

非線型移流項の卓越した流れの計算

Numerical Calculation of Flows with Dominant Nonlinear Advection

佐賀大学理工学部 大 串 浩一郎 Koichiro OHGUSHI
九州大学工学部 小 松 利 光 Toshimitsu KOMATSU
九州工業大学工学部 朝 位 孝 二 Kouji ASAI

In the recent years, some accurate methods for calculation of linear advection term have been developed and performance of some of them on nonlinear cases have also been attempted. In this paper, the split operator approach and the characteristic method were adopted for the calculation of nonlinear advection term. The computational method was proposed from a combination of the upwind difference and the 6-point scheme resulting into a scheme which has proved to give accurate solution for 1-D Burger's equation. Its application to practical cases such as hydraulic bore etc. is also straightforward and accurate.

Keywords: advection term, Burger's equation, nonlinear, 6-point scheme, discontinuity

1. はじめに

平均流による物理量の輸送、即ち移流は、水理学の実践的な問題において重要な役割を果たすことが多い。河川や湖沼における物質輸送の問題や、開水路の非定常問題において、質量や運動量の保存式は移流項を含んでいる。それらの移流項は正確に評価されなければならないにもかかわらず、その数値的取り扱いには非常に困難である。近年、拡散方程式等の線型の移流方程式の計算においては、特性曲線法に基づいたいくつかの精度の良い計算法が開発されてきた(Holly and Preissmann¹⁾、小松ら²⁾)。

一方、非線型移流については、例えば、開水路非定常流について見ると、ダム破壊、水門の緊急開放・閉塞等によって生じる時間的変化の急な流れは、非線型移流項の卓越した流れであり、水面等の不連続部を形成することが多い。不連続部を境にして上流と下流で流れの性質が異なり、全ての領域を単一の数値シミュレーションで精度良く解くのは非常に困難であり、このような流れの数値計算法はまだ十分には確立されているとは言えない。

Toda-Holly³⁾は、特性曲線法に基づいたHolly-Preissmann schemeを非線型方程式の解法へ拡張し、線型の場合と同様高い精度で計算が可能であることを示した。しかし、この方法は、各格子点で各時間ステップ毎にクーラン数に関する3次方程式を解く必要があり、特に純粋移流の場合にはクーラン数の値に対する制約が厳しかった。またこのスキームの性質上、従属変数の勾配まで移流計算する必要があり、結果として精度を落としてしまう可能性が大きかった。

本研究では、小松らの開発した6-point schemeを非線型の場合に適用することによって、Toda-Holly scheme以上の高精度を有しかつ計算が大幅に簡化された新しい計算法を提案する。そして、上述の非線型移流項の卓越した不連続部を形成する流れの数値計算に適用してその有効性を検証する。

2. 一次元Burger's方程式に関する高精度数値計算スキームの開発

2.1 計算法の記述と解析

まず、最も簡単な非線型方程式の一つである1次元のBurger's方程式の計算について検討する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで、 $u(x, t)$ は流速、 ν は拡散係数である。この方程式は、ナヴィエ・ストークス方程式の非線型性と同様の性質を持ち、乱流・衝撃波の問題の原型方程式と見なされて差分法の精度の検証等に利用されて来た。(1)式の特曲線表示は

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad \text{上で} \quad \frac{du}{dt} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

である。ここでは、移流と拡散を各時間ステップ毎に各々別個に取り扱うスプリット・オペレーター・アプローチを採用することによって、各々の計算に対して最良の計算スキームを選ぶことを可能にした。したがって、数値計算が難しいとされている以下のような非線型移流についてだけ独立にその計算法を工夫することができる。

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad \text{上で} \quad \frac{du}{dt} = 0 \quad (3)$$

(3)式は特性曲線上で流速 u ＝一定を意味している。図-1における破線は、点 $\eta(x_i, t_{n+1})$ に到達する特性曲線を表しており、この曲線の $t = t_n$ における位置を ξ とすれば次式が得られる。

$$u_i^{n+1} = u_\eta = u_\xi \quad (4)$$

ここで、添字 n は時間 t_n を表し、 i は計算格子点 x_i を表す。 u_η 、 u_ξ は各々、特性曲線の η 、 ξ における流速である。

6-point schemeは、この格子上にない流速 u を格子上の既知の値で内挿する方法である⁽²⁾。

$$u_\xi = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 \quad (5)$$

ここで、 α はクーラン数、 $a_0 \sim a_3$ は計算格子上の既知の流速の値から求まる係数である。

しかし、ここで、クーラン数 α は、残念ながら未知数であり、移流の計算を6-point schemeを用いて計算するためには従属変数である流速 u と直接関係するこのクーラン数をまず評価しなければならない。TodaとHollyは、Holly-Preissmann schemeに基づいた(5)式の3次方程式を解いて α の値を求めているが、本研究では、第一近似として(1)式の左辺を保存型表示したのち、後方差分を用いてクーラン数を決定した。こうして得られたクーラン数を6-point schemeに代入して再度流速 u を計算し、両者の荷重平均を最終的な u の値とした。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_i^{n+1}} &= \kappa \overline{u_i^{n+1}} + (1 - \kappa) u_\xi \\ \overline{u_i^{n+1}} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(u_i^n)^2}{2} - \frac{(u_{i-1}^n)^2}{2} \right) \\ u_\xi &= a_0 + a_1 \bar{\alpha} + a_2 \bar{\alpha}^2 + a_3 \bar{\alpha}^3 \\ \bar{\alpha} &= \frac{\overline{u_i^{n+1}} \Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

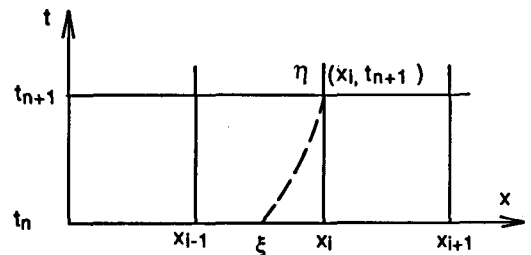


図-1 一次元計算格子

多くの数値実験の結果、一次元Burger's方程式に対しては荷重 $\kappa = 0.72$ が最も良い結果を与えた⁽⁴⁾。

2.2 モデル計算例

前節で記述された非線型方程式の計算法を用いて、いくつかの厳密解が分かっている非線型のモデル計算を行い、その適用性について検討した。そのうちの一例についてここでは紹介する。

拡散なしに下流へ伝わる理想化された衝撃波 (Lax⁵⁾) を考える。これは、急峻なフロントをもつ波の伝播の一例である。初期条件

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x-x_0) < 0 \\ 0 & \text{for } (x-x_0) \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

の時、解析解は次のように求まっている。

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x-x_0)/t \leq 1/2 \\ 0 & \text{for } (x-x_0)/t > 1/2 \end{cases} \quad (8)$$

式(8)は、解析解は波速1/2で下流へ伝播する不連続波であることを示している。計算条件は、以下のようである。

Case a-1 $\Delta x=0.01, \Delta t=0.01, t=0.2, 0.4, 0.6$
Case a-2 $\Delta x=0.01, \Delta t=0.005, t=0.2, 0.4, 0.6$

共通のパラメーターとして $x_0=2\Delta x$ 、境界条件 $u(0,t)=1.0$ を用いた。図-2はCase a-1の計算結果であり、図-3はCase a-2の計算結果である。図-2には比較のためにLax-Wendroff schemeの計算結果も描かれている。Lax-Wendroff schemeでは、位相誤差はあまりない代わりに振幅誤差が見られる。一方、Toda-Holly schemeや式(6)による計算結果は振幅誤差に対しては非常に良い精度を示している。ただ、Toda-Holly schemeは式(6)のスキームに比べてより大きい位相誤差がある。また、図-3では、Lax-Wendroff schemeは大きい位相誤差を生じ、一方、その他のスキームはCase a-1と同様の結果を与えている。

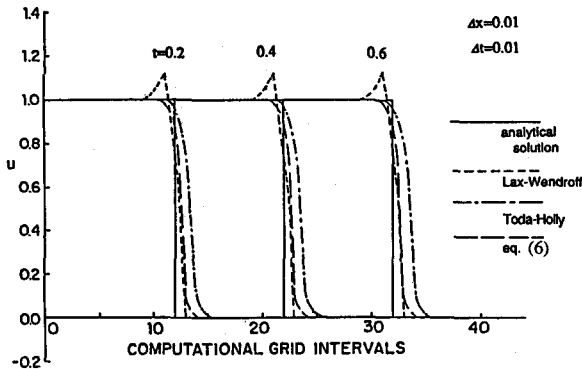


図-2 急峻なフロントをもつ波の伝播 (case a-1)

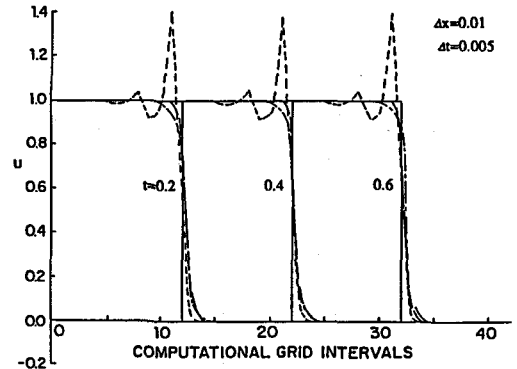


図-3 急峻なフロントをもつ波の伝播
(case a-2)

3. 非線型移流項の卓越した流れの計算への適用

洪水流に代表されるような時間的変化の緩やかな、不連続部のない流れにおいては、既にいくつかの数値計算法が利用されている。一方、不連続部を含む、時間的変化の激しい流れにおいては非線型移流項が卓越し、通常の数値計算法では実用に適さない場合も起こりうる。本研究では、2. で得られた計算手法を上述のような厳しい条件の下で適用し、段波等のモデル計算を行なってその精度を検証した。

3.1 計算法の記述と解析

St Venantの仮定に基づく開水路一次元の非定常流れの支配方程式は次式で表わされる。ただし、水路は一樣断面で摩擦のない水平な開水路であるとする。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{2} h^2 \right) = 0 \quad (10)$$

ここで、 q は単位幅当りの流量、 h は水深、 g は重力加速度を示している。方程式(10)を特性曲線表示すると、

$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{q}{h} \quad \text{上で} \quad \frac{dq}{dt} + \left(gh - \frac{q^2}{h^2} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 \quad (11)$$

であり、特性曲線上で上式を積分すると次式が得られる。

$$x_\eta - x_\xi = \int_{t_\xi}^{t_\eta} \left(2 \frac{q}{h} \right) dt, \quad q_\eta - q_\xi + \int_{t_\xi}^{t_\eta} \left(gh - \frac{q^2}{h^2} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) dt = 0 \quad (12)$$

ここで、 ξ と η は、2.と同様に特性曲線の出発点と到着点を表わす。 ξ における水深 h_ξ と単位幅流量 q_ξ を風上差分と6-point schemeの荷重平均として求めて、式(9)と(12)を差分化すると次式が得られる。

$$\left(\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{2\Delta t} + \frac{h_{i-1}^{n+1} - h_{i-1}^n}{2\Delta t} \right) + (\theta \frac{q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{\Delta x}) = 0 \quad (13)$$

$$q_i^{n+1} - q_\xi + \left[\left\{ gh_i^{n+1} - \frac{(q_i^{n+1})^2}{(h_i^{n+1})^2} \right\} \left(\frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) \theta + \left\{ gh_\xi - \frac{(q_\xi)^2}{(h_\xi)^2} \right\} \left(\frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta x} \right) (1-\theta) \right] \Delta t = 0 \quad (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} h_\xi &= \kappa \overline{h_\xi} + (1-\kappa) \overline{\overline{h_\xi}} \\ q_\xi &= \kappa \overline{q_\xi} + (1-\kappa) \overline{\overline{q_\xi}} \end{aligned}, \quad \overline{h_\xi} = \overline{h_i^{n+1}} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i-1}^n - q_i^n) + h_i^n,$$

$$\overline{\overline{q_\xi}} = \overline{q_i^{n+1}} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} - \frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{g}{2} \{ (h_i^n)^2 - (h_{i-1}^n)^2 \} \right] + q_i^n,$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{h_\xi}} &= a_0 + a_1 \overline{\alpha} + a_2 \overline{\alpha}^2 + a_3 \overline{\alpha}^3 \\ \overline{\overline{q_\xi}} &= b_0 + b_1 \overline{\alpha} + b_2 \overline{\alpha}^2 + b_3 \overline{\alpha}^3 \end{aligned}, \quad \overline{\alpha} = \frac{dx}{dt} \frac{\Delta t}{\Delta x} = 2 \frac{q}{h} \frac{\Delta t}{\Delta x} = 2 \frac{\overline{q_\xi}}{\overline{h_\xi}} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

ここで、 $a_0 \sim a_3$ は水位 h_j ($j=i-3 \sim i+2$)より求まる係数で、 $b_0 \sim b_3$ は単位幅流量 q_j ($j=i-3 \sim i+2$)により求まる係数である。また、 θ は時間方向の重み係数である。

式(14)は非線型であるため h^{n+1} と q^{n+1} についてこのままでは解くことができない。したがって線形化するため次の式を仮定し、

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n + \Delta h_i \\ q_i^{n+1} &= q_i^n + \Delta q_i \end{aligned} \quad (15)$$

式(13)、(14)に代入することによって次の線形系が得られる。

$$\begin{aligned} A_i \Delta h_{i-1} + B_i \Delta q_{i-1} + D_i \Delta h_i + E_i \Delta q_i &= F_i \\ A_i' \Delta h_{i-1} + B_i' \Delta q_{i-1} + D_i' \Delta h_i + E_i' \Delta q_i &= F_i' \end{aligned} \quad (16)$$

ここで

$$A_i = \frac{1}{2\Delta t}, \quad B_i = -\frac{\theta}{\Delta x}, \quad D_i = \frac{1}{2\Delta t}, \quad E_i = \frac{\theta}{\Delta x}, \quad F_i = \frac{q_{i-1}^n - q_i^n}{\Delta x}$$

$$A_i' = \frac{\theta}{\Delta x} \left\{ \frac{(q_i^n)^2}{(h_i^n)^2} - gh_i^n \right\}$$

$$B_i' = 0$$

$$D_i' = \frac{\theta}{\Delta x} \left\{ g(2h_i^n - h_{i-1}^n) + \frac{(q_i^n)^2}{(h_i^n)^3} (h_i^n - 2h_{i-1}^n) \right\}$$

$$E_i' = -2 \frac{q_i^n}{(h_i^n)^2} (h_i^n - h_{i-1}^n) \frac{\theta}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta t}$$

$$F_i' = -\frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{\Delta t} - \left[\theta \left\{ h_i^n - \frac{(q_i^n)^2}{(h_i^n)^2} \right\} + (1-\theta) \left\{ gh_{i-1}^n - \frac{q_{i-1}^n}{h_{i-1}^n} \right\} \right] \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta x}$$

上式をDouble Sweep Method等⁶⁾を利用して Δh_i と Δq_i について解けば、 h^{n+1} と q^{n+1} が求まる。

3.2 段波のモデル計算例

解析解の分かっている2つの場合について数値実験を行なった。

(1) 上流へ進行する段波の形成される場合

摩擦のない水平な開水路を水深2m、単位幅流量2m²/sの水が流れている時、 $t=0$ で下流端のスルースゲートが一瞬のうちに閉じられると、段波が一定の波速で上流へ伝播する。その様子を示しているのが図-4である。計算条件は $\Delta x = 0.02\text{m}$ 、 $\Delta t = 0.004\text{s}$ であり、TIME STEP $t=50, 100$ の時の計算結果がプロットされている。Toda-Holly schemeと比較して見ると、スムージングはやや増加しているが、不連続部で振動が抑えられている。最適な重み係数の値は $\kappa = 0.3$ 、 $\theta = 0.81$ であった。

(2) 下流へ進行する段波の形成される場合

摩擦のない水平な開水路で水深1m、単位幅流量0m²/sの水が貯っている所へ、上流端より突然、流量2m²/sの水が解放される場合を考える。このとき生じる段波は静水の上を一定の波速で下流へ向かって伝播する。図-5はこのときの様子を示しており、計算条件は $\Delta x = 0.02\text{m}$ 、 $\Delta t = 0.005\text{s}$ を使用し、TIME STEP $t=40, 80$ の結果が描かれている。Toda-Holly schemeとほとんど同じ計算結果であるが、若干スムージングは増加しているようである。最適な重み係数は、 $\kappa = 0.72$ 、 $\theta = 0.63$ であった。

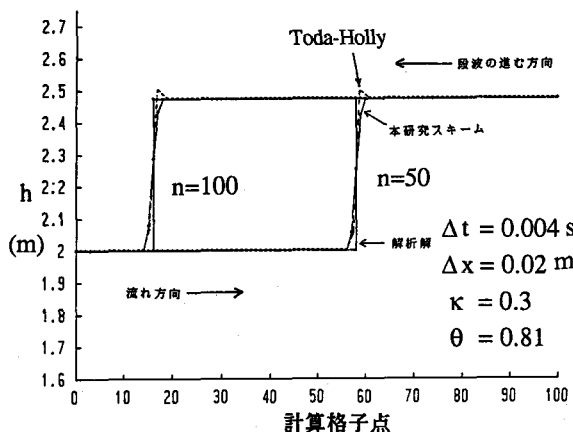


図-4 上流へ進行する段波の計算

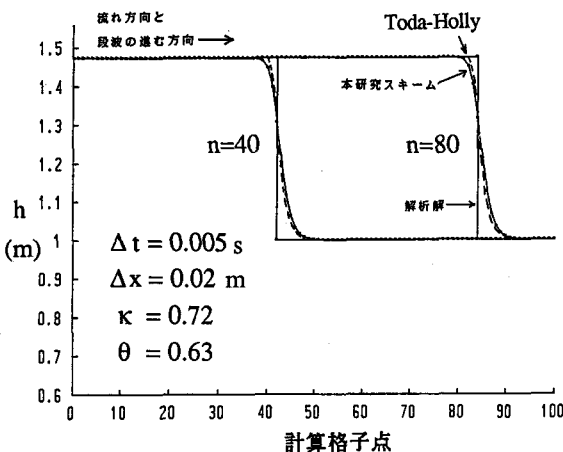


図-5 下流へ進行する段波の計算

4. 結論

非線型移流項の高精度数値計算法の開発を目標として行なわれた本研究の主な結論は次の通りである。

- (1) 線形の移流方程式の解法として開発された6-point schemeを非線型移流項へ拡張し、良好な結果を得た。
- (2) 一次元Burger's方程式に対して風上差分と6-point schemeを組み合わせた計算法をまず開発し、重み $\kappa=0.72$ を得た。モデル計算では非常に精度良くシミュレートすることができた。
- (3) 一次元開水路非定常流の数値解析に2.1の手法を拡張して適用し、段波等の不連続部が形成される時間的変化の急な流れを解析した。その結果、精度の良い計算結果が得られたが、そのときの最適な重み κ 及び θ の値は必ずしも普遍的な定数ではないようであり、今後の研究の課題となった。
- (4) Toda-Holly scheme の欠点であったクーラン数に関する3次方程式を解く必要はなくなった。また従属変数の勾配も移流計算することなく高精度に非線型移流項をシミュレートすることが可能となった。
- (5) 不連続部を境にして流れの性質が異なる場合でも計算領域を分割せずに計算することが可能となった。

5. 参考文献

- (1) Holly Jr., F.M. and A. Preissmann: Accurate calculation of transport in two-dimensions, J. Div., ASCE, Vol.98, HY11, pp.1259-1277, 1977.
- (2) Komatsu, T., Holly Jr., F.M., Nakashiki, N. and K. Ohgushi: Numerical calculation of pollutant transport in one and two dimensions, J. Hydroscience and Hydraulic Eng., Vol.3, No. 2, pp.15-30, 1985.
- (3) Toda, K. and F.M. Holly Jr.: Hybrid computation of nonlinear advection-diffusion, J. Hydroscience and Hydraulic Eng., Vol.6, No.1, pp.1-11, 1988.
- (4) Ohgushi, K., Komatsu, T. and K. Asai: Computation of nonlinear advection term with high accuracy, Proc. of the 23rd congress of IAHR, pp.D231-D238, 1989.
- (5) Lax, P.D.: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical applications, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol.7, pp.159-193, 1954.
- (6) Cunge, J.A., F.M. Holly, Jr. and A. Verwey: Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Iowa Institute of Hydraulic Research, Iowa City, Iowa, 1980.