

二次元境界層流の拡散係数に関する研究

Study on the eddy viscosity of the two-dimensional boundary layer flow

早稲田大学大学院 学生員 市村知也 Tomoya ICHIMURA

早稲田大学理工学部 学生員 溝上 健 Ken MIZOUE

早稲田大学理工学部 正会員 吉川秀夫 Hideo KIKKAWA

The availability of the ω - ψ method to simulate the flow field in an open channel with gradually varied bed slope was studied¹⁾. But the eddy viscosity, included in the simulation and very important factor in hydraulics, could not be well-considered at that stage, since, for such flow, the boundary condition was dominant rather than the eddy viscosity. In this paper, the fundamental feature of that factor is studied through the simulation of the two-dimensional boundary layer flow on the flat plate in an open channel. For the turbulent boundary layer flow, the relation between eddy viscosity as a mean value of the flow field and mesh size or Reynolds number is made clear. On the other hand, for the laminar flow, the apparent relation among such factors is not found.

Key words ; the ω - ψ method, boundary layer flow, eddy viscosity

1. はじめに

流体の運動を数値的に解析する手段については種々の方法が提案されており、多くの分野で有用な解を与えているが、適用限界等における制約がある場合や、大型コンピュータを必要とするため容易に行えないというような場合がある。例えば、乱流モデルを構築するものでは代表的なものに k - ϵ モデルがあり、広く用いられているが、計算に用いる既知量に十分検討されていないものが含まれたり、また計算そのものが複雑であることから、水面や変化のある境界形状をもつ場合などではそれらの影響を容易にとりこむことができず困難な方法となってしまうことがある。それらの点を考慮し、著者らは以前より単純な方程式系で構成され、かつ明確な境界条件から計算することのできる ω - ψ 法(二次元)による解析法を採用してきた。特に二つの異なった水路床勾配が滑らかに接続されている開水路流れに適用し、このような境界形状の場合でも計算可能であることを示した¹⁾。しかしこれまで同計算に関しては底面境界条件に重点をおいて検討を重ねており、数値シミュレーション及び一般に流体運動を考える上で重要なファクターとなる拡散係数については未知の部分が多いため、本研究ではその点についての考察を試みる。特に拡散係数はもともと勾配型の概念によって導入されたものであることから、長さスケールと何等かの相関を持つと考えられることに着目して研究を進めた。したがって、本研究では拡散係数の流れ場に及ぼす影響に関する検討のみを行うため、複雑な境界の影響を排除し、かつ理論的・実験的に解明されている平板上開水路の境界層流れという極めて単純な流れ場のシミュレーションを行った。ここでは乱流境界層流と層流境界層流との二つの場合について計算を行い、それによって長さスケールの代表であるメッシュ幅と流れ場の平均値としての拡散係数、及び乱流の場合にはレイノルズ数との関係について検討を行った。

2. 流れ場の設定

まず本計算が対象とする流れ場の設定を行う。

2.1 平板上乱流境界層流れ

(1) 境界層厚

乱流境界層厚 δ_t の設定には式(1)を用いる²⁾。

$$\delta_t = 0.37x(u_d x / \nu)^{-1/5} \quad (1)$$

ここに x ; 始点から流れ方向にとった距離

u_d ; 境界層外縁流速

ν ; 動粘性係数

(2) 底面せん断力及び粘性底層厚

本計算では底面条件として滑面を想定し、底面せん断力（摩擦速度 u_* ）の計算にはBlasiusの抵抗則から導かれた式(2)を用いる³⁾。

$$u_* = 0.15 u_d^{7/8} (\nu / \delta_t)^{1/8} \quad (2)$$

また粘性底層厚 δ_{vsl} 及び粘性底層上流速 u_{vsl} は次式によって求められる。(vsl; viscous sublayer)

$$\delta_{vsl} = 11.6 \nu / u_* \quad (3)$$

$$u_{vsl} = u_*^2 \delta_{vsl} / \nu \quad (4)$$

(3) 境界層内流速分布及び流量

抵抗則をBlasiusの式によって規定していることから、式(1)で示される境界層内において形成される主流速分布 u はベキ乗則（1/7乗則）に従うと仮定し式(5)を用いる。

$$u = u_d (y / \delta_t)^{1/7} \quad (5)$$

ここに y ; 底面から鉛直上向きにとった距離

また、水深を h で表せば流量 q は式(6)で表すことが出来る。

$$q = (1/2) \delta_{vsl} u_{vsl} + (7/8) u_d \delta_t^{-1/7} (\delta_t^{8/7} - \delta_{vsl}^{8/7}) + u_d (h - \delta_t) \quad (6)$$

(4) 流れ場の設定手順

以上の式(1)～(6)を用いて流れ場を設定する手順を図1に示し、設定された流れ場の主流速分布を図2に示す。

2. 2 平板上層流境界層流れ

(1) 境界層厚

層流境界層厚 δ_t の設定には式(7)を用いる⁴⁾。

$$\delta_t = 5.0 (\nu x / u_d)^{1/2} \quad (7)$$

(2) 境界層内流速分布及び渦度分布

境界層内の流速分布（ x 方向流速 u 及び y 方向流速 v ）は以下に示すL.Howarthの解を用いるが、式中の $f(\eta)$, $f'(\eta)$, $f''(\eta)$ の値は数表で与えられている⁵⁾。

$$u = u_d f'(\eta) \quad (8)$$

$$v = (1/2) (\nu u_d / x)^{1/2} (\eta f'(\eta) - f(\eta))$$

ここに $\eta = y(u_d / \nu x)^{1/2}$

式(8)を x 及び y で微分することにより渦度 ω は次のように与えられる。

$$\omega = -(\nu u_d / x)^{1/2} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) / 4x - y \eta u_d f''(\eta) / 4x^2 - u_d \eta f''(\eta) / y \quad (9)$$

(3) 設定手順

式(7)～(9)を用いて、乱流の場合と同様に流量

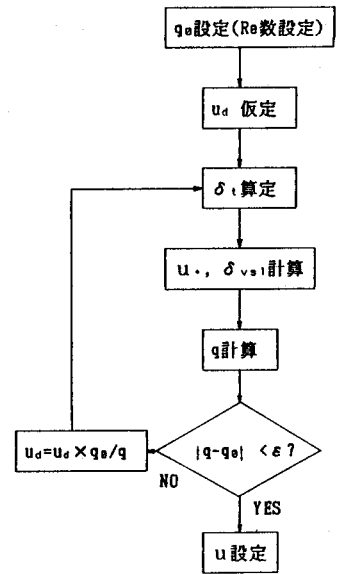


図1 流れ場の設定手順
(乱流境界層流れ)

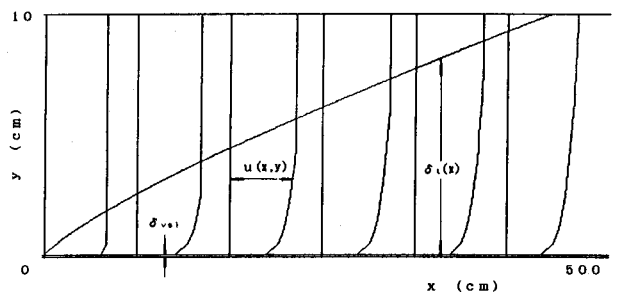


図2 乱流境界層流れ（主流速分布）

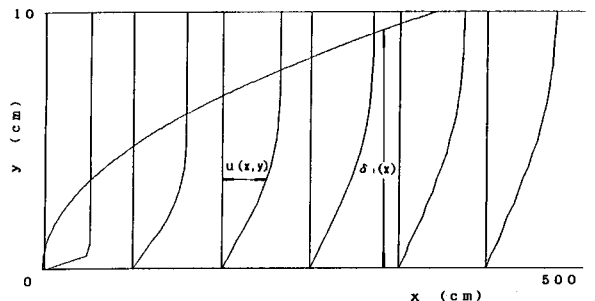


図3 層流境界層流れ（主流速分布）

に関する収束計算を行い、その結果設定された流れ場の主流速分布の様子を図3に示す。

3. 数値計算

3.1 基礎方程式

本計算では式(10)に示す二次元移送方程式、及び式(11)に示すポアソン方程式によって構成される ω - ψ 系を用いる。

$$\partial \omega / \partial t + u(\partial \omega / \partial x) + v(\partial \omega / \partial y) = \varepsilon (\partial^2 \omega / \partial x^2 + \partial^2 \omega / \partial y^2) \quad (10)$$

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = -\omega \quad (11)$$

ここに $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$

3.2 計算方法及び評価方法

計算に当たっては式(10)はFTCS法を用いて差分化し、式(11)はSOR法によって収束計算を行い、定常状態に達するまで繰り返し計算を行なった⁹⁾。その際、次節で述べる境界条件の値を既知量として与え、式(10)～(11)に適当な拡散係数を与えることにより数値シミュレーションを行なっているが、同様の条件に対していくつかの拡散係数について計算することにより、設定した流れ場を最もよく再現することができる拡散係数を求めた。従って本計算では拡散係数の値のみが未知量であるようなモデルとなっており、この方法については、後に若干考察する。

計算結果と設定した流れ場との一致に対する評価は、主流速分布・渦度分布における目視による判断のほか、各断面の循環の値を用いて定量的に評価する方法を用いた。

3.3 境界条件

上流端底面は特異点であり、また、上流端近傍では最下メッシュが境界層外に出てしまうという不都合を排除するため、上流端から若干下流に進んだ断面から計算を開始し、この断面においては設定流れ場の値を境界条件として与えた。下流端においては特に条件は設けておらず、また水面においては渦度ゼロとおいた。底面境界条件に関しては、乱流の場合には粘性底層上で与える場合(式(12))と直接底面上で与える場合(式(13))との2種類について行なったが、 ω - ψ 法においては乱流構造に立ち入った計算ではないため、特別に粘性底層内を区別して計算を行なう必要はなく、どちらの場合でも計算可能である。

$$\psi(y = \delta_{vs1}) = u_{\infty}^2 \delta_{vs1}^2 / 2\nu \quad (12)$$

$$\omega(y = \delta_{vs1}) = \omega_0(y = \delta_{vs1})$$

$$\psi(y=0) = 0 \quad (13)$$

$$\omega(y=0) = \omega_0(y=0)/K$$

ここに ω_0 ; 設定流れ場から求められる値

また、式(13)中のKは底面近傍の渦度分布の強い非線形性を考慮した補正係数であり、本計算ではK=4とおいた。一方層流の場合の底面境界条件は、乱流の場合の式(13)と同様に与えることができるが、図3を見てわかるように、層流の場合には底面近傍においてはほとんど線形の流速分布であり、従ってこの付近の渦度分布はほぼ一定値となることから、この場合はK=1として与えた。

4. 計算結果と考察

4.1 乱流境界層流

図4に計算結果例として $Re=4 \times 10^4$ の場合の渦度分布を示す。また図5には同計算における循環の計算回数による変化の様子を示す。図4における渦度分布では仮定値と計算値に若干のずれがみられるが、図5の循環の計算値は計算回数250回でほぼ仮定値と一致していることから、両者を合わせて評価することにより、この状態で設定流れ場を再現できたと判断する。表1に本計算で行なったシミュレーション結果をまとめて示す。ここで適合拡散係数とは流れ場を再現することができた拡散係数の値である。 $Re=1 \times 10^4$ における計算結

果からわかるように流入流速 u_{int} 、y方向メッシュ幅 Δy 、適合拡散係数 ε を用いたレイノルズ数 Re_y は、流れのレイノルズ数 Re に対してほぼ一定値をとっている。従って本シミュレーションにおける拡散係数はメッシュ幅 Δy との関係によって決定されていると考えられる。一方流れのレイノルズ数 Re とメッシュ幅を用いたレイノルズ数 Re_y との関係は図6に示すようにほぼ線形関係になっていることがわかる。また、本実験の範囲では、拡散係数はほぼ流速の対数に比例するような関係になっている。

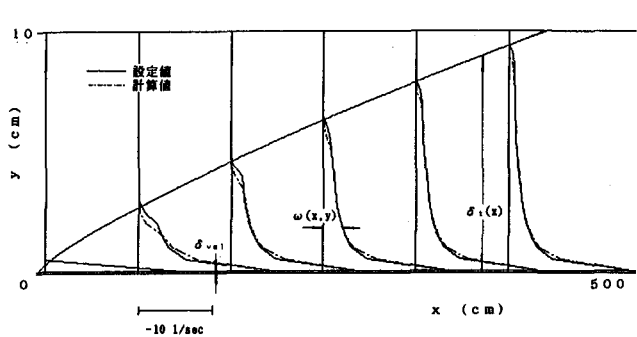


図4 乱流境界層流れ計算結果例（渦度分布）

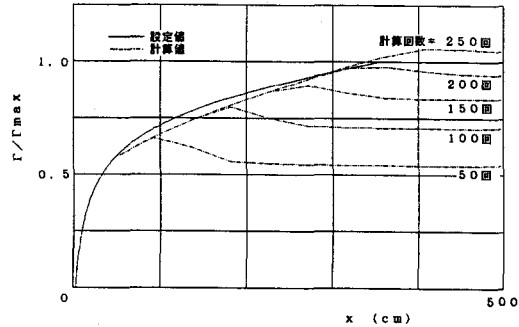


図5 乱流境界層流れ計算結果例（循環）

表1 乱流境界層流れ計算結果（適合拡散係数）

Re	Δx (cm)	Δy (cm)	適合拡散係数 ε (cm ² /sec)	Re_y
1×10^4	2	2	0.20	100
	1	1	0.09	111
	1	0.5	0.045	111
	0.5	0.5	0.045	111
2.5×10^4	1	0.5	0.065	192
4×10^4	1	0.5	0.07	286

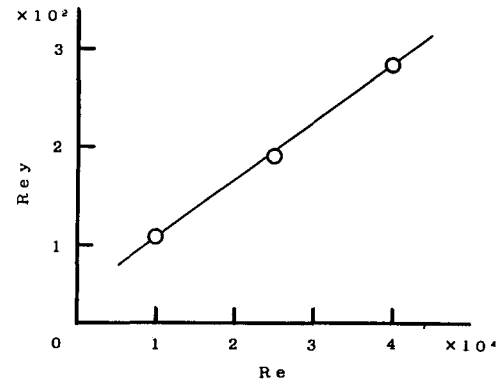


図6 Re-Rey関係図

4.2 層流境界層流れ

図7に計算結果（渦度分布）を示す。この図から、適当な拡散係数を選ぶことにより、数値計算によって良好に流れ場を再現できることがわかる。本計算は $\Delta x=1\text{cm}$ に固定し、 Δy を0.5、1、2cmの3通りに変化させた場合について行なったが、いずれの場合も適合拡散係数としては動粘性係数の6～7倍前後の値が必要であった。しかし層流の場合、理論的には動粘性係数を与えることにより流れ場

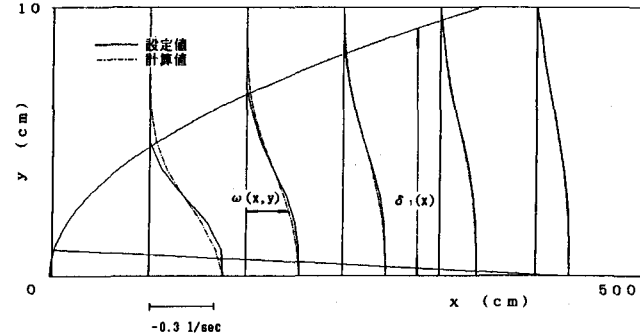


図7 層流境界層流れ計算結果例（渦度分布）

を再現できるはずであり、本研究においても計算モデルの精度を確かめる意味を含めて層流のシミュレーションを行なったのであるが、結果は理論と食い違いを示すものとなってしまったことになる。この原因として3つの要因が考えられる。1つは拡散項の精度の問題である。図7の渦度分布を見てわかるように、底面近傍において渦度はほぼ一定値となっているため、この付近では渦度の二次微分が極めてゼロに近い値になっており、従ってこれらの値に拡散係数を乗じて与えられる拡散項の精度が影響を及ぼしていると考えられるのである。第二に考えられるのは計算開始位置の影響である。先に述べたように、本計算では上流端近傍の不都合を排除するため若干下流側に進んだ断面から計算を開始しているが（ここでは $x=40\text{cm}$ から計算開始）、図8に示すように、底面渦度は上流端付近で急激に変化しており、計算開始点の位置によって上流側底面から移流される渦度の量が大きく異なってしまうことになる。実際、計算開始点の位置を $x=20\text{cm}$ とすると適合拡散係数の値は $0.02\text{cm}^2/\text{sec}$ となったこと

とから、上流端付近の影響を十分取り込むことができれば理論値に近づくと考えられる。第三に、底面渦度は式(9)で算出されることからメッシュ幅に関わらず同じ分布となるが、流速分布から求められる底面せん断力 $(=\mu(\Delta u/\Delta y))$ は、特に境界層の薄い上流部において、メッシュ幅によって異なった値をとることから（図9参照）、この点の矛盾も関与していると考えられる。

5. おわりに

本研究で得られた結論を以下に示す。

I. 乱流境界層流れは、流れ場に一律な拡散係数を与えることによってほぼ再現することができ、その値は流入流速、メッシュ幅、拡散係数を用いたレイノルズ数 Re_y を用いて整理できることから、拡散係数はメッシュ幅との関係で決定されることを示した。

II. 層流境界層流れについては、メッシュ幅に関係なく一定の拡散係数を与えることによって流れ場を再現することができたが、その値は理論値である動粘性係数とは必ずしも一致しなかった。

最後に、問題点及び今後の課題としては以下の点を挙げることができる。

第一に、本研究では、流れ場全体の平均値として与える拡散係数の基本的な性質の検討のみにとどまっており、拡散係数の流れ場内における分布や、その分布とメッシュ幅との関係等は明らかになっておらず、また一般の流れにおいては Re_y の値を事前に決定することは容易ではないため、他の流れ場に適用するためには更に検討していく必要がある。

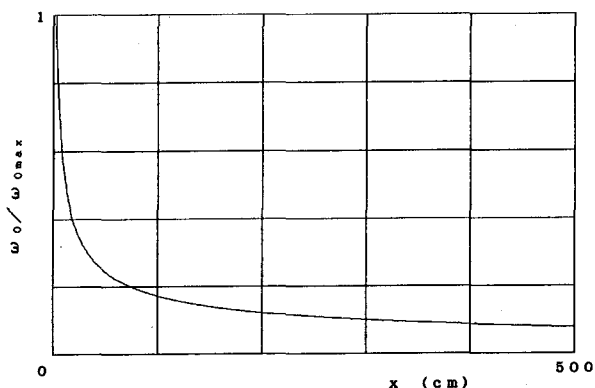


図8 無次元底面渦度分布（層流境界層流れ）

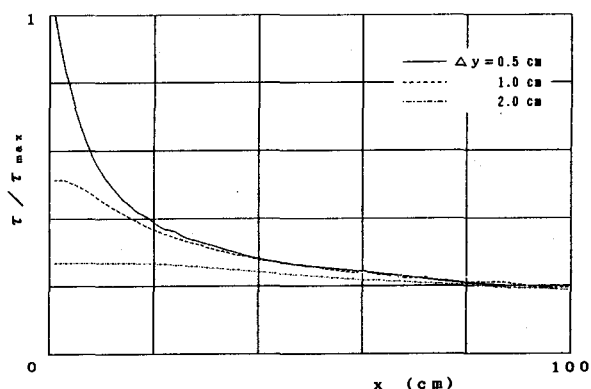


図9 無次元底面せん断力分布（層流境界層流れ）

第二に、本研究においては先に述べたように境界条件を既知量として与えて計算を行なっているため、拡散係数のみを未知量とするモデルとなっているが、実際にはあらかじめ境界条件を見積っておくことは困難な場合が多く、移送方程式によって計算を進める度に、運動量のつりあい等から底面せん断力を求め、境界条件を設定し直すような作業が必要となり、この点に関しても検討の余地が残されている。

第三には、層流における拡散係数の理論値との不一致の問題が挙げられる。この点については上流から移流される渦度の影響が明らかになったが、理論的には、層流はそれらに関係なく動粘性係数を与えることによって再現できるはずである。また、これは乱流についても共通することであるが、拡散係数は拡散項と移流項とのバランスを保つファクターとみることができ、この移流項との関係という観点からも更に検討することができると考えられ、この点も課題として残されている。

参考文献

- 1) 古川・市村・岡本・吉川、貯水池流入部における流れの二次元特性について、第32回水理講演会論文集、pp281~286、1987
- 2) Schlichting, H、Boundary layer theory、1978
- 3) 4) 2) に同じ
- 5) L.Howarth、On the solution of the laminar boundary layer equations、Proc.Roy.Soc.London A 164、pp.547~579、1938
- 6) Patrick J.Roache、Computational fluid dynamics、1976