

k-ε 乱流モデルによる振動格子乱流の数値解析

Numerical Analysis of Oscillating-Grid Turbulence by Using k-ε Model

九州大学工学部	松 永 信 博	Nobuhiro MATSUNAGA
九州大学工学部	小 松 利 光	Toshimitsu KOMATSU
九州大学大学院	高 畑 研	Ken TAKAHATA
九州大学工学部	杉 原 裕 司	Yuji SUGIHARA

The properties of turbulence induced by oscillating a grid vertically have been investigated by means of both numerical analysis and turbulence measurement. The turbulent field generated by an oscillating-grid is in the equilibrium between the diffusion and the dissipation of turbulent energy, and it is homogeneous in the horizontal direction. The vertical distributions of turbulent energy k , its dissipation rate ϵ , eddy viscosity and a characteristic length scale have been calculated by using the k - ϵ turbulence model. The turbulent energy and the energy flux in the vertical direction have been measured. Their vertical distributions agree well with the calculated results. The values of k and ϵ at the origin of a vertical axis of coordinates, which have been evaluated by fitting these experimental results to the calculated ones, have been related with the hydraulic conditions.

Keywords: numerical analysis, oscillating-grid turbulence, turbulence measurements

1. 緒言

静止流体中で格子を鉛直方向に振動させた時、乱れの諸量は水平面において一様で鉛直方向にのみ変化する、平均流の存在しない乱流場が形成される。このような乱流場は、乱れのエネルギー方程式において拡散項と散逸項とがつり合った場として記述され、興味ある乱流の一つでもある。^{1), 2), 3)}

本研究の目的は、 k - ϵ 乱流モデルを用いることによりそのような乱流場における乱れエネルギー、乱れエネルギーの散逸率、渦動粘性係数などの乱れ諸量の分布を理論的に明らかにすると同時に、振動格子乱流の測定を広範囲の実験条件のもとで行い、解析結果と実験結果との比較を行うことである。さらに、数値解析において境界条件として与えた乱れエネルギーと散逸率の値を実験結果に基づいて算定し、それらを水理条件と関係づけることによって、任意の条件で作られた振動格子乱流の諸量を予測することである。

2. 数値解析

格子を振動させることによって生じた乱流場は平均流を持たず、乱れの諸量は水平方向に一様で鉛直方向にのみ変化する。従って、このような乱れに対して k - ϵ 方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right\} - \epsilon \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right\} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \\ v_t &= C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}\end{aligned}\tag{1}$$

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, C_2 = 1.92$$

z は鉛直上向きに取られた座標である。

ここで、乱れエネルギー $k = k_0$ 、散逸率 $\varepsilon = \varepsilon_0$ を持つ乱れを $z = 0$ において定常的に与え、乱れの拡散と散逸とがつり合った定常乱流場が形成されるまでの k と ε の時間的発達の過程をシミュレートする。この場合、初期条件と境界条件は次のように与えられる。

・初期条件

$$z = 0 ; k = k_0, \varepsilon = \varepsilon_0, \nu_t = C \mu k^2 / \varepsilon_0 \quad (2)$$

$$z \neq 0 ; k = 0, \varepsilon = 0, \nu_t = 0$$

・境界条件

$$z = 0 ; k = k_0, \varepsilon = \varepsilon_0, \nu_t = C \mu k^2 / \varepsilon_0 \quad (3)$$

$$z \rightarrow \infty ; k = 0, \varepsilon = 0, \nu_t = 0$$

無次元量を

$$\tilde{k} = k / k_0, \tilde{\varepsilon} = \varepsilon / \varepsilon_0, \tilde{z} = z / (k_0^3 \varepsilon_0^{-2})^{1/2},$$

$$\tilde{t} = t / (k_0 \varepsilon_0^{-1}), \tilde{\nu}_t = \nu_t / (k_0^2 \varepsilon_0^{-1}) = C \mu \tilde{k}^2 / \tilde{\varepsilon}$$

で定義し、これらを (1) ~ (3) 式に代入することにより方程式系を無次元表示する。無次元化された基礎式は、(1) 式に $\sim$ がつくだけで変わらないので改めて示さない。無次元化した初期条件、境界条件は

・初期条件

$$z = 0 ; k = 1.0, \varepsilon = 1.0, \nu_t = 0.09$$

$$z \neq 0 ; k = 0, \varepsilon = 0, \nu_t = 0$$

・境界条件

$$z = 0 ; k = 1.0, \varepsilon = 1.0, \nu_t = 0.09$$

$$z \rightarrow \infty ; k = 0, \varepsilon = 0, \nu_t = 0$$

となる。ただし、無次元量を意味する $\sim$ は便宜上省略している。

計算に際しては、時間に関して前進差分、空間に関して中央差分を用いて基礎式を差分化した。無次元時間ステップは 0.1、無次元空間メッシュ幅は 0.25 で z の値 0 から 10 までを 40 等分した。 $z \rightarrow \infty$ における境界条件を計算では $z = 10$ で与えた。解法には陰解法を用い、定常解を求めるため非定常項が拡散項の 10^{-3} 以下になるまで繰り返し計算を行った。

3. 実験装置と実験方法

実験に用いた水槽は、長さ 100cm、幅 25cm、深さ 40cm の全面透明なアクリル板製である。底面より 8cm の位置に水平に格子を設定し、それを上下に振動させることにより乱れを発生させた。格子は角柱正方格子で棧の幅 d は 1.0cm、格子のメッシュ間隔 M は 5.0cm であった。格子により生起された流速変動の水平成分 u' と鉛直成分 w' は、2 方向 V 型ホットフィルム流速計を一定速度 (8.61cm/s) で水平方向に動かすことによって測定された。また実験の精度を上げるために、小型水槽においてレーザー流速計を使って u' と w' の同時測定を行った。ホットフィルム流速計を用いた実験装置の概略を図-1 に示すが、小型水槽を用いた実験装置については参考文献 4) を参照されたい。表-1 に、今回行った実験に関する水理条件 (格子の振動数 f_0 Hz、振動幅 S_0 cm、流体の動粘性係数 ν cm²/s) を Re 数 ($= f_0 S_0^2 / \nu$) の小さい順に示している。レーザー流速計を用いた実験は Run No. 14 と 18 である。作業流体の動粘性係数は、グリ

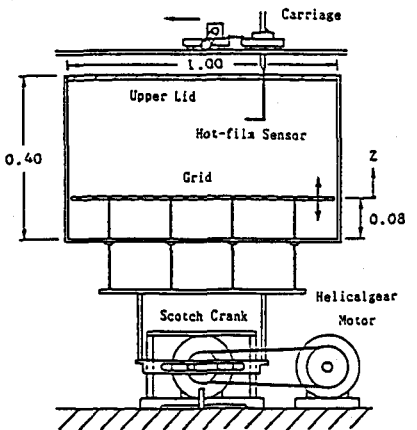


図-1 実験装置の模式図

セリン水溶液を用いることにより変えられた。

ホットフィルム流速計を用いた測定では、同一水平面で5回ずつ測定し、流速変動の統計量はそれら5回の平均で評価された。1回の測定で得られた出力信号は時間間隔 $\Delta t = 8/5000$ 秒、サンプリング個数4096でAD変換された。レーザー流速計による測定では、 $\Delta t = 8/300$ 秒で8192個のデータがサンプリングされた。

水平方向の乱れ諸量は水平面内において一様で方向性を持たないことを考慮して、乱れエネルギー k および鉛直方向の乱れエネルギー・フラックスをそれぞれ次式から算定した。

$$\text{turbulent energy } k = \frac{1}{2} (2 \overline{u'^2} + \overline{w'^2})$$

$$\text{turbulent energy flux} = \frac{1}{2} \{ (2 \overline{u'^2} + \overline{w'^2}) \overline{w'} \}$$

4. 計算結果と実験結果との比較

図-2, 3は、 $z=0$ で与えられた乱れ ($k=1.0$, $\varepsilon=1.0$) によって、乱れエネルギーと散逸率が時間の経過とともにどの様に拡散し、定常状態に達するかを示した解析結果である。図中の太い実線は定常状態における解である。無次元時間 $t=10$ で、 $z < 1.0$ において乱れはほぼ定常状態に達することがわかる。定常状態に達した乱れエネルギーの分布から、 $z=1.0$ での乱れエネルギーは $z=0$ で加えた乱れエネルギーの約1/10に減少し、 $z > 1.0$ ではエネルギーはさらに急激に減少することがわかる。一方、散逸率 ε は乱れエネルギーよりも急激に減少する。McDougall⁵⁾ や Mory & Hopfinger⁶⁾ らは振動格子乱流の乱れ強度 $\sqrt{\overline{u'^2}}$ は z^{-1} に比例して減少することを実験に基づいて指摘しているが、その傾向は図-2の $1.0 \leq z \leq 2.0$ の範囲において認められる。十分大きい z において、乱れエネルギーと散逸率は z のべき乗に比例して減少する傾向が見られるが、その指数は(1)式において k と ε に対して z のべき乗解を仮定して得られる指数-4.97 と-8.46 にほぼ一致する。

図-4は、積分スケール $l (= k^{3/2} / \varepsilon)$ の鉛直分布を示したものである。解析結果によると l は z に比例することがわかる。この関係は、Long⁷⁾ や浦ら³⁾ が振動格子乱流の実験に基づいて提案した結果と定性的に一致している。

図-5は、渦動粘性係数 ν_t の鉛直分布を示したものである。Long⁷⁾ は、実験から ν_t が一定値を取ることを指摘したが、解析結果によるとこの関係は $z=0$ のごく近傍でしか認められない。一方、浦ら³⁾ は乱れ強度は $z^{-5/4}$ に比例して減少し、積分スケールは z に比例して増大することを実験により明らかにした。彼らの結果は、 $\nu_t \propto z^{-1/4}$ が成り立つことを示唆しており、この関係は図-5より $z < 1.0$ において認められる。解析結果より、 $z > 1.0$ において ν_t は z^{-1} に比例して減少する傾向がある。

表-1 実験条件

Run No	F0	S0	ν	S0/M	Re
1	2.0	4.0	0.1580	0.8	201
2	2.0	4.0	0.1040	0.8	308
3	4.0	4.0	0.1510	0.8	424
4	6.0	4.0	0.1650	0.8	582
5	2.0	4.0	0.0728	0.8	440
6	4.0	4.0	0.1010	0.8	634
7	2.0	8.0	0.1720	1.6	744
8	6.0	4.0	0.1050	0.8	914
9	4.0	4.0	0.0687	0.8	918
10	2.0	8.0	0.1010	1.6	1270
11	6.0	4.0	0.0682	0.8	1410
12	2.0	8.0	0.0752	1.6	1700
13	2.0	4.0	0.0124	0.8	2580
14	2.0	4.0	0.0100	0.8	3200
15	2.0	4.0	0.0100	0.8	3200
16	3.0	4.0	0.0118	0.8	4070
17	4.0	4.0	0.0100	0.8	6400
18	4.0	4.0	0.0100	0.8	6400
19	5.0	4.0	0.0120	0.8	6670
20	6.0	4.0	0.0118	0.8	8140
21	6.0	4.0	0.0100	0.8	9600
22	2.0	8.0	0.0121	1.6	10600
23	2.0	8.0	0.0100	1.6	12800

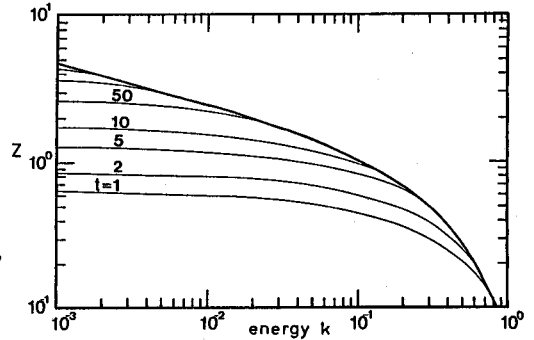


図-2 乱れエネルギーの時間的発達

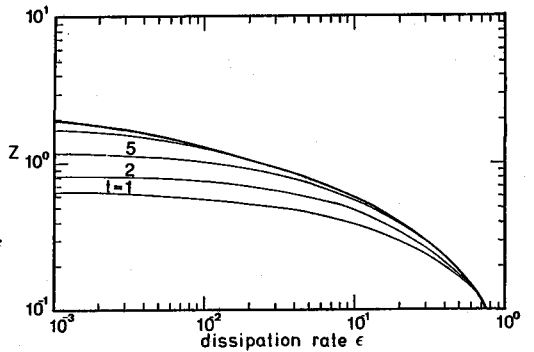


図-3 散逸率の時間的発達

図-6, 7は, 振動格子実験において得られた乱れエネルギーと乱れエネルギー・フラックスを無次元化してプロットし, それらを解析結果と比較したものである。測定結果を無次元化するために必要な k_0 と ε_0 の値は乱れエネルギーと乱れエネルギー・フラックスの測定結果を解析結果に適合させることによって算定された。図-6より, 広範囲の Re 数に対して乱れエネルギーの計算結果は実験結果の分布形とよく一致していることがわかる。乱れエネルギー・フラックスについてもまた, 乱れエネルギー程ではないがかなりの一致が認められる。このように, これまで行ってきた計算結果と実験結果との比較から振動格子乱流の定性的特性は, $k-\varepsilon$ 乱流モデルでかなりよく説明できることが明らかとなった。

振動格子乱流の乱れの諸量を定量的に予測するためには, 解析において $z=0$ で与えられた k_0 と ε_0 の値を水理条件と関係づける必要がある。 k_0 と ε_0 は f_0 , S_0 , ν , d , M で規定されるものとするれば, 次元解析より

$$\frac{k_0}{f_0^2 S_0^2} = f \left(\frac{f_0 S_0^2}{\nu}, \frac{S_0}{M}, \frac{d}{M} \right)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{f_0^3 S_0^2} = g \left(\frac{f_0 S_0^2}{\nu}, \frac{S_0}{M}, \frac{d}{M} \right)$$

の関係が成り立つ。さらに, 今回の実験がすべて $d/M=0.2$ において行われたことを考慮すれば, $k_0/(f_0^2 S_0^2)$ および $\varepsilon_0/(f_0^3 S_0^2)$ は無次元量 Re 数 ($=f_0 S_0^2/\nu$) と S_0/M のみに依存することになる。図-8, 9は, それぞれ $k_0/(f_0^2 S_0^2)$ と $\varepsilon_0/(f_0^3 S_0^2)$ を S_0/M をパラメータとして Re 数に対してプロットしたものである。これらの図より, 無次元エネルギーと散逸率はどちらも S_0/M に独立であるように思われる。 $k_0/(f_0^2 S_0^2)$ は $Re \lesssim 5 \times 10^3$ において Re 数の $1/2$ 乗に比例して増加し, 十分大きい Re 数のところで一定値 0.54 をとる。一方, $\varepsilon_0/(f_0^3 S_0^2)$ は $Re \lesssim 5 \times 10^3$ において Re 数の 1 乗に比例するが, 十分大きい Re 数において, $k_0/(f_0^2 S_0^2)$ と同様, 一定値 0.41 をとる。従って, $Re \gtrsim 5 \times 10^3$ において k_0 と ε_0 は振動条件 f_0 と S_0 のみに依存し, 流体の粘性に対して独立となる。このことは, 図-1~4で示された解析結果をも考え合わせれば, 振動格子乱流の乱れの諸量は f_0 , S_0 のみで記述できることを意味する。

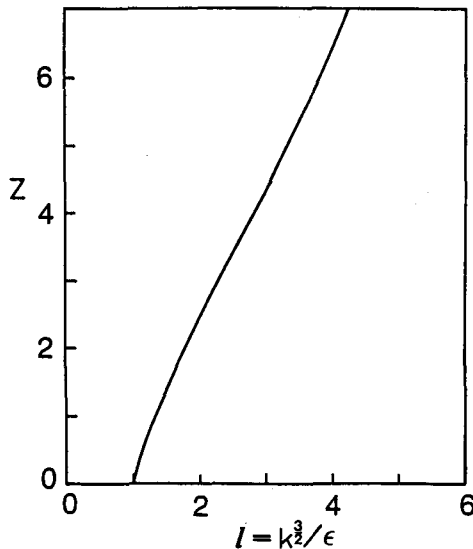


図-4 定常状態における積分長さスケールの分布

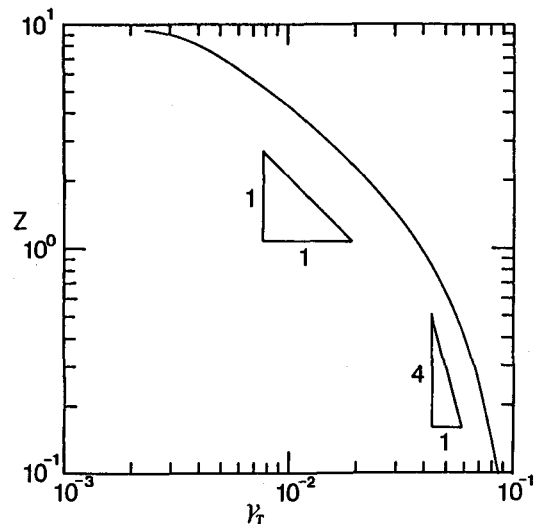


図-5 定常状態における動粘性係数の分布

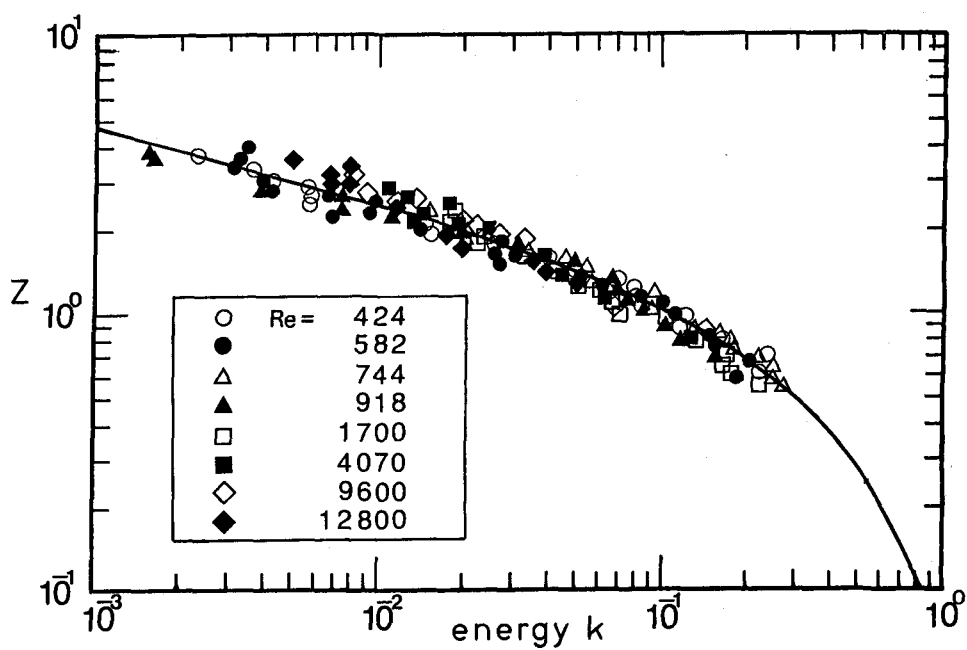


図-6 振動格子乱流の乱れエネルギーの
測定結果と計算結果との比較

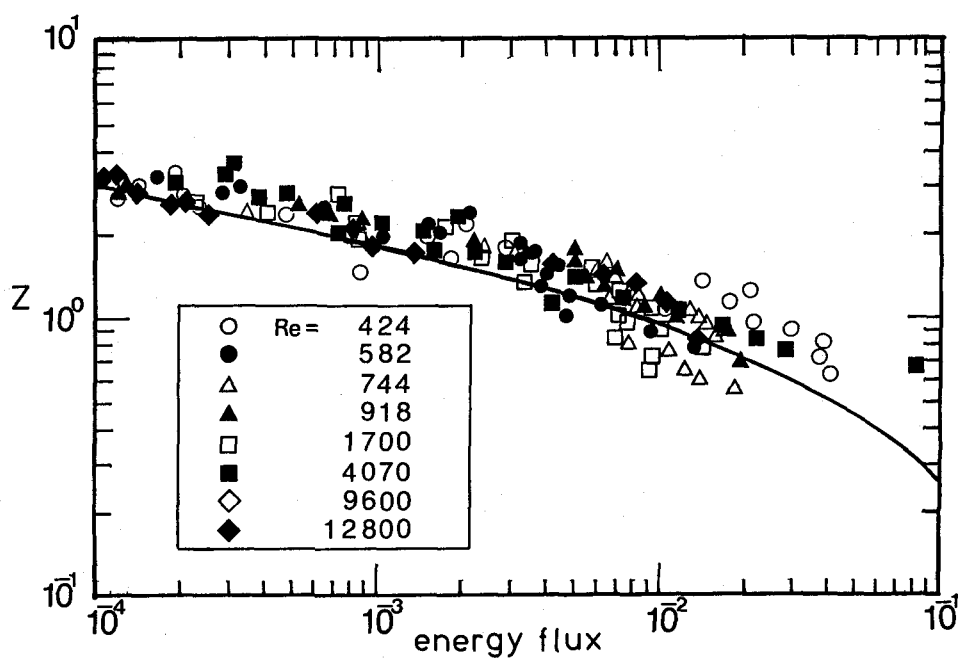


図-7 振動格子乱流の乱れエネルギー・フラックスの
測定結果と計算結果との比較

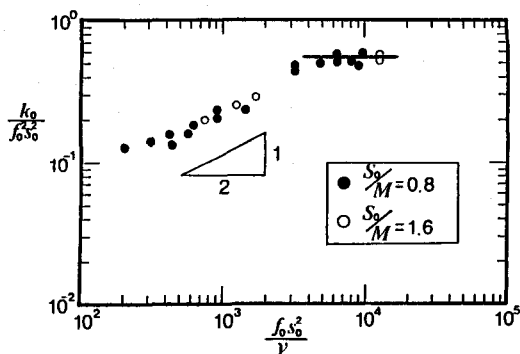


図-8 k_g の定量的評価

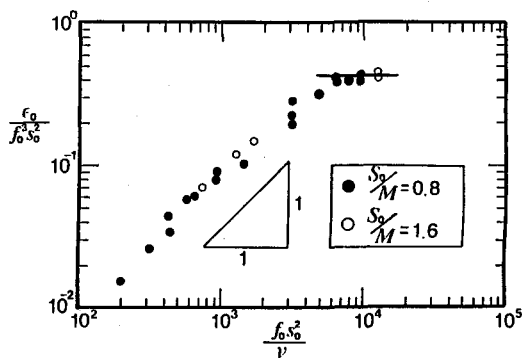


図-9 ϵ_g の定量的評価

5. むすび

乱れエネルギーの拡散と散逸がつり合った乱流場を $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いて解析し、振動格子乱流の測定結果との比較検討を行った。振動格子乱流による乱れエネルギーや乱れエネルギー・フラックスの分布は、解析結果とよく一致し、任意の条件で作られた振動格子乱流に関するこれらの特性量を予測することが可能となった。今後は、流速変動の波数スペクトルから散逸率の分布を求めることにより、解析によって求めた渦動粘性係数や積分長さスケールに関する検討を行う予定である。

最後に、本研究を行うにあたり有益な助言をくださった九州共立大学工学部栗谷陽一教授（九州大学名誉教授）に、また実験において多大な助力をお願いした九州大学工学部柴田敏彦氏、電力中央研究所仲敷憲和氏に感謝致します。

参考文献

- 1) Turner, J.S.: The influence of molecular diffusivity on turbulent entrainment across a density interface, J. Fluid Mech., Vol.33, pp.639~656, 1968.
- 2) Hopfinger, E.J. and Toly, J.A.: Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interface, J. Fluid Mech., Vol.78, pp.155~175, 1976.
- 3) 浦 勝・小松利光・松永信博：振動格子の乱れによる密度界面の変動特性と連行現象，土木学会論文集，第345号／II-1，pp.91~99，1984.
- 4) 小松利光・山口正久・朝位孝二・榊利博：固液混相流の乱れ特性に関する研究，第33回水理講演会論文集，pp.601~606，1989.
- 5) McDougall, T.J.: Measurements of turbulence in a zero-mean-shear mixed layer, J. Fluid Mech., Vol.94, pp.409~432, 1979.
- 6) Mory, M. and Hopfinger, E.J.: Rotating turbulence evolving freely from an initial quasi 2D state. Macroscopic Modelling of Turbulent Flows, Lecture Notes in Physics, Vol 230, 1985.
- 7) Long, R.R.: Theory of turbulence in a homogeneous fluid induced by an oscillating grid, Phys. Fluids, Vol.21, pp.1887~1888, 1987.