

ゲート急開直後の流れ先端部の水面形

Surface Profile of a Flow Immediately after Opening a Gate Rapidly

秋田大学鉱山学部 松 富 英 夫 Hideo MATSUTOMI

An analytical procedure is developed for predicting the surface profile and momentum distribution of a flow immediately after opening a gate rapidly. The basic equations are derived from the nonlinear shallow water theory, and they are solved numerically. The comparison of the theoretical and experimental results shows that the present theory well estimates the surface profile of the front part of flow.

Keywords : dam-break flow, unsteady flow, surface profile, numerical analysis

1. まえがき

下流側水深がない場合のゲート急開直後の流れ先端の挙動に関する理論的研究例として、志村のものがある¹⁾。彼の研究は、先端移動速度が零から次第に大きくなるという、より実際に即したものである。

最近、著者は、まだ研究例のなかった下流側水深がある場合のゲート急開直後の流れ先端の挙動を議論すべく、志村理論の拡張を試みた²⁾。その際に誘導した基礎方程式は、志村の基礎方程式を包含するもので、下流側水深の有無にかかわらず、同一段階の水面形や運動量分布の時間的变化等の議論にも使用できるものである。これ等の知見はゲートの操作法ばかりでなく、急変不定流の構造解明、それによる波力の評価や洪水氾濫計算での初期値の与え方³⁾等にも資すると思われる。

そこで、本研究は、前報²⁾において基礎方程式を解く際になされた仮定（2階以上の高階微分項は省略できるとしたこと）の妥当性を示すと共に、対象流れの水面形を議論する等、基礎方程式の適用の拡張を試みるものである。水面形に関しては実験も行う。水面形でさえ、利用できる過去の実験値は非常に少ない。

2. 基礎方程式

初期のゲート上・下流は静水で、その水深比（ $=h_1/h_0$ ）は、最終的に容易に移動跳水が発生する程⁴⁾、十分に大きいとする（本研究では、その極限である $h_0=0$ の場合も議論する）。また、水の粘性は考えず、流れは浅水理論に支配されるとする。この時、任意水深 h 点（ $dh/dt=0$ ）の挙動に関する基礎方程式として、次式群を得る。

$$\frac{dx}{dt} = u - \frac{h}{\alpha} \beta \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{du}{dt} = g\alpha - \frac{h}{\alpha} \beta^2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\beta^2 + g\alpha_x - \frac{h}{\alpha} \beta \beta_x \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{d\beta_x}{dt} = -3\beta \beta_x + g\alpha_{xx} - \frac{h}{\alpha} \beta \beta_{xx} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{d\alpha_{xx}}{dt} = -6\alpha_x \beta_x - 4\beta \alpha_{xx} - 4\alpha \beta_{xx} - \frac{h}{\alpha} \beta \alpha_{xxx} + h \beta_{xxx} \quad \dots\dots\dots(7)$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

ここで、 u ：断面平均流速、 α （ $=-\partial h/\partial x$ ）：水面勾配、 β （ $=\partial u/\partial x$ ）：速度勾配、 g ：重力加速

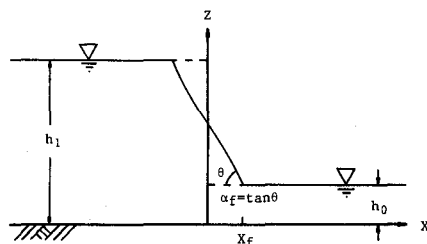


図-1 座標と記号の定義

度、 x ：水平距離座標、 t ：時間。また、下添字 x は x の偏微分を示す。諸記号の定義を図-1に示す。

式(1)は連続式で、対象水深点の位置を規定するものである。式(2)は運動方程式で、右辺第1項は圧力項、第2項は移流項である。式(3)以下は各高階微分項の満足すべき式である(完結問題)。上式群において、 $h=h_0 \neq 0$ とすれば、下流側水深がある場合の流れ先端を、 $h=h_0=0$ とすれば、下流側水深がない場合の流れ先端を対象としていることになる。

本問題は完結問題である($h_0=0$ の場合を除く⁶⁾)。完結問題において、たとえば、式(7)までで問題を閉じさせようとする時は(以下、式7本使用等と呼ぶ)、暗に次式を仮定していると解釈して良い。

$$\beta_{xx} \approx 0, \alpha_{xxx} \approx 0, \beta_{xxx} \approx 0, \dots \dots \dots (8)$$

よって、式(1)~(7)は各々次式となる。

$$\frac{dx}{dt} = u - \frac{h}{\alpha} \beta \dots \dots \dots (9)$$

$$\frac{du}{dt} = g\alpha - \frac{h}{\alpha} \beta^2 \dots \dots \dots (10)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -2\alpha\beta - \frac{h}{\alpha} \beta \alpha_x + h\beta_x \dots \dots \dots (11)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\beta^2 + g\alpha_x - \frac{h}{\alpha} \beta \beta_x \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{d\alpha_x}{dt} = -3\beta\alpha_x - 3\alpha\beta_x - \frac{h}{\alpha} \beta \alpha_{xx} \dots \dots \dots (13)$$

$$\frac{d\beta_x}{dt} = -3\beta\beta_x + g\alpha_{xx} \dots \dots \dots (14)$$

$$\frac{d\alpha_{xx}}{dt} = -6\alpha_x\beta_x - 4\beta\alpha_{xx} \dots \dots \dots (15)$$

式(15)を x で偏微分してみる。本研究では、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + 2\beta \frac{\partial}{\partial x} - \frac{h}{\alpha} \beta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{h}{\alpha^2} \beta \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} \dots \dots \dots (16)$$

の微分演算子の関係があるので、左辺は、式(8)を考慮すると、零となることが判断される。右辺では、式(8)を考慮すると1項のみ残り、最終的に次式の関係を得る。

$$\alpha_{xx}\beta_x \approx 0 \dots \dots \dots (17)$$

この段階では、まだ明確に次式を判断できない。

$$\alpha_{xx} \approx 0, \beta_x \approx 0 \dots \dots \dots (18)$$

そこで、式(14)を x で偏微分してみる。上と同じ議論を進めると、次式を得る。

$$\beta_x \approx 0 \dots \dots \dots (19)$$

式(19)の関係を式(14)に用いると、次式を得る。

$$\alpha_{xx} \approx 0 \dots \dots \dots (20)$$

式(6)までで問題を閉じさせようとする時も、同じ結果を得る。式(14)を x で偏微分し、上と同じ議論をすればよいのである。式9本を用いる場合まで、同様の検討を行ってみた。結果は上と全く同じであった。式(4)以前からは、何れからも、有意な情報が得られないことも確認した。

以上の検討より、初期条件として志村のように $u \approx 0, \beta \approx 0, \beta_x \approx 0, \dots$ を用い¹⁾、高階微分項を途中で切捨てて問題を閉じさせようとする限り、対象問題での最終的に解けばよい式は次式群と言える。

$$\frac{dx}{dt} = u - \frac{h}{\alpha} \beta \dots \dots \dots (21)$$

$$\frac{du}{dt} = g\alpha - \frac{h}{\alpha} \beta^2 \dots \dots \dots (22)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -2\alpha\beta - \frac{h}{\alpha} \beta \alpha_x \dots \dots \dots (23)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\beta^2 + g\alpha_x \dots \dots \dots (24)$$

$$\frac{d\alpha_x}{dt} = -3\beta\alpha_x \dots \dots \dots (25)$$

上式群は前報²⁾で解いた基礎方程式と全く同じである。前報での仮定(2階以上の高階微分項は省略できるとしたこと)が、第1近似的には、妥当であったと言えよう。しかし、本解析では、下流側水深がある場

合の流れ先端の最大流速の評価に際し、Stoker理論⁶⁾を使用することになり、そのためには移動跳水を形成させる必要があり、“ (h_1/h_0) が十分に大きい”という仮定はまだ必要である²⁾。

3. 初期水面の勾配と曲率

初期水面の勾配と曲率を各々 α_1 、 $\Delta\alpha_1$ と記号する。下流側水深がない場合の流れ先端では、 α_1 と $\Delta\alpha_1$ の関係は解析的に定まる¹⁾。しかし、下流側水深がある場合は勿論、ない場合でも先端背後では、その関係は定まらない。水面形等を議論するには、先端ばかりでなく、背後の任意水深点でのそれ等の値も知る必要がある。以下、先端でのみ前もってそれ等の値が与えられるとして（これは経験的によらざるを得ない）、その近似的求め方を示す。

初期 ($t \approx 0$) を考える。前章で示したように、流れ先端に限らず、常に次式が成立している。

$$\alpha_{xx} \approx 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

上式を x で一度積分すると、

$$\alpha_x = \Delta\alpha \approx \text{const.} = c_1 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$\Delta\alpha$ は場所 (水深) によらないことが判断される。初期の流れ先端 ($x = x_f \approx 0$) での水理量に下添字 f を付すことにすると、 c_1 は $\Delta\alpha_{1f}$ となる。もう一度積分すると、

$$\alpha \approx \Delta\alpha_{1f} x + c_2 \quad \dots\dots\dots (27)$$

$x = x_f \approx 0$ で、 $\alpha \approx \alpha_{1f}$ なので、

$$\alpha \approx \Delta\alpha_{1f} x + \alpha_{1f} \quad \dots\dots\dots (28)$$

さらに、もう一度積分し、 $x = x_f \approx 0$ で、 $h_f = h_0$ の条件を用いると、

$$h \approx -\frac{\Delta\alpha_{1f}}{2} x^2 - \alpha_{1f} x + h_0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

以上より、 x をパラメータとして、先端背後の任意水深 h 点での α_1 と $\Delta\alpha_1$ が求まることになる。断るまでもなく、任意水深 h 点の初期の位置は $x \approx 0$ として議論を進める。

以下、簡単に計算手順を示す。

- 1) 微小な任意の x (負) 値を与える。
- 2) 式(29)より、 $h(x)$ を求める。これが対象点の水深である。
- 3) 式(28)より、 $\alpha(x)$ を求める。これが新しい水深点での水面勾配である。
- 4) 式(26)から明らかなように、水面曲率 α_x は常に一定で、 $\Delta\alpha_{1f}$ を採用する。
- 5) x 値を適当に変化させ、2)~4) を繰り返す。

これで、水面形等を議論するのに必要な初期値 (全部で5つある) が、全て既知となったことになる。

4. 解の適用性

本近似の下では、任意水深点 ($h \neq 0$) に対しても、 β と α_x に関する基礎方程式は島田のものと同じであり、これ等の解析解が得られる⁵⁾。しかし、最も知りたい対象水深点の挙動やそこでの断面平均流速の解析解が得られないので、基礎方程式を数値的に解き (4次の Runge-Kutta法を使用)、議論を進めることにする。本理論の妥当性の検討のため、実験も行うことにする。

4. 1 実験

実験に使用した水路は高さ0.6m、幅0.2m、長さ1.4mの水平に設置された透明アクリル製水路である。側壁の片面には、経時的流れ先端位置や空間波形読み取りのため、5cm 間隔のメッシュが刻まれている。ゲートとして、手動の引き揚げ式のもの (アルミ板製で、厚さ 2mm) を用いた。水路下流端から0.7mのところに位置

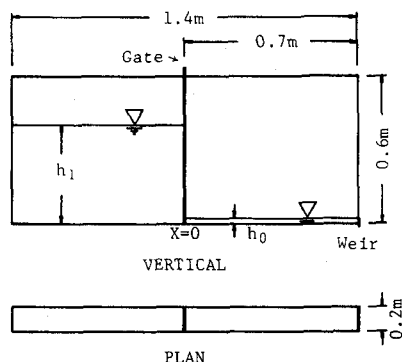


図-2 実験装置

している。ゲート下流側水深調節のため、水路下流端に堰も取り付け付けた。実験装置の概要を図-2に示す。

実験ケースは、 h_0 を0.02mに固定し、 h_1 を0.30、0.35、0.40mと変化させた、計3ケースである。ただし、各ケース10回ずつ実験を行った。これ等は前報²⁾での実験ケースと全く同じである(実験装置は異なる)。すでに、 α_{1f} と $\Delta\alpha_{1f}$ の値が評価されており、その妥当性をも検討したいがためである。

測定項目はビデオ・システムによる流れ先端部の空間・時間波形 $h(x, t)$ のみである。ただし、対象波形ができるだけ明確に読み取れるよう、水にアニリンブルーを加え、可能な限りの接写をした。とは言え、ビデオの解析精度から、時間に関して1/60秒(1コマ)程度の誤差はあり得る。

4. 2 下流側水深がない場合

下流側水深がない場合なので、式(29)において $h_0=0$ である。式(29)を変形すると、

$$h \approx -\frac{\Delta\alpha_{1f}}{2} \left(x + \frac{\alpha_{1f}}{\Delta\alpha_{1f}}\right)^2 + \frac{(\alpha_{1f})^2}{2\Delta\alpha_{1f}} \quad \dots\dots\dots(30)$$

志村によると、 α_{1f} と $\Delta\alpha_{1f}$ の間に次式の関係がある¹⁾。

$$\Delta\alpha_{1f} = \frac{\pi^2(\alpha_{1f})^2}{16 h_1} \quad \dots\dots\dots(31)$$

よって、前章理論に基づく水深の頂点 h_p は、式(30)と(31)から、

$$h_p = \frac{(\alpha_{1f})^2}{2\Delta\alpha_{1f}} = \frac{8}{\pi^2} h_1 \approx 0.811 h_1 < h_1 \quad \dots\dots\dots(32)$$

頂点は初期貯留水深 h_1 点まで達していない。この主な理由は α_{xx} 以下の高階微分項を無視していることによると思われる。本理論が近似理論であることが再認識される。当然、理論の適用範囲はそれほど高くない水深点までと思われる。

以下、本理論の適用性の検討のため、実験値との比較を行う。数値計算での時間刻み幅 Δt として、本節では0.01秒、次節では1/120秒を採用している。

図-3は水面形の比較例を示す。図中、実線は理論値、破線は実験値で、Dresslerのもの⁷⁾である。理論での α_{1f} の値($\Delta\alpha_{1f}$ の値は式(31)より算出)として、志村のもの¹⁾を採用している。この図によると、流れ先端部で両者は比較的良く一致している。しかし、時間の経過と共に、先端部背後で差が大きくなっている。これは主に、先程も述べたように、理論において α_{xx} 以下の高階微分項を無視していることによると思われる。

図-4は運動量分布 $P(x)$ の経時変化例(理論値のみ)を示す。図-3の水面形に対応させてある。ここで、運動量 $P(x)$ は $\rho h u$ で、 ρ は水の密度である。理論の適用範囲は、図-3の水面形への適用度より類推されたい。ただし、水面形への適用度が良いからと言って、運動量(または、流速)への適用度も良いとは必ずしも限らないことに注意を要しよう。

以上の比較・検討より、下流側水深がない場合の対象流れ先端部の水面形推定に、本理論が有効であると判断されよう。

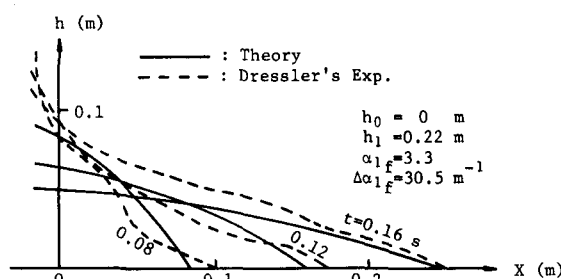


図-3 水面形の比較

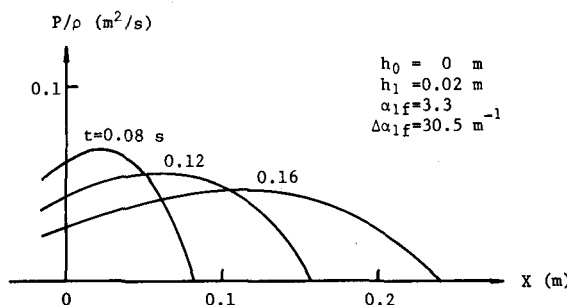


図-4 運動量分布

4.3 下流側水深がある場合

式(29)を変形すると、

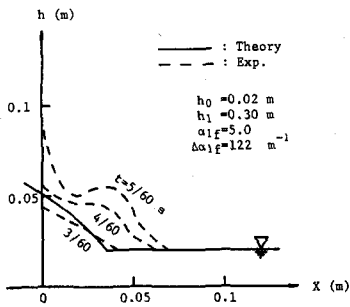
$$h = -\frac{\Delta\alpha_{1f}}{2} \left(x + \frac{\alpha_{1f}}{\Delta\alpha_{1f}}\right)^2 + \frac{(\alpha_{1f})^2}{2\Delta\alpha_{1f}} + h_0 \quad \dots\dots\dots(33)$$

よって、前章理論に基づく水深の頂点 h_p は、

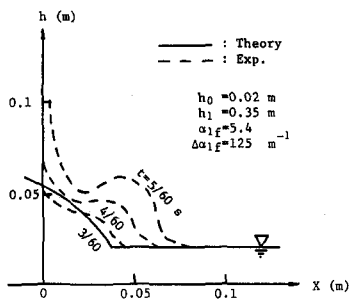
$$h_p = \frac{(\alpha_{1f})^2}{2\Delta\alpha_{1f}} + h_0 \quad \dots\dots\dots(34)$$

前報²⁾での α_{1f} と $\Delta\alpha_{1f}$ の値を用いて式(34)を計算すると、下流側水深がない場合と同じく、頂点は初期貯留水深 h_1 点まで達しないことが判断された。

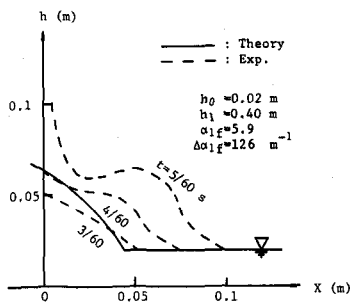
図-5(a)、(b)、(c)は水面形に関する本実験値(各ケース10回



(a) $h_1 = 0.30\text{m}$

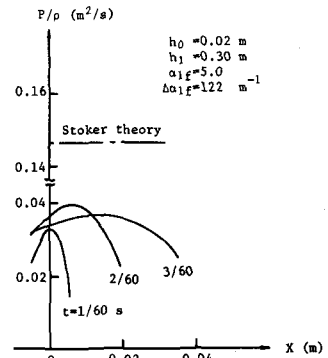


(b) $h_1 = 0.35\text{m}$

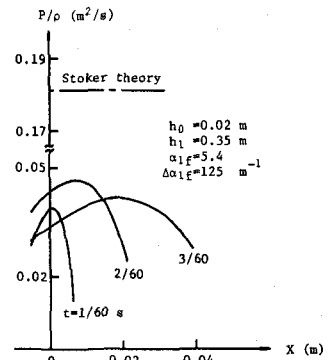


(c) $h_1 = 0.40\text{m}$

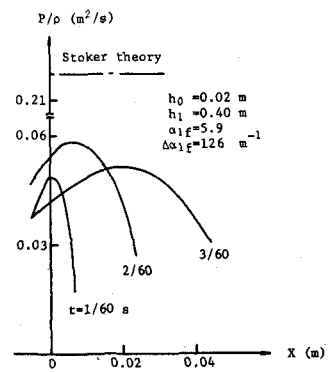
図-5 水面形の比較例



(a) $h_1 = 0.30\text{m}$



(b) $h_1 = 0.35\text{m}$



(c) $h_1 = 0.40\text{m}$

図-6 運動量分布

行った中の代表的なもの)との比較例を示す。 $t=3/60$ 秒の時のみである。それ以前ではあまり明確な実験値が得られなかったこと、以後では理論の適用範囲外²⁾となることによる。諸記号の意味は図-3と同じである。理論での α_{1r} 、 $\Delta\alpha_{1r}$ の値として、前報のもの²⁾を採用している。これ等の図によると、流れ先端部で両者は比較的良く一致している。下流側水深がある場合にも、本理論が有効であると判断されよう。ただし、下流側水深がない場合に比べても、時間・空間的な適用範囲は狭い。また、前報での α_{1r} と $\Delta\alpha_{1r}$ の値の選定も、ほぼ妥当であったと言えよう。各図中には、適用時間外(4/60、5/60秒)での実験値も示してある。それ等は先端背後で大きな盛り上がりを示している。これ等は本近似理論では説明つかないもので、この問題の解決には、初期値の変更、モデルの改良や精度的に浅水理論以上のものを採用する、等々の工夫が必要であろう。

図-6(a)、(b)、(c)は運動量分布の経時変化例(理論値のみ)を示す。 $t=3/60$ 秒のみ、各々図-5(a)、(b)、(c)の水面形と対応している。理論の適用範囲は、図-5の水面形への適用度より類推されたい。各図中には、Stoker理論⁶⁾に基づく流れ先端部での値(一点鎖線)も示してある。勿論、本理論では、Stoker理論での先端部のように、空間的に一様な分布とならない。しかも、移動跳水への移行過程なので、値もずっと小さい。本理論の特徴は、先端背後でピークを有していることである。

以上の比較・検討より、下流側水深がある場合の対象流れ先端部の水面形推定にも、本理論がある程度有効であると判断されよう。

4. むすび

ゲート急閉直後の流れ先端部の挙動、特に水面形と運動量分布の経時的変化について、理論的検討を行った。本研究で得られた主要な結論は次の通りである。

- (1) 対象流れの解析には、第1近似的には、式(21)~(25)の5式でよいことを示した。
- (2) 初期(ゲート開放完了時)の流れ先端での水面勾配($=\alpha_{1r}$)と水面曲率($=\Delta\alpha_{1r}$)を既知量として、その時の背後の任意水深点でのそれ等の定め方を示した。
- (3) 水面形の本算定法は、流れ先端部ではほぼ妥当である。しかし、時間・空間的な適用範囲があまりにも狭い。これを解決するには、初期値の変更、モデルの改良や精度的に浅水理論以上のものを採用する、等々の工夫が必要であろう。

運動量分布については理論結果のみであり、定量的な議論をするまでには至らなかった。理論の適用度の拡張も含め、今後の課題としたい。

謝 辞：本研究を遂行するに当たり、東北大学工学部 首藤伸夫教授より有益なる御意見、御指摘等を賜った。ここに記して先生に深甚なる感謝の意を表する。また、数値解析や実験等に助力頂いた本学卒業研究生 町本康之、石井俊彦、中村憲市の各君にも感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 志村博康：前方水位のない Dam Break Wave のフロントの非粘性解、農業土木学会論文集、第60号、pp. 33-39, 1975.
- 2) 松富英夫：下流側水深を有するダム破壊流れフロントの破壊直後での挙動(ノート)、土木学会論文集、No.411, pp.226-229, 1989.
- 3) 佐藤 智・今村文彦・首藤伸夫：洪水氾濫の数値計算および家屋被害について、第33回水理講演会論文集、pp.331-336, 1989.
- 4) 松富英夫：移動跳水(波状段波非)発生条件の検討、第33回水理講演会論文集、pp.271-276, 1989.
- 5) 島田正志：ゲートの開放に伴う不定流の基礎的研究、東京大学博士論文、p.189, 1978.
- 6) Stoker, J.J.: Water Waves, Interscience Publishers, Inc., New York, p.567, 1957.
- 7) Dressler, R.F.: Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave, Int. Assoc. of Scientific Hydrology Pub., Vol.38, pt.3, pp.319-328, 1954.