

## 二次流を伴う開水路流れの物質輸送について

Effects of Secondary Currents on Transport of Suspended Materials

九州大学工学部 正員 大本 照憲 Terunori OHMOTO

九州大学工学部 正員 平野 宗夫 Muneo HIRANO

九州大学大学院 学生員 天野 光歩 Mitsuho AMANO

In this paper, the velocity distribution of secondary currents and their effects on suspended sediments concentration are discussed. The analysis of secondary currents was developed on the basis of streamwise mean vortex equation by using non-slip condition as boundary condition. The theoretical curves show a fairly good agreement with experimental results. The spanwise variation of suspended sediments concentration in a open channel flow with stable secondary currents was clarified to maintain the similar form from experimental data and the information made the theoretical analysis easy. The theory predicted the spanwise undulation in suspended sediment concentration and its vertical distribution in both upflow and downflow regions.

Keyword: secondary currents, suspended sediments, turbulence

### 1. はじめに

洪水流の航空写真測量から、木下<sup>1)</sup>は自由水面上にゴミやアワが横断方向に規則的な縦じまを形成しながら流送されることを見だし、これが水深スケールの大きさを持つ縦渦に起因する現象であることを実験水路で確認した。また、Vanoni<sup>2)</sup>は、室内実験より浮遊砂がカルマン定数、抵抗則に影響を及ぼすと同時に、二次流との相互作用から、浮遊砂濃度が横断方向に不均一となり、河床近傍では極大値と極小値との比は4倍近くまで達することを指摘している。従来、沈降性浮遊粒子の濃度分布については主として鉛直方向の分布が論じられる場合が多く、二次流の影響を考慮した横断方向の濃度分布に関する研究は比較的少ない。縦渦が十分に発達した開水路流れにおいては、縦渦の上昇流部および下降流部で流線の集中する箇所が現れ、浮上性の物質は縦渦の下降流部で高濃度となり、沈降性の浮遊物質は縦渦の上昇流部で高濃度となることから、これまでの研究により定性的に明かにされてきた<sup>3,4,5,6)</sup>。しかしながら、定量的には沈降性粒子の濃度分布に与える二次流の影響については不明な点が多い。

前報<sup>7)</sup>において著者らは、二次流の駆動力が幅方向と鉛直方向の流速変動からなるレイノルズ応力であり、乱れの強さの差は抑制効果を持ち、両者がバランスして定常な二次流が形成されることを指摘した。本研究では、上記の知見を基に池田<sup>8)</sup>によって誘導された二次流の基礎式に、河床の境界条件として粘着条件を適用した解を得た。次に、二次流による影響が考慮された浮遊砂濃度分布式が誘導され、理論値と実験値との比較検討がなされた。

### 2. 二次流

#### (1) 理論解析

主流方向にx軸、横断方向にy軸、河床より鉛直上方にz軸を取れば、主流方向に一様な流れ場におけるy軸方向およびz軸方向のレイノルズ運動量方程式は、

$$V \partial V / \partial y + W \partial V / \partial z = -\partial (\Omega + P / \rho) / \partial y + \partial (\overline{-v'^2}) / \partial y + \partial (\overline{-v'w'}) / \partial z + \nu (\partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2) V \dots (1)$$

$$V \partial W / \partial y + W \partial W / \partial z = -\partial(\Omega + P / \rho) / \partial z + \partial(\overline{-v'w'}) / \partial z + \partial(\overline{-w'^2}) / \partial z + \nu(\partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2)W \dots (2)$$

となる。ここに、 $V$ および $W$ はそれぞれ横断方向および鉛直方向の二次流成分、 $\Omega$ は外力ポテンシャル、 $P$ は平均圧力、 $\rho$ は流体密度、 $\nu$ は動粘性係数である。二次流の発達した流れはレイノルズ数が大きい<sup>4)</sup>ことから粘性項の影響を省略でき、式(1)と(2)から縦渦 $\xi$ の基礎式は次式ようになる。

$$V \partial \xi / \partial y + W \partial \xi / \partial z = (\partial^2 / \partial y^2 - \partial^2 / \partial z^2)(\overline{-v'w'}) + \partial^2(\overline{v'^2 - w'^2}) / \partial y \partial z \dots (3)$$

ここに、 $\xi = \partial W / \partial y - \partial V / \partial z$ 。二次流の駆動力である右辺の第一項と二次流の抑制項である右辺第二項がバランスして安定した二次流が形成されること、および中川・欄津の実測<sup>5)</sup>によれば式(3)の左辺の非線形項は右辺の項に比べて微小であることを参照すれば、二次流の基礎式として、次式が

$$(\partial^2 / \partial y^2 - \partial^2 / \partial z^2)(\overline{-v'w'}) = -\partial^2(\overline{v'^2 - w'^2}) / \partial y \partial z \dots (4)$$

適用可能である。レイノルズ応力 $(-\rho \overline{v'w'})$ に対してBoussinesqの渦動粘性係数を導入すれば、

$$\overline{-v'w'} = \epsilon_{yz}(\partial W / \partial y + \partial V / \partial z) \dots (5)$$

となる。さらに、流れ関数 $\Psi$ を導入すれば、式(5)は、

$$\overline{-v'w'} = -\epsilon_{yz}(\partial^2 / \partial y^2 - \partial^2 / \partial z^2)\Psi \dots (6)$$

となる。式(6)を式(4)に代入し、平均摩擦速度 $U_{*}$ および水深 $H$ で無次元化すれば、

$$(\partial^2 / \partial \eta^2 - \partial^2 / \partial \zeta^2)^2 \overline{\Psi} = (U_{*} H / \epsilon_{yz}) \cdot \partial^2 \{(\overline{v'^2} / U_{*}^2) - (\overline{w'^2} / U_{*}^2)\} / \partial \eta \partial \zeta \dots (7)$$

となり、池田の式<sup>6)</sup>が得られる。ここに、 $\overline{\Psi} = \Psi / (U_{*} H)$ 、 $\eta = y / H$ 、 $\zeta = z / H$ 。縦渦の正の領域では、式(7)の右辺が負となることを考慮し、第一近似として $(\overline{v'^2 - w'^2})$ にたいして次式

$$(\overline{v'^2 - w'^2}) = \alpha(1 - \delta \cos k \eta)(1 - \zeta)U_{*}^2 \dots (8)$$

を仮定する。ここに、 $\delta$ は $(\overline{v'^2 - w'^2})$ の横断方向の振幅と平均値の比を示す。上式を式(7)に代入すれば、

$$(\partial^2 / \partial \eta^2 - \partial^2 / \partial \zeta^2)^2 \overline{\Psi} = -\alpha k \delta / (\epsilon_{yz} / U_{*} H) \cdot \sin k \eta \dots (9)$$

流れ関数 $\overline{\Psi}$ に変数分離形を仮定して

$$\overline{\Psi}(\eta, \zeta) = -\phi(\zeta) \cdot \sin k \eta \dots (10)$$

と置き式(9)に代入すれば、 $\phi(\zeta)$ を規定する微分方程式は

$$(d^4 / d\zeta^4 + 2k^2 d^2 / d\zeta^2 + k^4) \cdot \phi(\zeta) = \alpha k \delta / (\epsilon_{yz} / U_{*} H) \dots (11)$$

上式の一般解は

$$\phi(\zeta) = C_1 \cos k \zeta + C_2 \sin k \zeta + C_3 \zeta \cos k \zeta + C_4 \zeta \sin k \zeta + \alpha \delta / \{k^3 (\epsilon_{yz} / U_{*} H)\} \dots (12)$$

境界条件として林・山田<sup>10)</sup>はレイノルズ応力 $(-\rho \overline{v'w'})$ が河床と自由水面でゼロおよび縦渦の境界をよぎる流れはないことから

$$\Psi(\eta, 0) = 0, \quad \partial^2 \Psi(\eta, 0) / \partial \zeta^2 = 0$$

を採用した。一方、池田<sup>6)</sup>は河床および自由水面で

$$\Psi(\eta, 0) = 0, \quad \Psi(\eta, H) = 0$$

を用いた。両者はいずれも流体と境界との相対速度を許している。境界条件として粘着条件を用いれば、河床では

$$V(\eta, 0) = W(\eta, 0) = 0 \quad \dots(13)$$

となる。また、自由水面および縦渦の上昇流部では

$$-\rho v' w' = 0, \quad W(\eta, H) = 0, \quad V(\pm 1, \zeta) = 0, \quad \dots(14)$$

となる。未定係数 $C_1 \sim C_4, k$ にたいして境界条件式(13)および(14)を適用すれば

$$C_1 = -\delta / \{k^2 (\varepsilon_{yz} / U_{\text{X}} H)\}, C_2 = -2C_1 / \pi, C_3 = 2C_1, C_4 = \pi C_1 / 2, k = m\pi \quad \dots(15)$$

ここに、 $m$ は整数である。二次流は水深スケールの渦であるから、 $m=1$ を与えれば、 $V, W$ および $\xi$ は次のようになる。

$$V/U_{\text{X}} = \pi C_1 (3/2 \cdot \sin \pi \zeta - 2\zeta \sin \pi \zeta + \pi/2 \cdot \zeta \cos \pi \zeta) \sin \pi \eta \quad \dots(16)$$

$$W/U_{\text{X}} = \pi C_1 (\cos \pi \zeta + 2/\pi \sin \pi \zeta - 2\zeta \cos \pi \zeta - 2/\pi \cdot \zeta \sin \pi \zeta - 1) \cos \pi \eta \quad \dots(17)$$

$$\xi / (U_{\text{X}} / H) = \pi^2 C_1 (-3 \cos \pi \zeta + 4\zeta \cos \pi \zeta + \pi \zeta \sin \pi \zeta + 1) \sin \pi \eta \quad \dots(18)$$

### (2) 理論値と実験値との比較

図-1および2は、それぞれ式(16)および(17)より二次流 $V, W$ の振幅の鉛直分布を計算し、実測値と比較したものである。計算においては、 $\varepsilon_{yz} = \pi u_{\text{X}} H m / 6, \delta = 0.2$ を用いた。二次流の横断成分 $V$ の振幅は、その最大値が理論では自由水面で生ずるのに対して実測値では河床近傍で生じる。また、符号の変化点は理論では相対水深が0.6の位置であり、黒木・岸の測定<sup>11)</sup>値とは傾向が類似しているが、著者等の測定値では半水深に当り、理論の方が若干自由水面側に近いことが知れる。二次流の鉛直成分 $W$ の振幅は、実測値に比べて理論値はわずかに小さい値を取るが、全体的傾向は良好に再現されている。

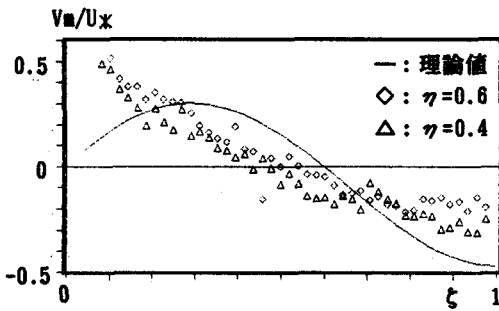


図-1 二次流  $V$  の振幅の鉛直分布

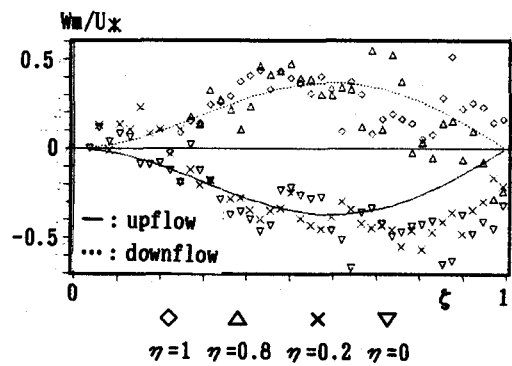


図-2 二次流  $W$  の振幅の鉛直分布

### 3. 二次流の浮流砂濃度分布への影響

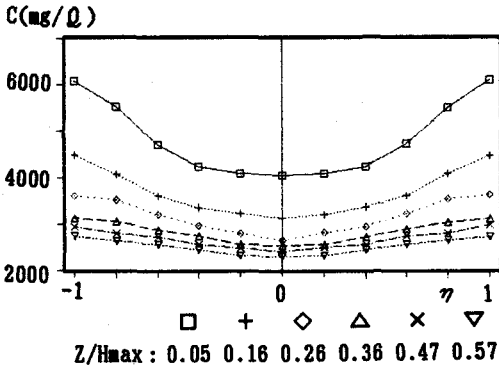
#### (1) 実測データ

図-3は、表-1の実験条件における浮流砂濃度の横断分布を示す。なお、濃度場は流下方向にほぼ平衡状態に達した領域にあることが確認された。二次流が発達した場合、いずれの河床条件においても浮流砂濃度は、横断方向に波状分布を呈し、極大値と極小

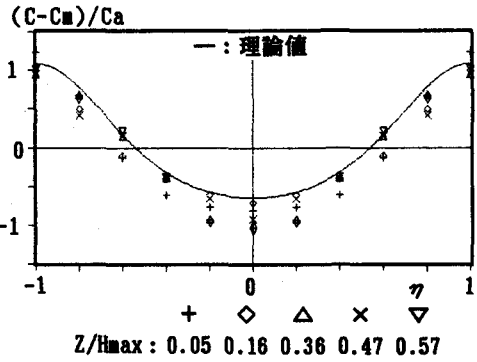
表-1 実験条件

流量	水深	水路勾配	摩擦速度	河床条件	珪砂量
Q(l/s)	H(cm)	ib	$U_x$ (cm)		(g/l)
4.74	3.16	1/200	3.57	平坦固定床(粗面)	4.3
8.43	4.53	1/400	3.42	模擬縦筋床(滑面)	8.9
8.56	4.82	1/400	3.35	模擬縦筋床(粗面)	5.4

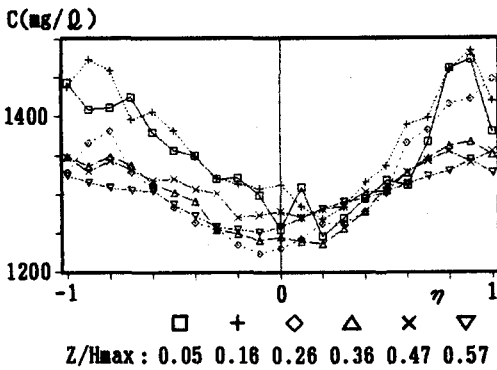
値の比は、平坦河床で1.35，模擬縦筋河床の滑面および粗面でそれぞれ 1.51 および 1.18 である。図-4は、局所時間平均濃度 $C(y, z)$ を無次元化した濃度の横断分布を示す。使用した無次元化変数 $C_m(z)$ および $C_a(z)$ は、それぞれ河床からある高さにおける極大濃度の発生地点間での横断方向に平均した濃度および極大濃度と極小濃度との差を表す。無次元化された濃度の横断分布は、鉛直方向に相似形を保つことが認められる。



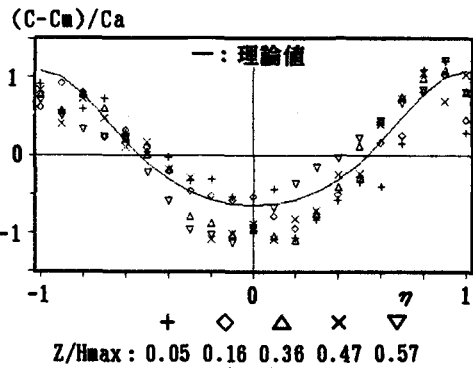
(a) 模擬縦筋河床 (滑面)



(a) 模擬縦筋河床 (滑面)



(b) 模擬縦筋河床 (粗面)



(b) 模擬縦筋河床 (粗面)

図-3 浮流砂濃度の横断分布

図-4 浮流砂濃度の相似形

## (2) 理論解析

安定した二次流の存在する開水路流れにおいて、流れ方向に平衡状態に達した沈降性粒子の物質収支式は、分子拡散項を無視すれば次式で与えられる。

$$V \frac{\partial C}{\partial y} + W \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial (K_y \frac{\partial C}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial (K_z \frac{\partial C}{\partial z})}{\partial z} + w_B \frac{\partial C}{\partial z} \quad \dots (19)$$

前節の実測データより鉛直方向に相似形を仮定することが可能であることから、濃度分布を次式のように仮定する。

$$C(y, z) = C_m(z) + C_a(z) \cdot f(y) \quad \dots (20)$$

濃度の横断分布の波形は、振幅 $C_a(z)$ と分布形状 $f(y)$ によって規定される。振幅 $C_a(z)$ を求めるには、二次流の上昇流部と下降流部における鉛直濃度分布を知る必要がある。二次流の上昇・下降流部において $V=0$ および $\frac{\partial C}{\partial y}=0$ を仮定すれば、基礎式(19)は次のように表される。

$$W \partial C / \partial z = \partial (Kz \partial C / \partial z) / \partial z + w_0 \partial C / \partial z \quad \dots (21)$$

濃度が流れ方向に平衡状態にある場合、二次流による対流輸送、乱流拡散項および沈降流束の和は鉛直方向にバランスしていること、また、自由水面外への物質の流出はないことを考慮すれば、上式の解は

$$C(z) = C(z_0) \cdot \exp\left(-\int_{z_0}^z (w_0 - W) / Kz \cdot dz\right) \quad \dots (22)$$

となる。ここに、 $C(z_0)$ は河床より任意の高さ $z_0$ における基準点濃度である。上式に二次流の鉛直流速成分 $w$ を与えれば、二次流の上昇・下降流部における鉛直濃度分布が求められる。Stommel<sup>3)</sup>は二次流を与える最も単純な流れ関数として、次式

$$\Psi(y, z) = Vs / \pi \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \quad \dots (23)$$

を用いた。式(22)に上式より得られる二次流の鉛直成分 $W$ および物質拡散係数 $Kz$

$$Kz = \beta \kappa U_{*} H / 6 \quad \dots (24)$$

を代入すれば、二次流の上昇流部および下降流部における鉛直濃度分布は各々、

$$C_{max}(z) = C_{max}(z_0) \cdot \exp\{-6Z \cdot Vs / (\pi \cdot w_0) \cdot (\cos \pi z - \cos \pi z_0)\} \cdot \exp\{-6Z \cdot (z - z_0) / Hm\} \quad \dots (25)$$

$$C_{min}(z) = C_{min}(z_0) \cdot \exp\{6Z \cdot Vs / (\pi \cdot w_0) \cdot (\cos \pi z - \cos \pi z_0)\} \cdot \exp\{-6Z \cdot (z - z_0) / Hm\} \quad \dots (26)$$

となる。ここに、 $Z = w_0 / \beta \kappa U_{*}$ 。次に、濃度の横断分布 $f(y)$ を与える基礎式は式(19)に式(20)を代入し、 $z$ 軸に関して $z_0$ から自由水面 $H$ まで積分すれば、

$$\int_{z_0}^H Ca \cdot \partial (Ky \partial f / \partial y) \partial y \cdot dz - \int_{z_0}^H Ca \cdot \partial (V \cdot f) / \partial y \cdot dz \\ = [-W(Cm + Ca \cdot f) + Kz \cdot \partial (Cm + Ca \cdot f) / \partial z + w_0 \cdot (Cm + Ca \cdot f)] \int_{z_0}^H \quad \dots (27)$$

となる。上式に、 $Ky = \text{const.}$ と仮定し、二次流に対しては、式(23)を用いれば $f(y)$ に関する二階の常微分方程式

$$d^2 f / dy^2 - a_1 \cdot \sin(\pi y / b) \cdot df / dy - a_1 \cdot \pi / b \cdot \cos(\pi y / b) \cdot f = a_2 \cdot \cos(\pi y / b) + a_3 \quad \dots (28)$$

$$a_1 = (Vs / Ky) \int_{z_0}^H \cos(\pi z / H) \cdot Ca(z) \cdot dz / \int_{z_0}^H Ca(z) \cdot dz$$

$$a_2 = (\pi / b) (Vs / Ky) \int_{z_0}^H \cos(\pi z / H) \cdot Cm(z) \cdot dz / \int_{z_0}^H Ca(z) \cdot dz$$

$$a_3 = [-W(Cm + Ca \cdot f) + Kz \cdot \partial (Cm + Ca \cdot f) / \partial z + w_0 \cdot (Cm + Ca \cdot f)] \int_{z_0}^H / \{Ky \int_{z_0}^H Ca(z) \cdot dz\}$$

が得られる。

### (3) 理論値と実測値との比較

図-5は、二次流の上昇流部と下降流部における浮流砂濃度の鉛直分布について、理論値と実測値の比較を行ったものである。計算パラメータは、実験との対応を図るため、 $w_0 / U_{*} = 0.3$ 、 $Vs / U_{*}$ は上昇流部で0.6、下降流部で0.3の値を与えた。浮流砂濃度は、上昇流部では鉛直上方に緩やかに減少するのに対して、下降流部では急激に低減する傾向が比較的良く再現されている。二次流の及ぼす浮流砂の鉛直濃度分布への影響は、実測値が理論値に比べてやや強く現れているが、式(25)および(26)によって大略評価され得る。

無次元化された浮流砂濃度の横断分布 $f(y)$ は、式(28)をルンゲ・クッタ・ギル法を用いて計算され、図-4の(a)(b)に実線で示された。式中の係数 $a_1, a_2$ は、実測値 $Cm(z), Ca(z)$ が用いられ、 $Vs / U_{*} = 0.4, a_3 = 0$ として計算された。 $f(y)$ の条件としては、 $y=0$ において $df/dy=0$ および $\int_0^b f(y) \cdot dy=0$ が与えられた。計算値は、浮流砂濃度が二次流の下降流部から上昇流部に向かって横断方向に増加する傾向が良好に再現されている。

#### 4.まとめ

本研究では、二次流の分布特性および二次流の浮流砂濃度に及ぼす影響が理論解析され、以下の結果が得られた。

(1)二次流の理論解は、主流方向の平均渦度方程式を基礎式として誘導された。その際、二次流の抑制項である乱れの強さの差には実測データを参照した近似式を用い、発生項であるレイノルズ応力には渦動粘性係数を導入して二次流と関係付け、境界条件には、粘着条件を適用した。理論曲線は実測値と比較的良好一致し、二次流の分布特性が再現された。

(2)安定した二次流を伴う開水路流れにおいて波状分布を呈する浮流砂濃度は、式(20)によって変形された無次元濃度 $f(y)$ により、鉛直方向に相似形となることが実験的に明かにされた。

(3)二次流の上昇流部および下降流部における濃度の鉛直分布は、それぞれ式(25)および(26)から、大略推定可能であることが、理論値と実測値との比較により認められた。

(4)式(28)に基づく無次元濃度 $f(y)$ の計算値は、実測値と良好一致を示した。

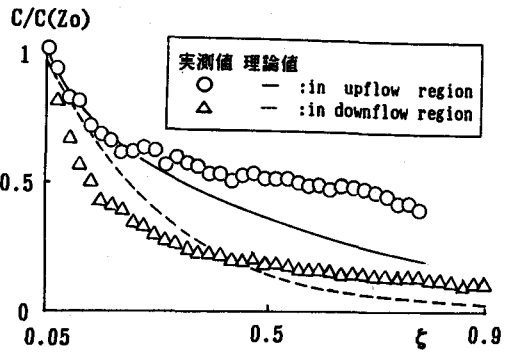


図-5 浮流砂濃度の鉛直分布

#### 参考文献

- 1)木下良作：航空写真による洪水時の流況測定，土木学会水工学シリーズ，1968，pp.12-1-40
- 2)Vanoni, V.A: Transportation of Suspended Sediment by Water, Trans. ASCE, Vol. 111, 1946, pp. 67-133
- 3)Stommel, H: Trajectories of small bodies sinking slowly through convection cells, J. Mar. Res. Vol. 8(1), pp. 24-29
- 4)村本嘉雄，河田恵昭，布村明彦：砂礫河川の掃流砂に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第20 B-2, 1977, pp. 451-474
- 5)今本博健，大年邦雄：固液混相開水路流れの水理特性に関する研究(4)，京都大学防災研究所年報，第25, B-2, 1982, pp. 417-427
- 6)富永晃宏，江崎一博：流砂に及ぼす二次流の効果に関する検討，第32回水理講演会論文集，1988, pp. 455-460
- 7)大本照憲，平野宗夫：縦筋河床上の三次元乱流構造について，第33回水理講演会論文集，1989, pp. 529-534
- 8)IKEDA, S: Self-Formed Straight Channels in Sandy Beds, ASCE, Vol. 107, No. HY4, 1981, pp. 389-406
- 9)NEZU, I., NAKAGAWA, H: Cellular Secondary Currents in Straight Conduit, ASCE, Vol. 110, No. HY2, pp. 173-193, 1984
- 10)林 泰造，山田 正：開水路における縦渦の形成に関する研究，第21回水理講演会論文集，1977, pp. 245-253
- 11)黒木幹男，岸 力：開水路に発生する縦渦の構造に関する研究，土木学会論文報告集，第312号，1981, pp. 83-92