

日成層の連行則の理論的考察

Theoretical Studies on the Entrainment Law of the Diurnal Mixed Layer

○東京工業大学 工学部 田中昌宏 Masahiro Tanaka
東京工業大学 工学部 石川忠晴 Tadaharu Ishikawa

A theoretical model is presented that describes deepening of the diurnal mixed layer under the action of wind. The model is an extension of DIM (Dynamic Instability Model) which is applicable for the situation where turbulence produced by shear instability at the base of mixed layer. Comparative considerations of existing results lead to an idea that the meanings of self-similarity must be followed up for a reasonable modeling. Present study therefore adopts some assumptions on self-similarity not only of density and velocity profiles but also of energetic balance. Consistency of these assumptions is described through a simple imaginary mixing model associated with K-H instability mixing. The resulted model successfully predicts the entrainment rate observed by authors in Lake Kasumigaura.

Keywords : diurnal mixed layer, entrainment law, wind-induced current, K-H instability

1. はじめに

著者ら^{1), 2)}は霞ヶ浦における一連の現地観測を通して、日成層も季節成層同様躍層を形成し、その後の流れや水質変化に多大な影響を及ぼすことを明らかにした。本研究では、日成層の挙動特に躍層の降下過程を記述する連行則を理論的に導出する。

風によって生じる連行現象の概念モデルには、水面近傍で生成された乱れが下方に伝わって連行を引き起こすとするTEM (Turbulent Erosion Model) と、吹送流のせん断不安定に起因する乱れが連行を引き起こすとするDIM (Dynamic Instability Model) がある。Kranenburgは、風洞水槽において、水面のセットアップが生じる“通常の”実験³⁾と、特別な工夫をしてセットアップの生じない実験⁴⁾を行っている。図1はそれぞれの実験結果を共に示したものである。DIMはTEMに比べ連行速度が2オーダー大きく、また連行則のべき乗も異なっている。このことはTEMとDIMの連行の内部機構が根本的に異なっていることを意味している。

本研究では、まず霞ヶ浦における日成層がDIMであることを示し、次にDIMの連行現象について理論的考察を行い、連行則を導出する。

2. 日成層の連行のタイプ

Spiegel & Imberger⁵⁾は湖の混合形態を分類し、Wedderburn数のオーダーが1以下の場合にDIM型の連行の卓越することを示唆している。そこで、霞ヶ浦の代表的な値を代入してWedderburn数を計算すると、0.1程度となる。また、図1には霞ヶ浦における現地データが共に示されており、DIMに近い特性を示している。さらに現地観測から、日成層形成時には吹送流が躍層を挟んで2層流的となっており、そのため界面に強い

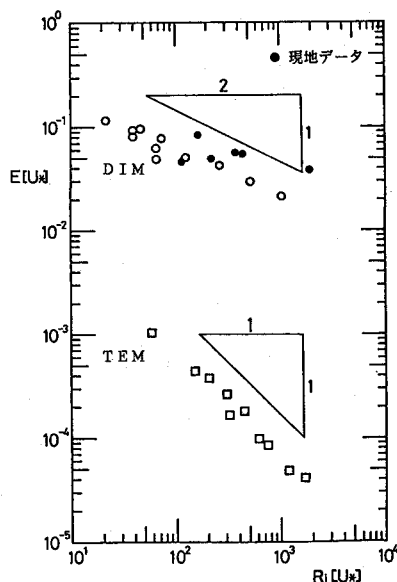


図1 DIMとTEMの実験結果
(Kranenburg^{3), 4)})

せん断が生じ、乱れ強度が界面付近でピークを持つことが明らかとなっている¹⁾。

以上の特性はD I Mの一般的な特性と一致しており、したがって日成層の進行現象はD I Mと結論される。そこで次にD I M型の進行現象について理論的考察を加える。

3. D I M型の進行則に関する従来の研究

D I M型の進行則についてはこれまで海洋の混合層の研究を中心に行われてきた。しかし、定性的議論や実験的研究がほとんどで、半経験的な進行則が示されているに過ぎない。しかしその中で共通して認められている関係は、層平均リチャードソン（以下Ri）数が進行に際して常に一定値をとる、すなわち

$$Ri[U_m] = \frac{\varepsilon g h}{U_m^2} = \text{const.} \quad (1)$$

（ ε ；相対密度差、 g ；重力加速度、 h ；混合層厚、 U_m ；平均流速）

という関係である。そこで $Ri[U_m]$ =一定の物理的解釈について様々な議論がなされてきた。

Pollardら⁶⁾は密度流の古典的な不安定理論の類推から $Ri[U_m]$ =一定を"Marginally Stable"の状態と考え、この値を1とすると、実際の現象をよく説明できるとした。またNiller & Kraus⁷⁾は混合層のエネルギーの授受に関する考察から、混合層底部の乱れエネルギー（以下T E）の生産量（ $\rho \Delta U^2 W_e$ ）がポテンシャルエネルギー（以下P E）の増加量（ $\Delta \rho g h W_e$ ）と一定の関係にあると仮定すると、 $Ri[U_m]$ =一定となると説明している。もう一つの説明は、混合層下層の躍層におけるK-H不安定に基づいた説明である。これはK-H不安定に際して、躍層厚さ δ を用いたRi数あるいは界面の局所Ri数が常に一定値をとるとし、さらに躍層厚さと混合層の厚さの比が常に一定、言い換えれば相似の関係にあれば、この局所Ri数一定と $Ri[U_m]$ =一定は同等である、という説明である。この考え方はKundu⁸⁾、Shermannら⁹⁾によって提案されており、さらにKunduは混合層の相似性についてk- ε モデルを用いて検討を加え、混合層内の流速、密度分布が、ある相似関数に漸近する性質を持つことを示している。

以上のように $Ri[U_m]$ =一定の物理的意味について様々な説明が成されてきている。ただし、どの説明もある程度正しいものの、最終的には現地あるいは実験データに合う様にパラメータの調整する必要があり、各々単独では完全な説明となっていない。そこで本研究では上記した説明を手がかりに、これらのものをすべて包含する物理的説明を試み、進行則を理論的に導出する。

4. D I M型の進行則の理論的考察

(1) 現象の相似性

ここではD I Mの進行の内部機構を明らかにするため、現象の本質を失わない程度に現象を単純化して考える。まず領域は無限に広いとし、風は一定、上層の熱量は保存される、すなわち下層に対する上層の相対浮力（ $\varepsilon g h$ ）は一定とする。

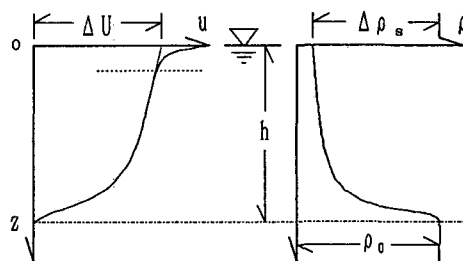
この状況下で、混合層内の流速、密度分布は図2に示すような分布形をイメージし、次式で示される相似分布に従うものとする。

$$u = \Delta U f(\eta), \quad \eta = z/h \quad (2)$$

$$\rho = \rho_0 - \Delta \rho_0 G(\eta) \quad (3)$$

ここに、 ΔU ；下層の流体とともに移動する系から見て混合層の速度分布を点線のように外推した時の水面流速、 z ；水面から鉛直下向きに取られた座標、 $\Delta \rho_0$ ；水面と下層の密度差である。

次に混合に際してのエネルギーバランスについて考える。図3は混合層内のエネルギーの流れを示している。風が水に成す仕事（W）は、混合層の平均運動エ



流速分布

密度分布

図2 流速及び密度の相似分布

エネルギーの増大 (KE) と、乱れエネルギーの生産 (SP) に使われる。TEは、上下の混合を通してPEの増大 (BP) を生じ、残りは仕事に供されない乱れとなり、いずれ逸散 (D) する。現象が相似になるためには、この様なエネルギーの流れのすべての比率が混合のどの段階でも一定にならなければならない。またそうすることによって流速及び密度の相似分布が維持される。

そこでまず、TEの生産が一定の比率CでPEに転換されると考える。TEの生産率 (SP) は、運動量保存則からせん断力 τ を流速で表し、(2) 式を用いて変形すると、次の様になる。

$$\frac{SP}{\rho_s} = - \int_0^h \frac{\tau}{\rho_s} \frac{\partial u}{\partial z} dz = (1 - \frac{\alpha}{\beta}) U_*^2 \Delta U + \frac{\alpha}{2} \Delta U^2 \dot{h} \quad (4)$$

ここに、 $\dot{}$ は時間微分を表し、 U_* は水面での摩擦速度、 $\beta = \int_0^1 f(\eta) d\eta$ 、 $\alpha = \int_0^1 f^2(\eta) d\eta$ 。

一方、混合層全体のPEの増加率 (BP) は次のように表される。

$$BP / \rho_s = \xi \varepsilon_s g h \dot{h} \quad (5) \quad \text{ここに、} \xi = \int_0^1 \eta G(\eta) d\eta, \varepsilon_s = \Delta \rho_s / \rho_s \text{ である。}$$

ここで (BP) = C · (SP) とおき変形すると連行速度 W を表す式、すなわち連行則が得られる。

$$W_s = \dot{h} = \frac{2C(1 - \frac{\alpha}{\beta})}{2\xi - C\alpha \frac{\Delta U^2}{\varepsilon_s g h}} \frac{U_*^2 \Delta U}{\varepsilon_s g h} \quad (6)$$

(6) 式をみると、連行速度は風の成した仕事 $U_*^2 \Delta U$ に比例する形となっている。またその比例係数は流速、密度分布に関する係数と変換効率Cで表現されており、物理的意味が明確となっている。

さらに運動エネルギーKEの時間変化率とBPの比を考えると、これも一定でなければならないから、

$$\frac{\dot{KE}}{BP} = \frac{\alpha}{\beta \xi} \cdot \frac{U_*^2 \Delta U}{\varepsilon_s g h \dot{h}} - \frac{\alpha}{\xi} \cdot \frac{\Delta U^2}{\varepsilon_s g h} = \frac{\alpha}{\beta \xi} \cdot \frac{2\xi - C\alpha/Ri[\Delta U]}{2C(1 - \alpha/\beta)} - \frac{\alpha}{\xi Ri[\Delta U]} = \text{const.} \quad (7)$$

上式で $Ri[\Delta U]$ 以外は定数だから、 $Ri[\Delta U]$ も一定値となる。一方、質量が保存されれば $\varepsilon_s g h$ は一定であるから、 $Ri[\Delta U] = \text{一定}$ は $\Delta U = \text{一定}$ を意味する。したがって混合層の運動量保存式は次式となる。

$$\dot{h} = \frac{1}{\beta} \frac{U_*^2}{\Delta U} \quad (8)$$

式(8)と式(6)を等値して $Ri[\Delta U]$ を求めると次式となる。

$$Ri[\Delta U] = \frac{C}{\xi} \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right) = \text{const.} \quad (9)$$

また、式(9)を用いて式(6)を簡略化すると次式となる。

$$E[U_*] = \frac{1}{\beta} Ri[\Delta U]^{1/2} Ri[U_*]^{-1/2} \quad (10)$$

(9)、(10) 式の二つの関係式はこれまで半経験的に示されていた連行則と一致している¹⁰⁾。

このようにエネルギーバランスの相似性を仮定することにより、DIM型の連行則を導くことができた。

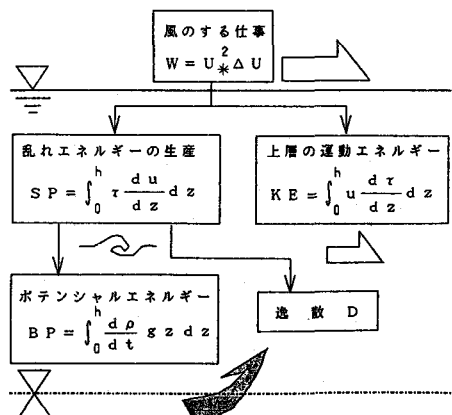


図3 混合におけるエネルギーの流れ

(2) 局所的エネルギー相似の仮説

式(6)の連行則の係数を決定するためには、まず流速及び密度の相似関数を決定する必要がある。そこで、混合に際して相似分布が維持されるようなエネルギー授受の形態を考える。図1からわかるようにD I Mの連行速度はT E Mに較べ格段に大きい。これはD I Mの混合がかなり効率よく生じていることを意味している。そこで混合層の各深さで生産されたT Eがその場のP Eに一定の効率Cで変換されることを考える（フラックスリチャードソン数；Rif=一定）。これを「局所的エネルギー相似の仮説」と呼ぶことにする。

まず水深zにおけるT Eの生成率（SP[z]）は、次式で表される。

$$\frac{SP[z]}{\rho_a} = -\frac{\tau}{\rho_a} \frac{du}{dz} = -\frac{\Delta U}{h} \left\{ U_*^2 - \frac{U_*^2 \eta}{\beta} \int_0^\eta f(\eta) d\eta + \Delta U h \eta f(\eta) \right\} f'(\eta) \quad (11)$$

ここに“'”はηに関する微分を表す。また、水深zにおけるP Eの増加率（BP[z]）は次式となる。

$$\frac{BP[z]}{\rho_a} = \int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial t} g dz = \varepsilon g h \eta G(\eta) \quad (12)$$

BP[z]=C・SP[z]（Rif=BP[z]/SP[z]=C）とおき、式(14)をhに代入すると次式を得る。

$$\left\{ \beta - \int_0^\eta f(\eta) d\eta + \eta f(\eta) \right\} f'(\eta) = \frac{-1}{\xi} \left(\beta - \frac{1}{2} \alpha \right) \eta G(\eta) \quad (13)$$

式(13)はf、G二つの未定関数を含んでいるため、関数形を決定するためにはもう一つ条件が必要となる。上ではフラックスリチャードソン数が一定と考えたが、ここではさらに局所リチャードソン数Riも各深さで一定と考える。すなわち、

$$Ri = \frac{g \, d\rho/dz}{\rho_a (du/dz)^2} = \frac{K_M}{K_\rho} Ri_f = \text{const.} \quad (14)$$

つまり、渦動粘性係数K_Mと渦拡散係数K_ρの比が各深さで一定とする。これより次式が得られる。

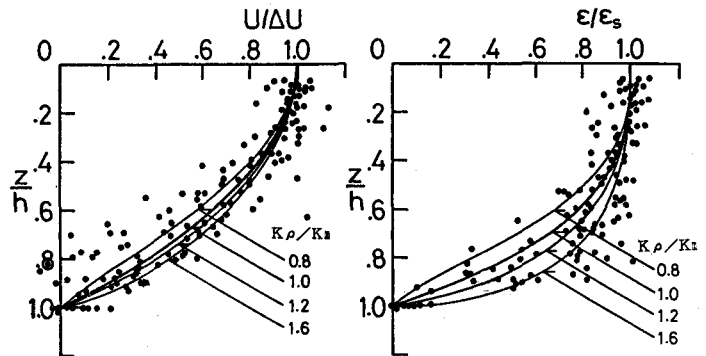
$$\frac{\{f'(\eta)\}^2}{G'(\eta)} = \frac{-1}{\xi} \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{K_\rho}{K_M} \quad (15)$$

式(13)と式(15)を連立して、混合層の境界条件のもとで解けば、混合層内の速度分布関数f(η)と密度分布関数G(η)を求められる。K_ρ/K_Mが1のときは解析解が得られ、次の様に係数の値が決まる。

$$f(\eta) = 1 - \eta^2, \quad G(\eta) = 1 - \eta^3 \quad (16)$$

$$\beta = 2/3, \quad \alpha = 8/15, \quad \xi = 3/10$$

K_ρ/K_Mが1以外の場合には解析解が得られないので、数値積分を行った。結果を現地データと共に図4に示す。K_ρ/K_Mの変化に対して密度分布は大きく変化するものの、流速分布はさほど変化していない。実測値と比較すると、K_ρ/K_Mが1.2～1.6程度で密度分布は実測値とよく一致している。このことはRif及びRiを一定と考えたことすなわち局所エネルギー相似の仮説が妥当であったことを意味している。



(a) 流速分布 (b) 密度分布
図4 流速及び密度の相似分布 (・；現地データ)

(3) 混合効率Cについて

以上で流速及び密度分布に関する係数が決定された。しかしTEからPEへの変換効率Cの値は未定である。この値は混合の内部機構そのものにかかわる値であり、さらに突っ込んだ考察が必要となる。

上記したように混合層内の流速、密度分布とエネルギーバランスの相似性を考えることによって、DIMの連行では、局所エネルギー相似の仮説が妥当であることがわかった。それではこの様なエネルギー輸送はどのような物理機構によって達成されるのであろうか。またCの値はどのような値をとるのが妥当なのであろうか。DIMの連行においてはしばしば二層界面におけるK-H不安定がイメージされる。K-H不安定は図5(a)に示すように、せん断不安定によって界面に大規模な渦が生じ、その渦の中で混合が生じる。つまりその場で生産されたTEがその場のPEに変換される。これは局所エネルギー相似の仮説に一致する。そこでこの現象を単純化して図5(b)→(c)のように、せん断によって二層界面に渦が生じて流体塊が180°回転する状況を考える。(c)の状態のポテンシャルエネルギーは、(b)の状態を基準にすると $2(\rho_1 - \rho_2)A\delta$ である。ここにAは半円の面積、 δ は半円の重心から分割線に降ろした垂線の長さである。したがって、(c)の状態を出現させるには、少なくとも $2(\rho_1 - \rho_2)A\delta$ の仕事をする必要がある。さて、(c)の状態は完全に不安定であるから、流体塊は細かく砕けて(d)のように混合してしまうであろう。混合後のポテンシャルエネルギーは(b)の状態を基準にすると $(\rho_1 - \rho_2)A\delta$ であるから、当初なした仕事が最終的にポテンシャルエネルギーに転換される率Cは丁度1/2である。あとの1/2は細かく砕けた流体要素の運動エネルギー、つまりずっと高周波の乱れエネルギーとなっていづれ逸散する。したがってCの値は1/2が最大であり、現象の相似性が維持されるためにCが一定となる状態は、この最大効率の状態と考えられる。

図6はPatnaik et al.⁽¹¹⁾が行ったK-H不安定の数値計算の結果である。実線が乱れの生成率(SP)の時間変化、破線がポテンシャルエネルギー増加率(BP)の時間変化を示している。両者を時間的に積分した量と比較すると、後者は前者の大体1/2になっていることがわかる。従って図5のモデルは、割合に現実的ではないかと考えられる。

そこで、 $C = 1/2$ とし、先に解析的に得られた流速、密度の分布形(解析解)に関する係数を用いると、次のような関係式が得られる。

$$Ri[\Delta U] = 2/3 \quad (17)$$

さらに式(6)に代入すると、次の連行則が得られる。

$$We = h = \frac{U_*^2 \Delta U}{\epsilon_s g h} \quad \text{または} \quad E[\Delta U] = Ri[U_*]^{-1} \quad (18)$$

さらに $Ri[\Delta U] = 2/3$ を代入すれば次式を得る。

$$E[U_*] = \sqrt{(3/2) \cdot Ri[U_*]}^{-1/2} \quad (19)$$

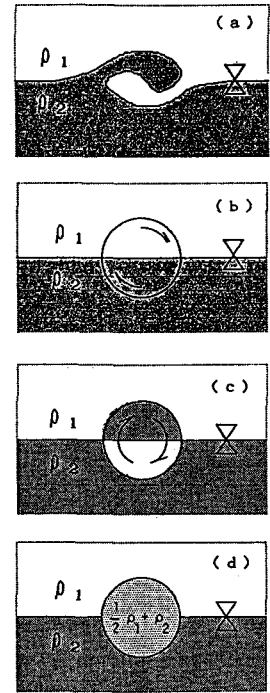


図5 混合の概念モデル

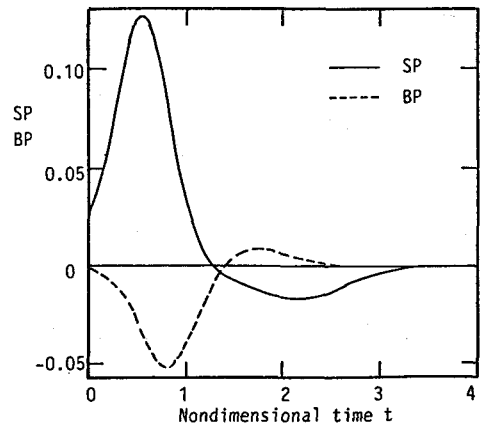


図6 K-H不安定におけるエネルギー収支 (Patnaik et al.⁽¹¹⁾)

以上のように、未定係数を全く含まない連行則が導かれた。

図7は本理論で得られた連行係数 $E[\Delta U]$ と Ri 数 $Ri[U_*]$ の関係を現地データ共に示している。図中の理論線は $C = 1/2$ とし、 $K\rho/K\mu$ の値を数種変化させて示してある。これを見ると、連行速度は $K\rho/K\mu$ の値が2となっても1の場合の8割程度であり、さほど変化せず、実測された連行速度とよく一致している。ところが仮に流速、密度分布に関する係数を固定し（解析値）、 C の値を $1/2$ 以外、例えば0.4として式(6)に代入すると、連行速度は $C = 1$ の場合の約 $1/2$ 、 C を0.6とすると2倍となる。このことから C は連行速度に対して敏感な量であって、図5に示した概念モデルから決定された $1/2$ という値は極めて妥当であったと判断される。

以上から、DIMの連行は”その場で生産された乱れエネルギーが最大効率 $1/2$ でポテンシャルエネルギーに変換される”混合機構が本質的であると考える。

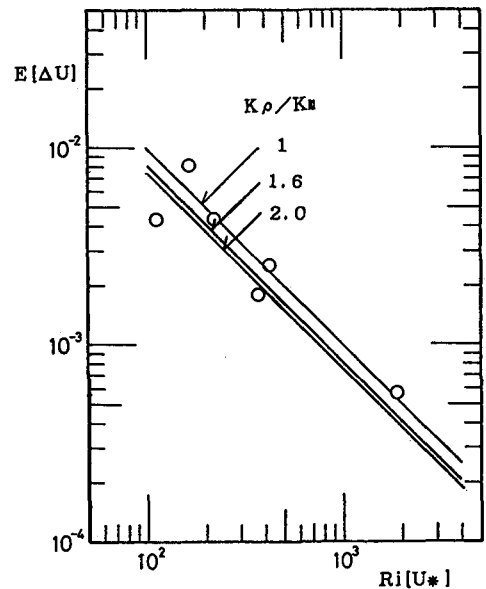


図7 $E[\Delta U]$ と $Ri[U_*]$ の関係

5. おわりに

本研究では、著者らが霞ヶ浦で行った日成層の現地データを基に、まず日成層の連行がDIM型の連行であることを示し、さらにDIM型の連行現象の機構について理論的考察を行った。本研究からDIM型の連行現象について以下の事項が推論及び結論される。

- 1) 混合層内のせん断流によって生成される乱れエネルギーは最大効率($C = 1/2$)でその場のポテンシャルエネルギーに変換される。
- 2) 1)の混合機構によって効率の良い混合が可能になり、エネルギーバランスの相似性が保持されるものと推測される。
- 3) 以上のような仮説から理論的に導かれる結果は、霞ヶ浦の現地データとよく一致した。

参考文献

- 1) 田中昌宏・石川忠晴：土木学会論文集, No. 405/II-11, pp. 63-72, 1989.
- 2) 石川忠晴ら：土木学会論文集, No. 411/II-12, pp. 247-254, 1989.
- 3) Kranenburg, C.: J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 111, No. 9, pp. 1279-1297, 1985.
- 4) Kranenburg, C.: J. F. M., Vol. 145, pp. 253-273, 1984.
- 5) Spigel, R. H. and Imberger, J.: J. Phys. Oceanogr., Vol. 10, pp. 1104-1121, 1980.
- 6) Pollard, R. T. et al.: Geophys. Fluid Dynam., Vol. 3, pp. 381-404, 1973.
- 7) Miller, P. P. & Kraus, E. B.: Modeling and prediction of the upper layers ocean, pp. 143-172, 1977.
- 8) Kundu, P. K.: J. Geophys. Res., Vol. 86, No. C3, pp. 1979-1988, 1981.
- 9) Sherman et al.: Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 267-288, 1978.
- 10) Price, J. F.: J. F. M., Vol. 90, pp. 509-529, 1979.
- 11) Patnaik, P. C. et al.: J. F. M., Vol. 73, pp. 215-240, 1976.