する．

参 考 文 献

1) 国土庁計画調整局・建設省国土地理院（編)：国土数値情報，国土情報シリーズ2，130pp.，1987．
2) 土木学会土木情報システム委員会：第12回電算機利用に関するシンポジウム講演集，258pp.，1987．
3) 平成元年度地理情報システム研究集会，平成2年1月24日，野口英世記念会館，1990．
4) 宝　馨・高棹琢馬・溝渕伸一：水文地形解析の自動化の試み，第32回水理講演会論文集，pp. 25-30，1988．
5) 宝　馨・高棹琢馬・溝渕伸一・杉原宏章：コンピュータを用いた水文地形解析序論，京都大学防災研究所年報，第31号B-2，pp. 325-340，1988．
6) 高棹琢馬・宝　馨・溝渕伸一・杉原宏章：国土数値情報を用いた水文地形解析に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第32号B-2，pp. 435-454，1989．
7) 川谷健・中野啓眞・菊田勝之：地表流流出解析モデルへの地形要素の導入に関する研究，第32回水理講演会論文集，pp. 31-36，1988．
8) 嶋田啓一・山田正・藤田睦博・洪廷芳：流域の地形特性が降雨流出に及ぼす影響について，第32回水理講演会論文集，pp. 43-48，1988．
9) 岡太郎・安田史夫：数値標高データの作成と流出解析への応用，水文・水資源学会1990年研究発表会要旨集 pp. 42-45，1990．
10) 陸旻皎・小池俊雄・早川典生：レーダー雨量情報に対応する分布型流出モデルの検討，第33回水理講演会論文集，pp. 91-96，1989．
11) 高棹琢馬・椎葉充晴・立川康人：流域地形に対応した準3次元斜面要素モデルと流域規模モデルの自動作製，第33回水理講演会論文集，pp. 139-144，1989．
12) 杉浦正之・吉野文雄：レーダ雨量計に対応した実用的な分布型流出モデル，水文・水資源学会1989年研究発表会要旨集，pp.243-246，1989．
13) 道口敏幸・藤田睦博・榎国夫：模擬河道と閾値特性について，土木学会第45回年次学術講演会講演概要集，II-45，1990．
14) Mandelbrot, B.B: The Fractal Geometry of Nature, Freeman, New York, 1982; 広中平祐監訳，フラクタル幾何学，日経サイエンス社，467pp.，1985．
15) 高安秀樹：フラクタル，朝倉書店，186pp.，1986．
16) 小川進・和泉清：都市河川のフラクタル次元解析，土木学会第44回年次学術講演会講演概要集，II-38，1989．
17) 小川進・和泉清：都市河川のフラクタル次元解析と洪水到達時間（投稿中)，8pp.，1990．
18) 野上道夫・杉浦芳夫：パソコンによる数理地理学演習，古今書院，1986．
19) 高山茂美：河川地形，共立出版，pp. 65-67，1974．
20) 國上真章：河川のフラクタル次元—分岐図形としての水系—，名古屋大学フラクタル研究会，1984．
21) 杉山寿伸：異次元の世界をさぐる—はたして川はフラクタルか—，名古屋大学フラクタル研究会，1984．
22) 高棹琢馬・宝　馨・杉原宏章・桑名是成：河川流域のフラクタル次元に関する基礎的研究，土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，II-41，1990．
23) Tarboton, D.G., R.L. Bras and I. Rodriguez-Iturbe: The Fractal Nature of River Networks, *Water Resources Research*, Vol. 24, No. 8, pp. 1317-1322, 1988．