

豪雨型山腹崩壊の確率的予測モデルと信頼区間

A Stochastic Forecasting Model of Landslides due to Heavy Storms and Confidence Intervals of Forecasts

徳島大学工学部 正員 端野 道夫 Michio HASHINO
徳島大学大学院 学生員 佐々木 章 公 Fumihito SASAKI

The occurrence number of landslides due to heavy storms per unit area(250m*250m) is found to follow a negative binomial distribution with parameters k and p , in which the variance is greater than the mean. Taking note of the reproducing property of the parameter k against a same value of p , and taking account of the linear relationship between the mean number of landslides and the parameter k , an exponential regression model of k is proposed. The coefficients of the explanation variables of the regression model can be calculated by the maximum likelihood method, and the confidence intervals of expectations for the occurrence number and area of landslides are theoretically derived.

Keywords: landslides due to heavy storms, negative binomial distribution, tank model, confidence interval

1. はしがき

豪雨による山腹崩壊は物理的機構が複雑であるとともに関連要因が多く、それらが複雑に関連しあっており、決定論的予測にはおのずと限界がある。そこで崩壊現象を取り扱う手法として考えられるのが確率統計的な方法である。後述のようにある広がりをもつ地域での崩壊発生個数の分布は、負の二項分布なる確率分布で極めて良く表現される。この確率分布は平均よりも分散が大きい分布特性を持っており、このことから崩壊現象は極めてばらつきが多く偶発性が高いことになる。

本研究は、まず崩壊発生個数の確率分布である負の二項分布のパラメータ k が平均崩壊個数と一次関係にあることに着目し、崩壊に関連する素因、誘因より k に関する指数型回帰式を構築する。この内、誘因については崩壊に関与する量として有効成分を考え、回帰係数の計算には最尤法を用いた。この回帰係数より k を予測し、これをもとに時間的または場所的に変化する対象地域の崩壊発生確率、崩壊発生個数、崩壊面積の期待値及びそれらの予測信頼区間を算定する方法を提示する。

2. 崩壊個数分布の実態とモデル化

(a) 崩壊個数の確率分布

対象流域として図-1に示す徳島県那賀川小見野々ダム流域(流域面積266.8km²)をとり、秩父帯に250*250mのメッシュを100個単位で5個設け、対象期間としては昭和46年~50年、昭和51年の2期間とし、それぞれ期間①、②とした。①の期間は降雨日数が1~6日で、総雨量が100~1000mmの17降雨を取り上げた。②の期間は降雨が、一週間に

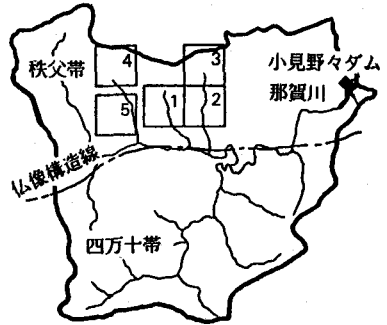


図-1 対象流域

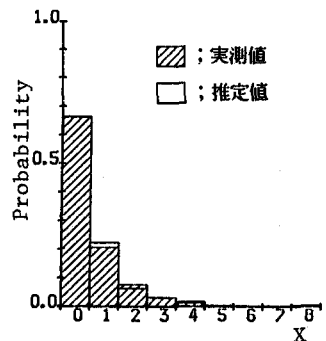


図-2 崩壊個数の確率分布

わたり、その総雨量が2000mmを越える豪雨をもたらした昭和51年台風17号が発生した期間であり、大崩壊を含む多数の崩壊が発生している。これらの期間について崩壊個数及び面積を航空写真より読み取った。なお、崩壊個数の数え方としては、崩壊源が一つに対して崩壊が一つ、また樹枝状崩壊の場合、一つの崩壊が原因となって他の崩壊を引き起こしたと考えられる場合、それ全体を一つの崩壊と数える。

図一2は崩壊個数の確率分布を表したもので、白枠は実測値、斜線は負の二項分布による推定値を表す。この図より、崩壊個数の確率分布は(1)式で与えられる負の二項分布に良く従うことが認められる。式中の k 、 p は負の二項分布のパラメータで、崩壊データの平均 μ 、分散 σ^2 より求めることができる。

$$NB(k, p) = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(k)x!} p^k q^x \quad (1)$$

$$(p+q=1 ; x=0,1,2,\dots), p=\mu/\sigma^2, k=\mu^2/(\sigma^2-\mu)$$

(b) 負の二項分布の再生性¹⁾

確率変数 X_1, X_2 が互いに独立の条件のもとで $NB(k_1, p), NB(k_2, p)$ に従うとき、和 $(X_1 + X_2)$ は、また $NB(k_1 + k_2, p)$ に従う。この特性を負の二項分布の再生性と言う。この再生性が場所的または時間的に成り立つとすると、崩壊個数の和は $NB(\sum k_i, p)$ に従い、累加崩壊個数、累加崩壊面積および、崩壊発生確率(1個以上の崩壊が起こる確率)が理論的に与えられる。さらに信頼区間を表すことが可能となり、ある程度の広さを持つ地域での崩壊個数、崩壊面積の累加量、豪雨時の時間的な崩壊発生確率の増加を求めることができる。そこで再生性を調べるために4メッシュの崩壊個数の和を新たに一つのデータとして p_4 を求め、もとの p と比較した。その結果、両者は等しいと見なせることから、場所的な再生性が成り立つことを確認した。

(c) パラメータ k に関する指数型回帰モデル

パラメータ k_i は平均崩壊個数と一次関係((2)式参照)にあり、負の値には成り得ないことから(3)式で与えられる指数型回帰式を考えた。

$$E_i(X) = k_i q / p \quad (2)$$

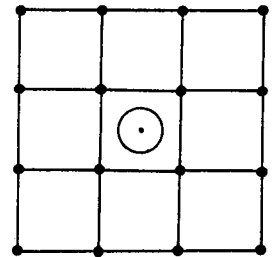
$$k_i = \bar{k} \exp\left(\sum_{l=1}^S \sum_{m=1}^R \delta_{il(m)} x(l_m) + \sum_{n=1}^U z_{in} \beta_n\right) \quad (3)$$

$\delta_{il(m)}$: メッシュ i のアイテム l 、カテゴリ m におけるカテゴリ値

$x(l_m)$: アイテム l のカテゴリ m に対する重み

z_{in} : メッシュ i での量的変数の値

β_n : 量的変数の回帰係数 \bar{k} : 定数項



図一3 メッシュの格子点図

この k_i は空間単位として1メッシュ、時間単位として一年を採用する。伐採以外の素因は経年的に不変とし、誘因としては一年間当りの量を用いる。また回帰式に用いる説明変数と回帰係数の記号を表一1に示す。

3. パラメータ k に関連する素因、誘因とその算出法

(a) 素因

関連要因²⁾の内、素因として各メッシュの地形特性、谷次数、伐採を取り上げた。図一3に示すような中央のメッシュを対象とする場合、格子点16個の標高を地形図

表一1 回帰式に用いる説明変数と回帰係数の記号

質的 変数	素	谷 次 数	1. 1次谷 δ_{11}	X_{11}
			2. 2次谷 δ_{12}	X_{12}
		伐 採	1. 無 δ_{21}	X_{21}
			2. 有 δ_{22}	X_{22}
量的 変数	因	最大斜面の縦断面凹凸形状	Z_1	β_1
		最大斜面の横断面凹凸形状	Z_2	β_2
		最大斜面勾配	Z_3	β_3
		標 高 (m)	Z_4	β_4
誘 因		表面流出高 (mm)	Z_5	β_5
		土壌水分高 (%)	Z_6	β_6

から読み取り、スプライン関数を用いてメッシュ内の円の中心と円周上の16点の標高を求め、最大斜面の縦断及び横断凹凸形状、最大斜面勾配、標高を算出した。谷次数は一次谷と二次谷以上に区別し、各メッシュがどちらに属するかを選んだ。崩壊の危険度は伐採後10～15年で最も高くなると言われている。そこで、航空写真を用いて対象期間以前におこなわれた伐採を調べた。①の期間については昭和37年～45年、②の期間については昭和37年～51年5月の間に行われた伐採をそれぞれ伐採有りとした。

(b) 誘因

誘因として土壌水分飽和度、表面流出貯留高を採用し、それらを以下のように計算した。まず対象地域内外12～17箇所の雨量観測所の時間雨量をもとに、スプライン関数を用いて各メッシュごとの時間雨量を求めた。つぎに図-4に示す土壌水分を考慮した直列2段タンクモデル(表層タンク+地下水タンク)を用いて崩壊に関与すると考えられる土壌水分飽和度 $(X_1 + X_2) /$

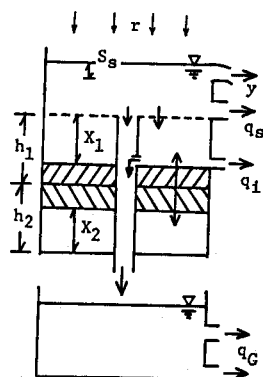


図-4 直列二段タンクモデルの構造

$(h_1 + h_2)(\%)$ 、表面流出貯留高 $S_s(\text{mm})$ を時間単位で算出した。図中の r は降雨、 y は表面流出、 X_1/h_1 、 X_2/h_2 は一次及び二次土壌水分飽和度を表している。また q_s は中間流出、 q_i は遅い中間流出、 q_g は地下水流出を表している。なお、タンクモデルのパラメータについては、流域内の折宇谷流出試験地での解析結果が各メッシュでも成り立つとして使用した。

流域に降った雨のうち流域に含有される貯留高のすべてが崩壊の発生に関与するのではなく、ある条件によって区切られた部分(有効成分)³⁾が関与すると考える。その条件として、まず貯留高が表面流出貯留高、土壌水分飽和度の臨界値 S_c 、 Z_c を越えれば崩壊が発生すると考える。またその臨界値を越えれば崩壊個数の期待値は、ある条件によって時間的に累加された量に比例すると考えた。そこで S_c 以上の値を対象に表面流出貯留高について、つぎの6ケースの累加法を検討した。①すべての量を累加する。②ピークまでを累加する。③以前以上の値が見られたとき、ピークまでを累加する。④増加部分を累加する。⑤それぞれの山のピークまでを累加する。⑥それぞれの山にケース③を適用する。その中の主な3ケースを図-5の模式図に表す。土壌水分飽和度については、時間と共に直線的に増加するので臨界値以上を累加した。最適な累加法と最適な臨界値 S_c 、 Z_c の組合せを、後述の最尤法を基に選んだ。

4. 最尤法による回帰係数の推定

(a) 最尤法

メッシュ i における崩壊個数の実測値を N_i とすると、尤度の対数 $\ln L$ とその微係数は(4)、(5)式のようになり、この $\ln L$ を最大にする k_i の回帰係数を求めればよい。ところが通常利用できる計算ライブラリーは最小値を探索する改訂準ニュートン法であるため、ここでは尤度の逆数、すなわち(4)式に負符号($-\ln L$)を付けたものについて最小値を探索し、この時の回帰係数を採択した。改訂準ニュートン法では初期値の適切な設定が必要となる。そこで、最尤法の初期値として数量化第I類により求めた k_i

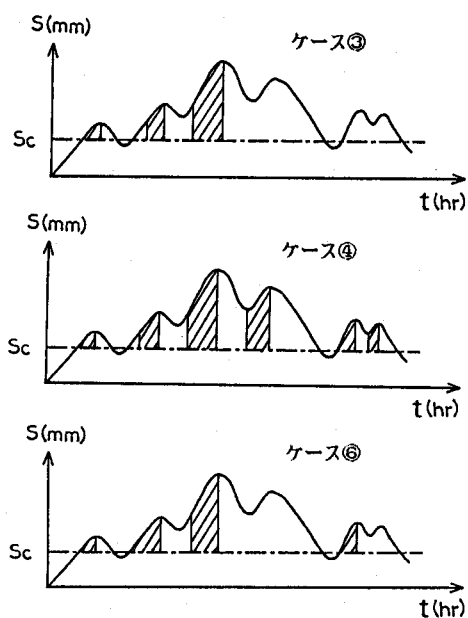


図-5 表面流出貯留高の模式図

の回帰係数を用いる。ここでの数量化第Ⅰ類の目的変数 k_i は、本来、崩壊個数の平均から求めなければならないが、それが未知であるため、隣接する4つのメッシュの平均崩壊個数 μ_{4i} より k_i を求めている。この時の地形特性は、それぞれの平均と標準偏差により、表面流出高については $S_c=0$ 、土壌水分飽和度については $X_c=70$ での年間データの平均と標準偏差により、それぞれ基準化を行っている。

つぎに具体的な計算手順を説明する。期間①のような数年にわたる複数の降雨にも、期間②のような短期間の豪雨にも、対応できる累加法と臨界値の組合せ及び回帰係数を求めるために①、②両期間について、それぞれ尤度を求め、これらの積を最大 ($-\ln L$ を最小) とするようにした。累加法その他の求めた方を以下に示す。まず表面流出貯留高の臨界値 S_c については $0\sim 90\text{mm}$ の間を 10mm 単位で変化させ、土壌水分飽和度の臨界値 Z_c については 70 (圃場揚水量に対する土壌水分飽和度) $\sim 85\%$ の間を 5% 単位で変化させて、 $-\ln L$ の最小値の大まかな位置を探した。ここで各ケースの $-\ln L$ を比較し、その最小値を示したケース④を最適な累加法として採用した。この時の各ケースの S_c 、 Z_c 及び $-\ln L$ の最小値を表-2に示す。つぎにケース④について S_c 、 Z_c 共に 2.5mm 、 2.5% 単位で変化させ、更に詳しい位置を探した。その結果、表面流出貯留高の臨界値 S_c は 57.5mm 、土壌水分高の臨界値 Z_c は 82.5% となった。表-3にはケース④での探索状況を、表-4には最適な臨界値での回帰係数を示す。この表より明らかのように、崩壊に最も関連している変数は表面流出貯留高で、ついで伐採、標高となっている。なお、質的変数は、一方の回帰係数からもう一方の係数を計算することができるので、 χ_{12} と χ_{22} は最小化パラメータから除いている。

5. 崩壊発生確率、個数と面積の期待値と信頼区間

(a) 場所的な期待値の累加と信頼限界

最適な表面流出貯留高の累加法ケース④と最適な臨界値 ($S_c=57.5\text{mm}$ 、 $X_c=82.5\%$)の組合せに対して得られた回帰係数より k_i を求め、これを (2)式に代入すれば1メッシュ当りの崩壊個数の期待値が得られる。図-6、図-7は期間①、期間②それぞれについて、崩壊発生個数の実測値のメッシュ累加個数と期待値の累加個数の関係(実線)を表したものである。この図において縦軸、横軸は、それぞれ実測値の累加量 $\sum X_i$ 、期待値の累加量 $E(\sum X_i)$ を実測値の総崩壊個数 $\sum X$ で除し、無次元化した値を示している。また破線は負の二項分布としての95%信頼区間を表してい

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^N \left[\frac{\Gamma(N_i + k_i)}{\Gamma(k_i) N_i!} p^{k_i} q^{N_i} \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial x_{(1a)}} = A k_i \delta_{i(1a)}, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial k} = A \frac{k_i}{k}, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_n} = A k_i z_{in} \quad (5)$$

$$A = \sum_{i=1}^N \left[\ln p + \sum_{j=1}^{N_i} \frac{1}{(j-1+k_i)} \right]$$

表-2 各ケースの S_c 、 X_c 、 $-\ln L$

ケース	S_c (mm)	X_c (%)	$-\ln L$
①	40.0	80.0	810.05
②	10.0	85.0	852.30
③	80.0	80.0	883.59
④	50.0	85.0	808.88
⑤	60.0	85.0	883.46
⑥	80.0	80.0	862.73

表-3 ケース④での探索状況

	X_c (%)				
	77.5	80.0	82.5	85.0	87.5
52.5	881.46	808.50	808.49	808.79	820.34
S_c 55.0	882.30	807.98	807.96	814.34	825.51
(mm) 57.5	882.59	808.48	807.60	816.74	829.43
60.0	885.23	809.07	810.62	822.33	833.72

表-4 回帰係数

	回帰係数
χ_{11}	0.0184067
χ_{21}	-0.1855905
β_1	-0.0557921
β_2	-0.0230636
β_3	0.0075080
β_4	-0.1711531
β_5	0.0419257
β_6	2.0110130
\bar{k}	2.2814620

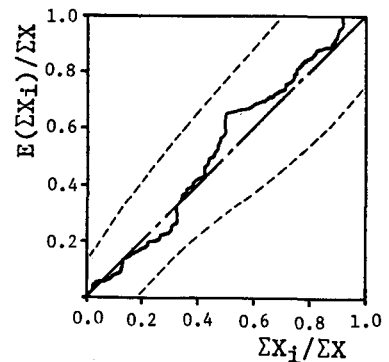


図-6 累加崩壊個数の実測値と期待値(S46~S50)

る。図より実測値と期待値の総崩壊個数は期間①について 222 個と 231 個のように良く合っており、期間②についても、219 個と 240 個となり、合っていると見える。メッシュ累加個数についても期間①では実測値と良く一致しているが、期間②では前半部分で信頼限界を越えている。この原因として前半部分のメッシュがある地域では雨量観測所がなく、スプライン関数による雨量の補間精度が悪いのではないかとと思われる。

つぎに、一崩壊当りの崩壊面積の平均 μ_z 、分散 σ_z^2 、歪係数 C_z 及び累加崩壊個数の期待値 $E(\sum X_i)$ 、分散 $V(\sum X_i)$ 、歪係数 $C(\sum X_i)$ より (6), (7), (8) 式に示す累加崩壊面積の期待値、分散、歪係数を求めることができる。図-8, 9 の実線は ①, ② の期間における累加崩壊面積の期待値 $E(Z)$ と実測値の関係を表し、破線はガンマ分布としての 95% 信頼区間を表している。

$$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \mu_z \quad (6)$$

$$V(Z) = V\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \mu_z^2 + E\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \sigma_z^2 \quad (7)$$

$$C(Z) = \left\{ C\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \mu_z^3 V\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) + 3V\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \mu_z \sigma_z^2 + E\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) C_z \sigma_z^3 \right\} / V(Z)^{3/2} \quad (8)$$

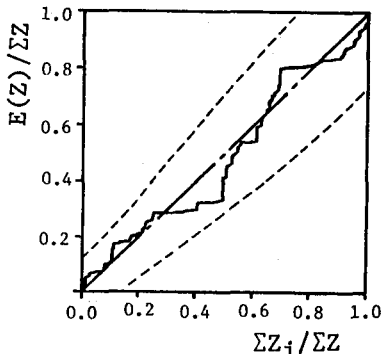


図-8 累加崩壊面積の実測値と期待値(S46~S50)

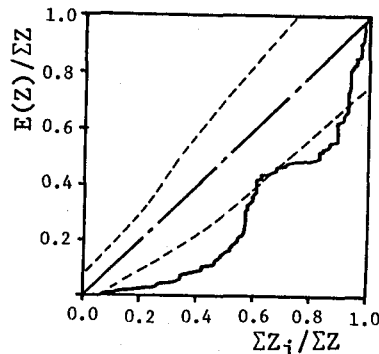


図-9 累加崩壊面積の実測値と期待値(S51)

期間①については期待値と実測値の関係がどの部分についても信頼区間の中に分が入っているが、期間②については崩壊個数の期待値の推定精度が悪いため、かなりの部分で信頼区間に入っていない。

(c) 時間的な期待値と信頼限界

前述したように②の期間は約一週間にわたる降雨が起こった期間である。②の期間の資料だけで求めた回帰係数を使って、降雨の降り始めより、崩壊発生確率、個数と面積と信頼限界を時々刻々算出していく。

ある時刻 t までの誘因の数値を使って m 個

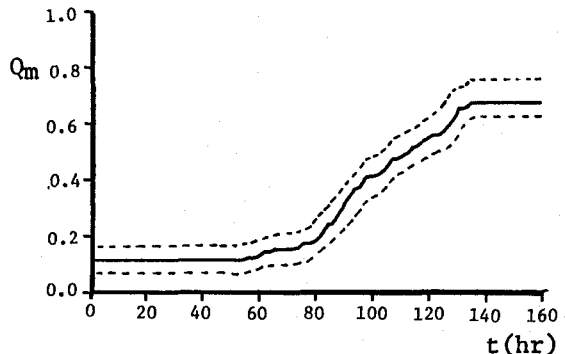


図-10 崩壊発生確率の時間変化

のメッシュの広さを持つ地域での k_i の和を $K(t, m)$ と表すと、時間的な崩壊発生確率 Q_m は (9) 式で与えられる。

$$Q_m = 1 - p^{K(t, m)} \quad (9)$$

図-10 はメッシュ 4個の広さを持つ地域の崩壊発生確率 Q_4 が、降雨発生から時間 t がたつにつれてどのように変化するかを表している。図中の実線が崩壊発生確率、破線はベーター分布としての95%信頼区間を表している。

図-11, 12 はメッシュ 300個の広さを持つ地域での崩壊個数 $E(\sum X)$ 、崩壊面積の累加量 $E(Z)$ の時間変化を表している。

なお負の二項分布のパラメータ k, p の推定値の偏りはメッシュ数 n が小さいほど大きく、それらの分散、共分散は無視できない。また、それらの偏り、分散、共分散を推定するには数表⁽⁴⁾⁽⁵⁾が必要である。発生確率、個数、面積の信頼区間の設定にこの数表を用いた。

6. あとがき

負の二項分布は、ばらつきが多い崩壊個

数の分布によく当てはまり、累加崩壊個数も p = 一定のもとで k の和をパラメータとする負の二項分布で表される。すなわち、時間的にも空間的にも、崩壊個数の和は負の二項分布に従う。パラメータ k については、指数型回帰モデルが適切であり、その回帰係数は最尤法により求められる。数量化第一類では2期間以上の資料に共通する回帰係数を求めるが困難であったが、最尤法はそれぞれの期間の資料により別々に尤度を求め、その積を評価することにより回帰係数を求めることができる。①、②の期間では有効成分の累加方法としてはケース④の方法が最適であり、 S_c, X_c の値は57.5mm, 82.5%となった。崩壊の期待値と信頼限界を得ることにより、砂防計画は勿論のこと豪雨時の崩壊危険性の予報、警報の基幹モデルとして利用できる。最後に、本研究を行うにあたり武田 理氏（建設技術研究所）、村上純孝氏（徳島大学学生）の協力を得た。ここに記して謝意を表す。

- 1) 竹内 啓・藤野和建：二項分布とポアソン分布、東京大学出版、1981
- 2) 端野道夫・武田 理・田平健二：豪雨型山腹崩壊に関する発生個数の確率分布特性、第39回土木学中国 四国支部研究発表会概要集、1987
- 3) 佐々木章公・端野道夫・藤原啓司：豪雨型山腹崩壊の発生個数に関する確率論的研究、第44回土木学会 年次学術講演会講演概要集II、1989
- 4) Bowman, K.O. and Shenton, L.R.: Asymptotic covariance for the maximum likelihood estimators of the parameters of a negative binomial distribution, Report No.K-1643, Union Carbide Corporation, Oak Ridge, Tennessee, 1965.
- 5) Bowman, K.O. and Shenton, L.R.: Biases of estimators for the negative binomial distribution, Report No.ORNL-4005, Union Carbide Corporation, Oak Ridge, Tennessee, 1966.

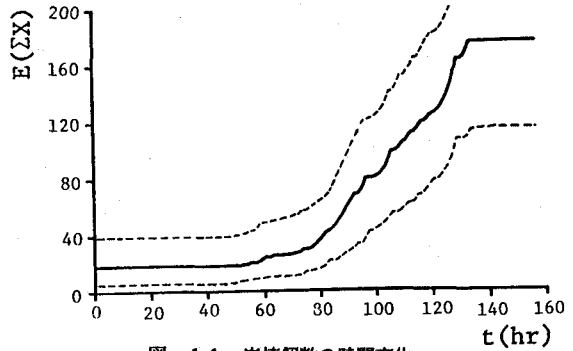


図-11 崩壊個数の時間変化

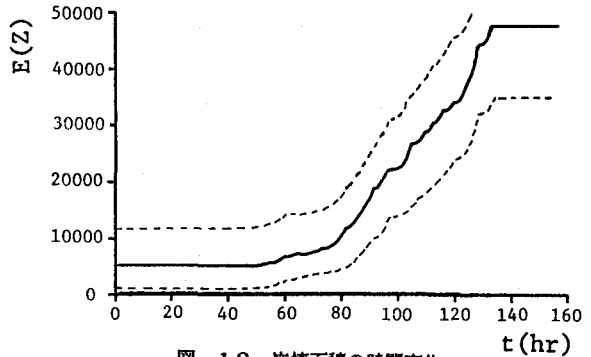


図-12 崩壊面積の時間変化