

流れの抵抗に関する新しい考え方 New Consideration on Fluid Friction

日本大学工学部 安田 禎 輔 Teisuke YASUDA

There are many empirical and some theoretical formulas on fluid friction. However, the application limits of these formulas are not always evident and some of these formulas are very complex. Why are many formulas having very different forms like this proposed and why are those often very complex? The reason is that the existent friction factor does not become constant and the formula of wall shear stress is not always reasonable.

Hence, in this paper, the new equations of the friction and the definitions of its factor are proposed and it is shown that many phenomena are explained successfully by these new equations.

Keywords: wall shear stress, friction factor, internal friction, new definition, new equation

1. まえがき

平均流速や流速分布を調べることは、見方を変えれば流れの抵抗を調べることになる。流れの抵抗に関する式には、数多くの実験式や幾つかの理論式がある。しかし、これらの式の適用限界は必ずしも明かではなく、相当複雑な式も少なくない。なぜこのように形の異なった式が数多く提案され、なかには、かなり複雑な形の式まで生まれて来るのか。それは、現行の定義による抵抗係数が定数とならないからであり、流れの抵抗の式（抵抗係数の定義式）が必ずしも充分ではないからである。

本報においては、壁面抵抗の式を理論的に誘導し、抵抗係数の新しい定義を試み、新定義によって従来の数多くの事柄がうまく説明できることを示す。

2. 壁面抵抗と抵抗係数

従来は、最も単純な発想ではあるが、壁面抵抗 τ_0 が単位体積当りの流体の運動エネルギー $(\rho v^2/2)$ に比例するものとみなし、その比例係数 f' を壁面抵抗係数と定義し、 τ_0 を

$$\tau_0 = f' \rho v^2 / 2 \quad (1)$$

と表している。しかし、必ずしも τ_0 が $(\rho v^2/2)$ に比例するとはかぎらず、Nikuradseの実験結果 Fig-1 から明らかなように、Reynolds数の大きな粗面乱流領域においてのみ比例関係が成立するがそれ

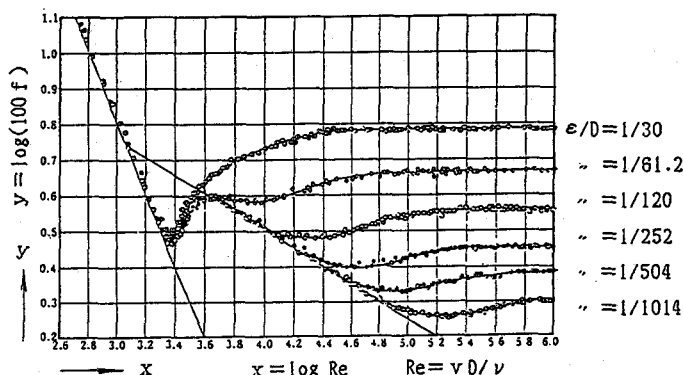


Fig. 1. Nikuradse's experiment on friction factor for sand-roughened pipes.

以外の領域では成立しない。したがって、前者の領域では Chezyの平均流速式、Darcy-Weisbachの損失水頭

の式や Blasius の抵抗係数の式は成立するが、現在最も幅広く利用されている Manning の式は成立しない。

τ_0 を II 定理によって求め、従来の形で表すと

$$\tau_0 = f' (Re, \epsilon/R, C_f) (\rho v^2 / 2) \quad (2)$$

となり、確かに形の上からは τ_0 は $(\rho v^2 / 2)$ に比例することになるが、係数 f' は必ずしも定数とはならず、Reynolds 数 Re 、相対粗度 ϵ/R or ϵ/D および形状係数 C_f などの関数となる。

したがって、 f' の実験式は流れの領域、壁面の粗さ、断面の形状などにより数多くの式が提案され、同一領域においても形の異なった幾つもの式が提案されており、複雑な形の式も少なくなく不便である。

3. 抵抗係数の新しい定義⁽¹⁾

必ずしも τ_0 が $(\rho v^2 / 2)$ に比例するとはかぎらず、むしろ τ_0 は $(\rho v^2 / 2)^m$ と $[ML^{-1}T^{-2}]$ の次元を持つある物理量の $(1-m)$ 乗とに比例するものと考えて、 τ_0 を

$$\tau_0 = \lambda' (\text{ある物理量})^{1-m} (\rho v^2 / 2)^m \quad (3)$$

と表したほうが、より一般的であるものと考えられる。ここである物理量とは、流体の性質や水路の形状などを示す物理量である。以上の事柄を満足する「ある物理量」は、(2) 式を変形することにより容易に見つけることができる。すなわち、

$$Re = (2R^2 / \rho \nu^2)^{1/2} (\rho v^2 / 2)^{1/2}$$

であるから、本式を (2) 式に代入して整理すれば、(3) 式のさらに具体的な式として次式が得られる。

$$\tau_0 = \lambda' (\rho \nu^2 / R^2)^{1-m} (\rho v^2 / 2)^m \quad (4)$$

ここで、 λ' ：新しく定義された抵抗係数、 $\lambda' = \lambda' (\epsilon/R, C_f)$

(4) 式は、 $Re = vD/\nu$ と従来の定義による f' との関係が遷移領域をのぞき両対数紙上で直線分布する

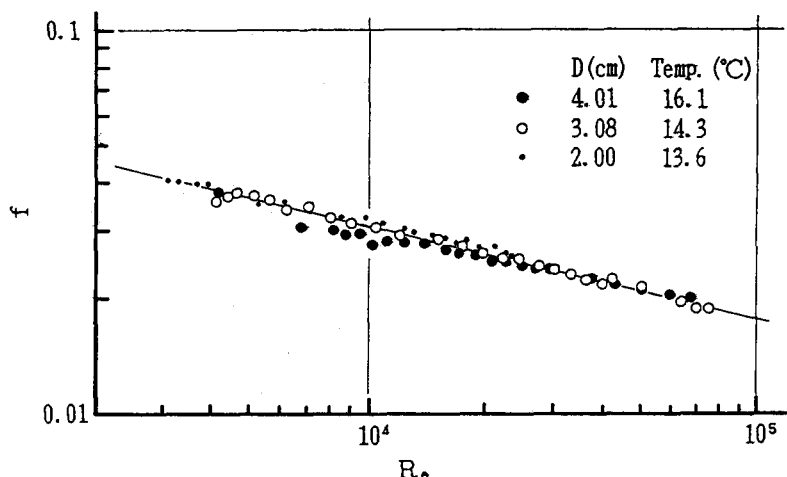


Fig. 2. Experimental results for relation between Re and f

ことから簡単に求められる。Fig-2は、円管における滑面乱流の Re と $f = 4f'$ との関係であり、両対数紙上で直線分布している。また本式は、筆者が以前に提案した管路の平均流速式⁽²⁾、(6)式からも求めることができる。ただし、 $m = 1/(2\alpha)$ となる。

指数 m 、 α および係数 λ' は、流れの領域によって定まる常数であり、これらを Table-1 に示す。ただし、 λ' の値は円管における値である。

さて、 Re の大きな粗面乱流においては、Table-1 により $m=1.0$ となるから、(4) 式は

$$\tau_0 = \lambda' (\rho v^2 / 2)$$

となり、 $\lambda' = f'$ とおけば (1) 式と完全に一致する。したがって、従来の定義による抵抗係数 f' ある

いは(1)式は、充分に発達した粗面乱流における係数であり式だったのである。

Table 1. Yasuda's Empirical Constants for New Equations in Smooth Pipes. $m=1/(2\alpha)$.

Region \ Const.		α	m	λ'
Laminar flow		1.0	0.50	$2\sqrt{2}$
Turbulence	Smooth pipe	0.570	0.877	0.04851
	Transition			
	Rough pipe	0.50	1.0	f'

滑面乱流においては、Table-1により $m=0.877$, $\lambda'=0.04851$ となるから、(4)式は

$$\tau_0 = 0.04851 (\rho v^2 / R^2)^{0.1228} (\rho v^2 / 2)^{0.8772}$$

となり、本式より従来の定義による摩擦損失係数 $f=4f'$ を求めると次式となる。

$$\text{Yasuda: } f = 0.297 / \text{Re}^{0.2456} \quad (5)$$

本式と Blasius の滑面乱流の式 : $f = 0.3164 / \text{Re}^{0.25}$

とを比較すれば、その差は最大わずか3%弱であり、Fig-2における実線は(5)式による計算値である。

層流においては $\alpha=1.0$ であるから $m=1/2$ となり、(4)式は次式となる。

$$\tau_0 = \lambda' (\rho v^2 / R^2)^{1/2} (\rho v^2 / 2)^{1/2}$$

ここで、 $\lambda = 2\sqrt{2}$ とおき上式を変形すれば

$$\tau_0 = (16/\text{Re}) (\rho v^2 / 2)$$

となり、従来の層流における結果 ($f'=16/\text{Re}$) と完全に一致し、 f' は Re の関数となるが、新定義による係数は定数となり非常に簡単である。

以上のように、(4)式により従来の式は矛盾なく説明することができ、その係数 λ' は流れの領域に応じた定数となり、従来の式より取扱いやすくなる。以上の結果をまとめるとTable-2となる。

Table 2. Wall Shear Stress and Flow Regions.

Flow region		Formula of wall shear stress	Remarks
Laminar flow		$\tau_0 = 2\sqrt{2} (\rho v^2 / R^2)^{1/2} (\rho v^2 / 2)^{1/2}$	$\tau = (16/\text{Re}) (\rho v^2 / 2)$
Turbulence	Smooth pipe	$\tau_0 = 0.04851 (\rho v^2 / R^2)^{0.1228} (\rho v^2 / 2)^{0.8772}$	$f = 0.297 / \text{Re}^{0.2456}$ Approx. to Blasius
	Rough pipe	$\tau_0 = \lambda' (\rho v^2 / 2)$	$\lambda' = f'$ $\lambda' = \lambda' (e/R, C_r)$

4. 新しい平均流速式と摩擦損失水頭の式

等流における壁面抵抗 τ_0 は、流れ方向の力の釣合の条件より $\tau_0 = \rho g R I$ となる。ここで $\alpha=1/(2m)$ とおき、本式と(4)式とより平均流速を求めると次式となる。

$$v = \frac{\sqrt{2}}{v^{2\alpha-1}} \left(\frac{g}{\lambda'} \right)^\alpha R^{3\alpha-1} I^\alpha \quad (6)$$

本式はまた、遷移領域をのぞき、Reynolds数と従来の定義による抵抗係数との関係が、両対数紙上で直線

分布することからも求めることができる。ここで、 $\beta = 3\alpha - 1$ ----- (7), $k' = \sqrt{2}(g/\lambda')^\alpha$, $k = k'/4^\beta$ とおけば、(6)式は次式で示される。

$$v = \frac{k'}{\nu^{2\alpha-1}} R^\beta I^\alpha \text{ ---- (8), or } v = \frac{k}{\nu^{2\alpha-1}} D^\beta I^\alpha \text{ ----- (8)'}$$

これらの(6)~(8)式は一般にベキ型公式と呼ばれているが、実験式の多くはこの形の式である。ベキ型の実験式のうちで、(7)式の指数関係をほぼ満足する式には、Chezy, Hazen-Williams, 東京都水道局およびHagen-Poiseuilleなどの式がある。しかし、現在最も幅広く利用されているManningの式はこの関係を満足しない。

層流においては、Table-1 より $\alpha = 1.0$, $\lambda' = 2\sqrt{2}$ であるから、(6)式は

$$v = \frac{1}{32} \frac{\rho g}{\mu} D^2 I$$

となり、本式より流量Qを求めるとHagen-Poiseuilleの式と一致する。

滑面乱流においては、Table-1 より $\alpha = 0.570$, $\lambda' = 0.04851$ であるから、(6)式はS I単位で次式となる。

$$v = 7.936 \frac{g^{0.570}}{\nu^{0.140}} R^{0.710} I^{0.570} \text{ (9)}$$

本式は重力の加速度の影響も完全に抽出されているので、重力の異なる地球以外の天体や、近い将来に建設されるであろう宇宙ステーションにおいても成立する。地球上における実用式としては、(9)式を次式のように表してもよい。

$$v = 10.89 \nu^{-0.140} D^{0.710} I^{0.570} \text{ (10), or } v = 29.15 \nu^{-0.140} R^{0.710} I^{0.570} \text{ (10)'}$$

Fig-3は、硬質塩化ビニール管におけるIとvの測定値であり、図の実線は(9) or (10)式による計算値である。

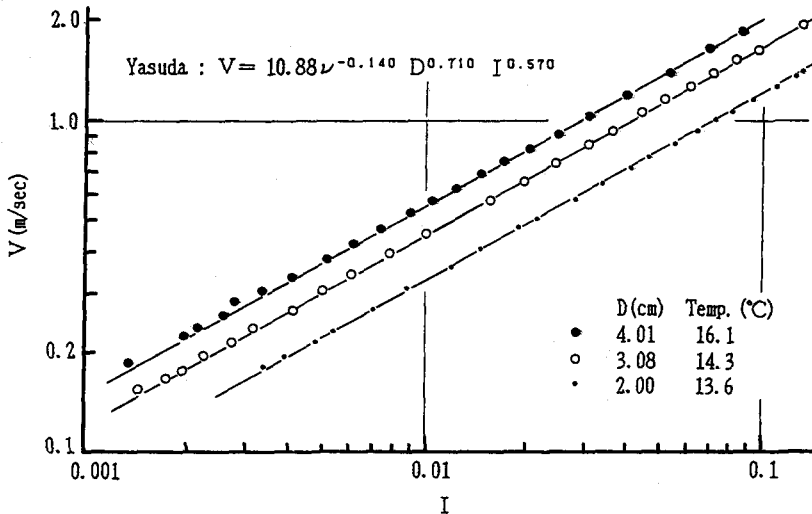


Fig. 3. Experimental results for relation between I and v in pipes.

粗面乱流においては、Table-1 より $\alpha = 1/2$, $\lambda' = f'$ であるから、(6)式は $v = \sqrt{2g/f'} \sqrt{R I}$ となり Chezyの式と一致する。

以上のように、(6)式に流れの条件さえ代入すれば、各領域の平均流速式が得られるが、これらをまとめればTable-3となる。

全ての領域の摩擦損失係数をDarcy-Weisbachの式: $h_L = f (L/D) (v^2/2g)$ (11) で定義すると、Reynolds数の大きな粗面乱流領域以外の領域では、摩擦損失係数fは定数とはならず、 $Re =$

vD/ν の関数となり実用上大変不便である。

Table 3. Mean Velocity of Flow in Pipes.

Flow region		Yasuda Formula	Remarks
Laminar flow		$v = (1/32) (\rho g / \mu) D^2 I$	Hagen-Poiseuille
Turbulence	Smooth pipe	$v = 7.936 (g^{0.570} / \nu^{0.140}) R^{0.710} I^{0.570}$	in SI units cf. Blasius, Hagen
	Rough pipe	$v = \sqrt{2g} / \lambda \sqrt{R I} \quad * \lambda' = f'$	Chezy : $v = C \sqrt{R I}$ Eytelwein, Fanning etc.

さて、(6) 式を摩擦損失水頭 h_L について解けば

$$h_L = \lambda' \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1-m} \frac{L}{R^{3-2m}} \left(\frac{v^2}{2g} \right)^m \quad (12), \quad h_L = \lambda \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1-m} \frac{L}{D^{3-2m}} \left(\frac{v^2}{2g} \right)^m \quad (12)'$$

ここで、 $m = 1/(2\alpha)$, $\lambda = 4^{(\beta/\alpha)} \lambda'$, $\beta = 3\alpha - 1$

となる。ここで、(12)' 式に粗面乱流の条件 $m = 1.0$ を代入すれば (11) 式となり、(12)' 式は完全に Darcy-Weisbach の式と一致する。Fig-4 は、円管の滑面乱流における Re と λ' の測定値であり、 λ' は直径 D や Re などに関係なく一定となる。

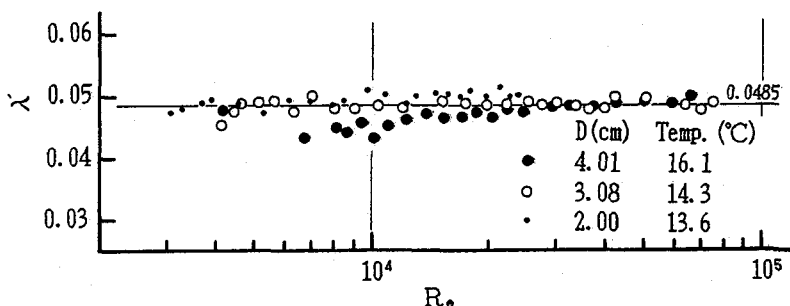


Fig. 4. Relation between Re and λ' .

5. 内部摩擦抵抗の新しい表現と流速分布式^{(3),(4)}

管路の平均流速は、(6) ~ (8)' 式で示されるように、径深 R または直径 D のべき乗に比例するので、流速分布は管の中心からの距離 r のべき乗の関数となり、また管の中心 $r = 0$ で最大流速 u_{max} となり、速度勾配 $du/dr = 0$ となる。したがって、流速分布は次式で示される。

$$u = u_{min} + (u_{max} - u_{min}) \{1 - (r/r_0)^n\}$$

ここで、 $a = u_{min}/v$, $b = (u_{max} - u_{min})/v$ とおくと

$$u = av + bv \{1 - (r/r_0)^n\} \quad (13)$$

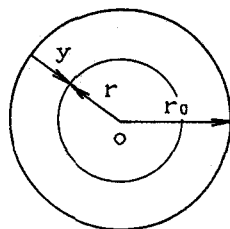
$$du/dr = - \{nbv / (2R)^n\} r^{n-1}$$

となる。本式に (6) 式を代入して、 I について解けば

$$I = \left(\frac{2^{n-0.5} R^{n-\beta}}{nb} \right)^{1/\alpha} \lambda' \frac{\nu^{(2\alpha-1)/\alpha}}{g} r^{(1-n)/\alpha} \left(-\frac{du}{dr} \right)^{1/\alpha} \quad (14) \quad \text{Fig. 5. Circular pipe.}$$

となる。半径 r の点における内部摩擦抵抗 τ は、流れ方向の力の釣合の条件より次式となる。

$$\tau = (1/2) \rho g r I \quad (15)$$



本式に(14)式を代入して、 τ の一般式として次式が得られる。

$$\tau = \frac{\lambda'}{2} \left(\frac{2^{n-0.5} R^{n-\beta}}{nb} \right)^{1/\alpha} \rho \{ \nu^{2\alpha-1} r^{\alpha+1-n} \}^{1/\alpha} \left(-\frac{du}{dr} \right)^{1/\alpha} \quad (16)$$

また本式は、次元解析によっても求めることができる。

さて本式に層流の条件： $\alpha = 1.0$, $\beta = 2.0$, $\lambda' = 2\sqrt{2}$, $b = 2.0$, $n = 2.0$ を代入すれば、次に示す Newton の粘性の抵抗則が得られる。

$$\tau = -\mu (du/dr) \quad (17)$$

粗面乱流においては、 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ であるから、(16)式は次式となる。

$$\tau = \rho \sigma r^{2(1.5-n)} (du/dr)^2 \quad (18)$$

$$\text{ここで, } \sigma = (\lambda'/2) (r_0^{2n-1}/(nb)^2)$$

本式と Prandtl の混合距離理論の式： $\tau = \rho l^2 (du/dy)^2$

と比較すれば、 $l = \sqrt{\sigma} / (r_0 - y)^{n-1.5}$ となり Prandtl の混合距離の仮定： $l = \kappa y$ と異なる。この差異については目下検討中なので、(18)式を粗面乱流における暫定的な式として提案することと定める。

また、(6)式と(13)式とより、次に示す流速分布の一般式が得られる。

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\nu^{2\alpha-1}} \left(\frac{g}{\lambda'} \right)^\alpha R^{3\alpha-1} I^\alpha \left[a + b \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \right\} \right] \quad (19)$$

本式に層流の条件： $\alpha = 1.0$, $\lambda' = 2\sqrt{2}$, $a = 0.0$, $b = 2.0$ および $n = 2.0$ を代入すれば、Newton の粘性の法則より導かれた従来の層流における流速分布式と一致する。

6. むすび

壁面抵抗係数の新しい定義(4)式により、すでに知り得た多くの事柄をうまく説明することができ、かつ、これらは互に関連付けられ有機的に理解することができた。以上の事柄を列記すれば次の通りとなる。

- ① 新しい壁面抵抗の式(4)から、従来の式(1)および層流における抵抗係数 $f' = 16/Re$ などが得られ、遷移領域をのぞく Nikuradse の実験結果 Fig-1 も説明できる。
- ② (4)式に、Table-1の滑面乱流の条件を代入して、Blasius の摩擦損失係数の式と比較してみれば、その差は最大でわずか3%弱である。
- ③ (4)式から、平均流速の新しい式(6)が得られるが、これより Chezy や Hagen-Poiseuille などの式が得られる。
- ④ また、(6)式からは新しい摩擦損失水頭の式(12)または(12)'式が得られるが、本式に粗面乱流の条件を代入すれば Darcy-Weisbach の式となる。したがって、従来の抵抗係数の定義式や摩擦損失水頭の式は粗面乱流に対する式であるものと解釈できる。
- ⑤ 従来の定義による抵抗係数 f' や損失係数 f は、粗面乱流領域をのぞき Reynolds 数の関数となるが、新定義による係数 λ' や λ は流れの領域によって定まる定数となる。
- ⑥ 新しい平均流速の式(6)より、微分法により、内部摩擦抵抗 τ の一般式(16)が得られるが、本式に層流の条件を代入すれば、Newton の粘性の法則(17)式となる。
- ⑦ 内部摩擦抵抗と流速分布の一般式(16)および(19)式には若干未解決な点が残るが、層流に関しては主なる事柄はほぼ全て説明することができた。また、以上の諸式は互に関連付けられ、互いに誘導し合える。

〔謝辞〕：最後に、本研究に対して1988年度の日本大学学術研究助成金を受けたことを報告し、日本大学および研究協力者に感謝の意を表す。

- 〔参考文献〕：(1) 安田禎輔, 壁面抵抗に関する2, 3の提案と考察, 第43回土木学会年講Ⅱ, 1988. 10
 (2) 安田禎輔, 管路の平均流速に関する研究(第1~2報), 第28回土木学会年講Ⅱ, 1973. 10
 (3) Teisuke Yasuda "Consideration of Wall Shear Stress and Friction Factors" Proc. Int'l Conf. for Centennial of Manning's and Kuichling's Formula, Virginia, May 1989.
 (4) 安田禎輔, 流速分布と内部摩擦に関する一提案, 第44回土木学会年講Ⅱ, 1989. 10