

連続湾曲部における三次元流計算

Calculation of three dimensional open channel flow in continuous bends

鳥取大学工学部 檜 谷 治 Osamu HINOKIDANI

鳥取大学工学部 道上正規 Masanori MICHIE

鳥取大学大学院 山根正樹 Masaki YAMANE

The three dimensional open channel flow in the continuous bends is calculated by means of a numerical method of the differential scheme for the horizontal plane, the finite differential scheme for the vertical direction and the fractional step scheme in the time.

The calculated results are in good agreement with experimental results for the vertical distribution of both main flow and secondary flow over whole region of the bend channel.

It is found that the error occurs on the calculated bottom shear stress when we divide the vertical direction using the same elements. The better dividing method for vertical direction is proposed.

Keywords : three dimensional numerical method, continuous bends, secondary flow

1. はじめに

河川を直線水路とみなし、流下方向のみの河床変動を計算する1次元河床変動計算に関しては、従来より盛んに行なわれており、山地河川における混合砂河床を除けば、ほぼ実際の河床変動を予測することが可能になっている。しかしながら、実河川では流路の湾曲部・蛇行部など、流況が3次元で複雑な場合があり、このような領域では河床は横断方向に変動する。従来では、このような領域では模型実験あるいは流況を数値解析によって予測し、平面二次元の河床変動を計算することによって検討されてきていたが、計算によって河床変動を検討する場合、流況の予測精度が問題になる。従来は流況の計算は、計算の簡単のために平面二次元の浅水流解析法で行い、精度を上げるための研究が成されてきたが[1]～[3]、現在では流況を三次元で計算する手法が種々提案されている[4]～[6]。

本研究では、著者らが従来湖での吹送流の数値解析に用いた準三次元計算法[7]を開水路流に適用できるように修正し[8]、その計算法を連続湾曲水路の流れに適用して準3次元数値解析を行ない、従来の玉井ら[9]によって行なわれた実験結果との比較検討を行なう。また、計算に用いる鉛直方向のメッシュの分割方法の問題点を指摘し、最適な分割方法の検討も行なっている。

2. 基礎方程式および数値計算法

基礎方程式は、鉛直方向の運動方程式に関して静水圧分布を仮定した非定常準3次元の式で、水平方向には差分法を、鉛直方向には有限要素法を、時間的には Fractional Step Finite Difference Method を用いて基礎式を離散化し、流況を3次元的に解く方法である。

(1) 基礎方程式及びその定式化

流れの非定常三次元解析に用いる基礎方程式は、次のような形で表される。

運動方程式 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) - A_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) - A_h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

連続式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

ここに、 u 、 v および w はそれぞれ、流速の x 方向、 y 方向及び z 方向成分、 ξ は水位変動量、 ρ は水の密度、 A_v は鉛直渦動粘性係数、 A_h は水平渦動粘性係数である（図-1参照）。なお、鉛直方向には静水圧分布を仮定している。

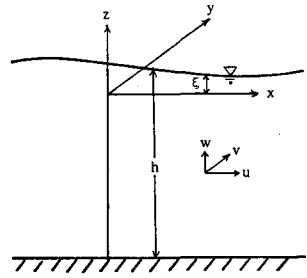


図-1 記号図

a) 時間積分法：本研究では、基礎方程式を時間的に解く方法として Fractional Step Finite Difference Method を用いる。

まず、式(1)を次のように表す。

$$\text{Step 1: } \frac{\partial u^n}{\partial t} = L_1(u^n) + \alpha_1 \quad (4) \quad \text{Step 2: } \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} = L_2(u^{n+1}) \quad (5)$$

ここに、 n は時間stepを表す数字であり、

$$L_1 = -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (6) \quad L_2 = A_h \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

$$\alpha_1 = -g \frac{\partial \xi^{n+1/2}}{\partial x} \quad (8)$$

である。

つぎに、式(4)及び式(5)の左辺に関して仮想流速 u^d を用いて差分化を行うと、それぞれ次式のように表すことができる。

$$\text{Step 1: } \frac{\partial u^n}{\partial t} = \frac{(u^d - u^n)}{\Delta t} \quad (9) \quad \text{Step 2: } \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} = \frac{(u^{n+1} - u^d)}{\Delta t} \quad (10)$$

解析の手順としては、まず Step 1において u^n が既知とし、式(4)及び式(9)を用いて仮想流速 u^d について解き、つぎに、Step 2において式(5)及び式(10)を用いて u^{n+1} について解く。以上、式(4)以降では流速 u に関してのみ説明したが、式(2)の v に関しても同様な手順で求めることができる。

b) 有限要素法による定式化：つぎに、式(6)から式(10)に対して有限要素法を用いて鉛直方向の離散化を行う。

図-2(b)は鉛直方向の有限要素分割例を示しているが、各水深 H に対して次式を満足するような形で分割を行う。

$$l_{i,k}/H_i = l_{i+1,k}/H_{i+1} \quad (11)$$

ここに、図の i は水平メッシュに対する添字、 k は鉛直方向に対する添字を示している。つぎに、節点 k と $k+1$ の間の u 、 v 、 w 及び A_v について、線形の形状関数を用い表わすことができると仮定し、式(4)から式(10)にガラーキン有限要素法を適用する。その結果をマトリックス表示すると、以下ようになる。

$$[A] \cdot \{u\}^d = \{a\}^n \quad (12)$$

$$[C] \cdot \{u\}^{n+1} = \{c\}^d \quad (13)$$

$$[B] \cdot \{v\}^d = \{b\}^n \quad (14)$$

$$[D] \cdot \{v\}^{n+1} = \{d\}^d \quad (15)$$

ここに、 $[A]$ 及び $[B]$ は 2×2 のマトリックス、 $\{a\}$ から $\{d\}$ は2行のベクトルである。ここに、 $\alpha = k, k+1, \beta = k, k+1, \gamma = k, k+1$ であり、 γ は総和規約である。計算は以上の要素マトリックスを

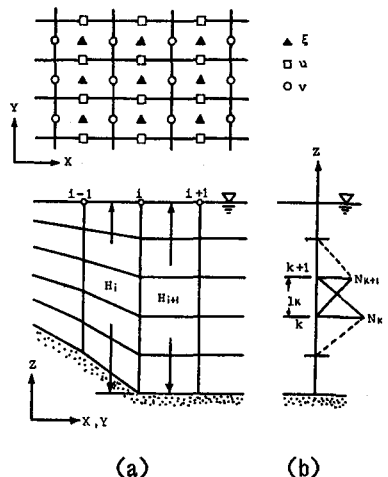


図-2 有限要素及び差分メッシュ

鉛直方向にたし合わせ、境界条件を適用した全体マトリックスを解くことになる。なお、式(12)から式(15)のマトリックスおよびベクトルの内容は省略する〔7〕参照。

c) 差分化 : 式(12)から式(15)の水平方向の離散化に対しては基本的に中央差分法を用いるが、式中の慣性項に対しては、解の安定性を考慮して以下のような風上差分法を用いた。たとえば、

$u(\partial u / \partial x)$ に対して、

$$\overline{u_{i,j}} > 0 ; u_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (16) \quad \overline{u_{i,j}} < 0 ; u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (17)$$

$v(\partial u / \partial y)$ に対して、

$$\overline{v_{i,j}} > 0 ; v_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (18) \quad \overline{v_{i,j}} < 0 ; v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} \quad (19)$$

とする。ここで、 $\overline{v_{i,j}}$ は $u_{i,j}$ の位置の平均値を、式(16)から式(19)における $\overline{\quad}$ は、節点 k 及び $k+1$ の流速の平均値をそれぞれ意味している。

また、水位変動量 $\xi^{n+1/2}$ および鉛直流速 w^{n+1} に関しては、連続式より以下に示す差分式によって求める。

$$\xi_{i,j}^{n+1/2} = \xi_{i,j}^{n-1/2} - \{ (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) / \Delta x + (v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n) / \Delta y \} \cdot \Delta t \quad (20)$$

$$w_{i,j,k+1}^{n+1} = w_{i,j,k}^{n+1} - \int_{l_k} \{ (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) / \Delta x + (v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}) / \Delta y \} dz \quad (21)$$

ここに、 u_m および v_m は鉛直方向の平均流速である。

(2) 境界条件および諸係数

式(1)～式(3)に示した基礎方程式は何らかの境界条件によって解かれるが、本研究では以下のような境界条件とする。

a) 水面での境界条件 : 水面に作用するせん断応力がないと仮定し、次式で与える。

$$Av \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\xi} = 0, \quad Av \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\xi} = 0 \quad (22)$$

b) 河床での境界条件 : 河床での境界条件はNon-slip条件とする。すなわち、

$$u = v = w = 0 \quad (23)$$

c) 河岸での境界条件 : 河岸での境界条件は流速を0とするが、風上差分を移流項差分に適用しているので、運動量の保存を考慮して、河岸で流速勾配の値を用いる場合はその値を0としている。たとえば、

$$u_{i,j} < 0 \text{ and } u_{i+1,j} = 0 \text{ (river bank)} ; \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} = 0 \quad (24) \quad \text{とする。}$$

d) 上下流端境界条件 : 上流端では実験の流速分布を流速分布与え、下流端で実験水位を与えた。

e) 鉛直・水平渦動粘性係数 : 鉛直・水平渦動粘性係数は次式で与えた。

$$Av = \kappa \cdot u_* \cdot h \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \quad (25) \quad Ah = \kappa \cdot u_* \cdot h / 6 \quad (26)$$

ここに、 κ はカルマン定数($\kappa=0.4$)、 u_* は摩擦速度である。

(3) 水平・鉛直方向のメッシュ分割法

a) 水平メッシュ : 水平方向のメッシュは、長方形メッシュ(図-2(a)参照)であるが、計算時間の制約もあって計算領域を細かく分割することができない。しかしながら、計算の対象とした実験条件〔9〕が比較的曲率半径が小さいために、側壁のメッシュの角に起因する若干の剝離流により側壁付近の流況の再現が十分にできない。そこで、本研究では、曲線部の側壁でのみ三角形メッシュを用い側壁部での流況の改善を行なった。

b) 鉛直メッシュ : 鉛直方向のメッシュは式(11)に従って分割されるが、河床の境界条件が Non-

slip条件であるために、等分割では次式に示す本研究で用いた河床のせん断力 τ_0 の差分式に差分誤差が生じる。

$$\tau_0 = \rho \cdot (\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k) / 2 \cdot (u_{k+1} - u_k) / l_k \quad (27)$$

ここに、 $k=1$ （河床）、 $u_1=0$ である。

そこで、本研究では、10等分割を基本とするが、河床から一番目のメッシュを河床のせん断応力が正しく評価できるように細分割した。分割方法は、まず水理条件から対数分布則を想定して求めた流速分布と式(25)の鉛直渦動粘性係数から河床のせん断応力が一致する高さ z_1 を求め、つぎに等分割の第一メッシュの残りの部分は徐々に大きくなるように数分割する。 z_1 は水理条件によって若干変化するが約7倍の z_0 （対数則の $u=0$ の高さ）程度をとればよいことが認められた。

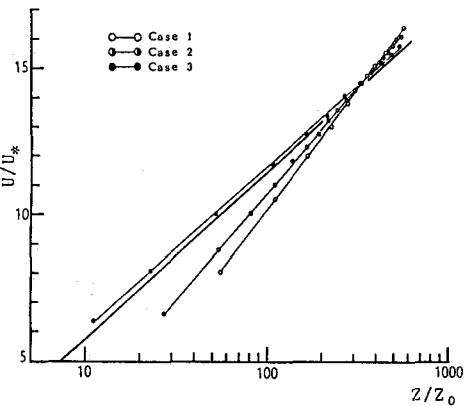


図-3 等流状態での鉛直流速分布の比較

図-3は等流条件（ $q=0.0066\text{m}^2/\text{s}$ 、 $h_0=0.0293\text{m}$ 、 $n=0.013$ 、 $u_*=0.0169\text{m/s}$ 、 $z_0=0.54 \times 10^{-4}\text{m}$ ）を再現したもので、10等分したもの（Case-1）、20等分したもの（Case-2）、細分割（13分割）（Case-3）の比較を行なったものであり、図中の厚実線が理論値である。細分割した場合はほぼ理論値に従っているが、等分割した場合は流速分布が異なり、計算での河床せん断応力が大きく評価されていることがわかる。これは等分割した場合の Δz が z_1 よりも大きいからであり、逆の場合は河床のせん断力が過小に評価される。

3. 計算結果

(1) 計算条件

計算条件は、玉井らがおこなった連続湾曲水路の実験条件とし、計算の都合上2つの連続した湾曲部のみを計算領域とした。実験条件は表-1に示す通りであり、図-4（b）に計算メッシュの水平分割を一湾曲部分のみ示す。計算の初期条件は水位変動及び流速なしの状態とし、上流端から流量を、下流端では水位低下を徐々に発生させ、定常状態になるまで計算を行なった。

(2) 計算結果および考察

図-5は主流と二次流の鉛直流速分布に対して計算結果と実験結果を比較したものであり（断面は図-4（a）参照）、計算結果は2つの湾曲部の内の下流側の湾曲部の結果である。図中主流に対しては右向きが流下方向に正である。また、水面に関しては実線が実験結果、破線が計算結果である。

まず、主流部の流速分布についてみると、玉井らが指摘した最大流速の位置が水深中央あるいは河床付近

表-1 実験条件（玉井らの実験）

水路中心軸の曲率半径	0.60 m
湾曲部の中心角	90°
湾曲部の直線流路長	0.30 m
水路幅	0.30 m
水深	2.93 cm
水路勾配	1/1000

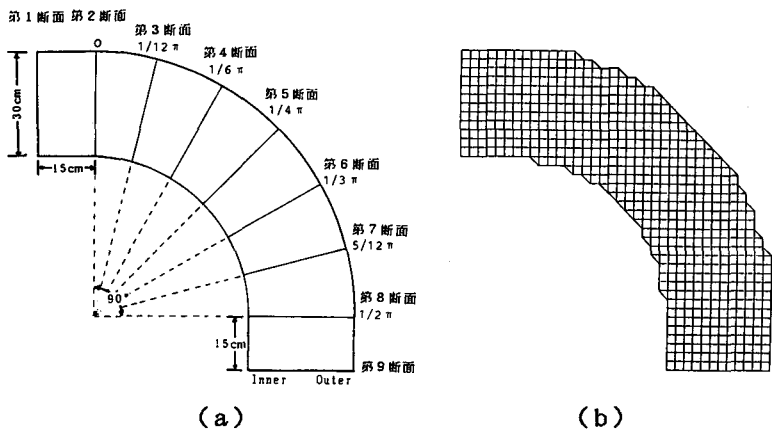
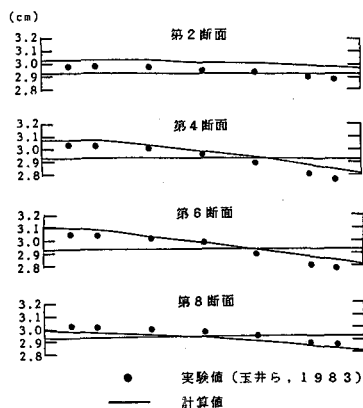


図-4 湾曲部の断面の名称及び計算メッシュ

に生じる現象は計算結果でもうまく再現できており、湾曲部の入口付近の外岸側および出口の内岸側で流速の最大値が水面以下で生じていることがわかる。また、流速の絶対値については、ほぼ実験値と一致しているが、湾曲部中央の内岸側で若干計算値が小さくなっている。この原因は内岸側のメッシュの凸凹のために剝離が生じ安くなっているためだと思われる。図-6は各断面における水深の横断分布を比較したものであり、全体的に実験値とよく一致しているが、上述した剝離の影響で第2から第6断面にかけて内岸側の水位が若干上昇していることがわかる。なお、本研究では、このメッシュに起因する影響を抑えるために側岸メッシュで三角形メッシュを用いたが、完全にこの影響を取り去ることはできなかった。



つぎに、二次流に関してみると、まず全体的に湾曲部下流の二次流が大きくなっているが、これは計算領域が2湾曲のみであったために、下流端の影響が生じているものと推定される。流速分布については、湾曲部入口では前湾曲の影響である水面で内岸向き、底面で外岸向きの流速分布がよく再現できており、その流速分布が徐々に底面付近から逆方向に遷移している様子も実験値の傾向をよく再現できているものと思われる。

4. おわりに

本研究では、準三次元流計算法により連続湾曲部の三次元的な流況を計算し、従来行なわれた実験結果との比較検討を行なった。その結果、主流方向の流速分布、横断方向の流速分布（二次流の流速分布）とともに若干相違点はあるものの湾曲部全体での3次元流況はよく再現できた。したがって、本研究結果を用いて湾曲部の河床変動を十分予測することが可能であることが認められた。

また、本研究のように河床の境界条件として流速を与える場合、鉛直方向を等分割した場合底面のせん断応力を正しく評価できない恐れがあるが、第1メッシュの高さを水理条件によって変化させられることによって比較的少ない分割で精度を上げることができると認められた。

参考文献

- [1] 玉井・池内：わん曲部における水深平均水理量の遷移特性に関する解析、第37回年次講演会概要集、1982。
- [2] 長谷川：沖積蛇行の平面および河床形と流れに関する水理学的研究、学位論文、1984。
- [3] 清水・板倉・山口：2次元モデルを用いた河床形態変化のシミュレーション、第31回水理講演会論文集、1987。
- [4] 鈴木・石川・田中：開水路の準三次元計算法に関する基礎的研究、第41回年次講演会概要集、1986。
- [5] 富所・荒木・吉田：開水路の流れの三次元数値解析法、第29回水理講演会論文集、1985。
- [6] 清水・板倉：簡易な三次元モデルによる蛇行流と河床変動の数値計算、第43回、年次講演会概要集、1988。
- [7] 道上・檜谷：鉛直渦動粘性係数および湖のスケールの吹送流に及ぼす影響、土木学会論文報告集、第405号、1989。
- [8] 檜谷・道上：不透水制周辺の準三次元流計算、第44回年次講演会論文集、1989。
- [9] 玉井・池内・山崎：連続わん曲水路における流れの実験的研究、土木学会論文報告集、第331号、1983。