

界面波の形成に及ぼす非線形効果

Weak nonlinear effects on interfacial wave formation

北海道大学工学部	吉田 静男	Shizuo Yoshida
同 上	柏田 昌之*	Masayuki kashiwada
八戸工業大学工学部	西田 修三	Shuzo Nishida

The authors have performed an inviscid stability analysis of two-layer flow with tanh stream velocity distribution, considering perturbations of second order. Results of the analysis show good agreement with measurements of the phase relationship between concentrated vortices directly above and below the interface which were due to shear instability, and interfacial waves. Also, these analytical results lend increased credence to the growth mechanisms for Keulegan waves and Cycloidal waves over linear theory as mathematical models.

Keywords: shear instability, nonlinear stability analysis, interfacial waves

1. 序 論

河口二層流の流れは界面付近の密度漸変層の厚さを δ , 界面から上下境界層までの距離を l, l' とすると、 $\delta/l \ll 1, \delta/l' \ll 1$ が成立する流れであって、単純な2成層流とみなし得る密度分布を有している。西田・吉田¹⁾はこの流れを淡水と塩水を用いて模型水路内に実現し、その流れの安定性解析を行なって両者の比較を試みた。その結果、最大増幅率を示す波数 (most unstable wave number)と実測された波数がほぼ一致すること、及び、擾乱の増幅率が界面のわずかに上又は下で最大となり前者はクーリガン波²⁾ 後者はサイクロイド波³⁾の発生因となることを示した。しかし、理論的に求められた界面波の位相速度が有意な差で実測値と異なることやクーリガン波とサイクロイド波の特徴ある形状についての力学的裏づけについては完了していない。本研究の主目的はこの中の後者を説明することにある。

ここで従来の研究とその内容について若干ふれておく。本論文に直接関係する研究は Andow ら⁴⁾ によるものであろう。彼らはやはり $\delta/l \ll 1, \delta/l' \ll 1$ の条件下で生じる界面波の形状について検討している。しかし、その内容は界面波が何らかの原因によって生じ、その波形を維持することを仮定した場合を検討したものであって、流れの不安定性を取扱った本研究とは全く性質を異にしている。その他にも δ が小さい流れについて界面波を論じた研究は数多く存在するが (Thorpe⁵⁾), 本論文の内容に直接かかわる例はないように思われる。

2. 成層構造のモデルと支配方程式

Figure 1に本研究において検討される二成層流のモデル及び使用記号の定義が示されている。密度界面はtanh型流速分布の変曲点に一致しており、上下層の密度は各層内で一様で ρ_1, ρ_2 の値をとる。この成層流モデルが界面波の発生機構を議論する上にかなり有効であることは西田ら¹⁾によって確認されている。以下の考察においては、流れが非粘性、非圧縮性、2次元水平流であるとしよう。従って、主流の平均速度は y のみの関数であることが仮定される。この条件下では流れを支配する方程式が次のように与えられる。

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

*現在の所属：横河電機株式会社

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{K} \quad (2)$$

なお, $\mathbf{K} = (0, -g, 0)$: 外力, $\mathbf{u} = (u, v, 0)$, g : 重力加速度, p : 圧力, t : 時間である. Stuart⁵⁾による弱非線形解析にならい x 方向の平均の圧力勾配が不変であると仮定して変動量 Q ($u(x, y, t), v(x, y, t), p(x, y, t), \psi(x, y, t)$: 流れ関数, $\eta(x, y, t)$: 流線の変位, のいずれか) を次のように展開する.

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & \bar{Q} + A(t) Q_1 \exp(i\alpha x) \\ & + A(t)^2 Q_2 \exp(2i\alpha x) + |A(t)|^2 Q_0 \\ & + |A(t)|^2 A(t) Q_3 \exp(i\alpha x) \\ & + \cdots + (\text{c.c.}) \end{aligned} \quad (3)$$

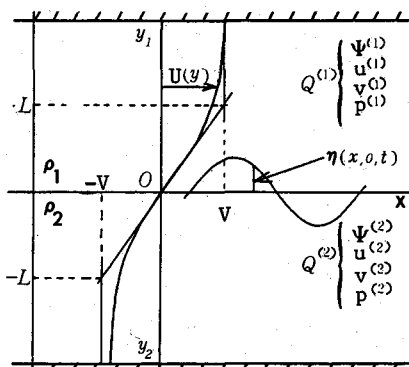


Figure 1 Velocity distribution and notation

ここに $\bar{Q}$ は u, p に対しては $U(y), P(y)$, v, ψ, η に対しては 0, (c.c.) は右辺の $\bar{Q}$ を除く各項の複素共役項の和を表す. 又, α は流れ方向 (x 軸方向) の波数, $A(t)$ は振幅の時間発展項, i は虚数単位, 添字の数値は変動量の成分の次数を表す. $A(t)$ は次の振幅方程式から決定される⁷⁾.

$$\frac{1}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt} = -i\alpha c + L |A(t)|^2 \quad (4)$$

式中 L は Landau 定数と呼ばれる複素数である. 式(3)を(1), (2)に代入し $A(t), A(t)^2, |A(t)|^2, |A(t)|^2 A(t)$ の項のそれぞれの係数を比較すると ψ_j ($j=0, 1, 2, 3$ ただし 3 次以上の項を問題にするとときは添字の変更を要する) に対する以下の方程式を得る.

$$\frac{d^2 \psi_1}{dy^2} - \left(\alpha^2 + \frac{U''}{U-c} \right) \psi_1 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dy^2} - \left(4\alpha^2 + \frac{U''}{U-c} \right) \psi_2 + \frac{1}{2(U-c)^2} \left(\frac{U' U''}{U-c} - U''' \right) \psi_1^2 = 0 \quad (6)$$

$$\psi_0 = \frac{i}{2c_i} \left(\psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dy} - \psi_1^* \frac{d\psi_1}{dy} \right) + \text{const.} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (U-2c+c^*) \frac{d^2 \psi_3}{dy^2} - \{ U'' + \alpha^2 (U-2c+c^*) \} \psi_3 + \frac{L}{i\alpha} \left(\frac{d^2 \psi_1}{dy^2} - \alpha^2 \psi_1 \right) \\ + 2 \frac{d\psi_1^*}{dy} \left(\frac{d^2 \psi_2}{dy^2} - 3\alpha^2 \psi_2 \right) + \psi_1^* \left(\frac{d^3 \psi_2}{dy^3} - 3\alpha^2 \frac{d\psi_2}{dy} \right) \\ - \left(\frac{d\psi_2}{dy} \cdot \frac{d^2 \psi_1^*}{dy^2} + 2\psi_2 \frac{d^3 \psi_1^*}{dy^3} \right) + \frac{d\psi_0}{dy} \left(\frac{d^2 \psi_1}{dy^2} - \alpha^2 \psi_1 \right) - \psi_1 \frac{d^3 \psi_0}{dy^3} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここに c は実部 c_r , 虚部 c_i の複素位相速度, $*$ は共役複素数である.

3. 境界条件

境界条件のうち運動条件は次式で与えられる.

$$\psi_1^{(1)} = \psi_2^{(1)} = 0 \quad (y = y_1) \quad (9)$$

$$\psi_1^{(2)} = \psi_2^{(2)} = 0 \quad (y = y_2) \quad (10)$$

$$\psi_1^{(1)} = \psi_1^{(2)} \quad (y = 0) \quad (11)$$

$$\psi_2^{(1)} - \frac{\psi_1^{(1)}}{U-c} \cdot \frac{d\psi_1^{(1)}}{dy} = \psi_2^{(2)} - \frac{\psi_1^{(2)}}{U-c} \cdot \frac{d\psi_1^{(2)}}{dy} \quad (y = 0) \quad (12)$$

ここに上つきの添字 1 は上層 2 は下層を意味する. 一方, 力学条件は

$$\left\{ (1-\gamma) U' + \frac{R_i}{U-c} \right\} \psi_1^{(1)} + \gamma (U-c) \frac{d\psi_1^{(1)}}{dy} = (U-c) \frac{d\psi_1^{(2)}}{dy} \quad (y=0) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left(\gamma U' - \frac{R_i}{U-c} \right) \psi_2^{(1)} - \gamma (U-c) \frac{d\psi_2^{(1)}}{dy} - \left\{ \frac{(1-\gamma)}{2} \left(3\alpha^2 + \frac{U''}{U-c} \right) \right. \\ & \left. + \frac{U' R_i}{(U-c)^3} \right\} (\psi_1^{(1)})^2 - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d\psi_1^{(1)}}{dy} \right)^2 + \frac{2R_i}{(U-c)^2} \psi_1^{(1)} \frac{d\psi_1^{(1)}}{dy} \\ & = U' \psi_2^{(2)} - (U-c) \frac{d\psi_2^{(2)}}{dy} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_1^{(2)}}{dy} \right)^2 \quad (y=0) \quad (14) \end{aligned}$$

式中 $\gamma = \rho_1 / \rho_2$, $R_i = \varepsilon g L / V^2$, $\varepsilon = 1 - \gamma$ である。

4. 計算手順

解析は $U(y) = \tanh y$ とし, $y_1 = +\infty$, $y_2 = -\infty$ として実行する。 $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(2)}$ は $C_1^{(1)}$ を定数とする次の形式を有する。

$$\psi_1^{(1)} = C_1^{(1)} \phi_1^{(1)} \quad (15) \quad \psi_1^{(2)} = C_1^{(2)} \phi_1^{(2)} \quad (16)$$

$\psi_1^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$ を求めるには, まず (5) 式 (Rayleigh 方程式) の $|y| \gg 1$ における漸近解 $\exp(-\alpha y)$, $\exp(\alpha y)$ の $y = \pm 5$ の値を初期値としてそれぞれ $y=0$ まで, きざみ幅 0.01~0.02 で Runge-Kutta-Gill 法を用いて数値積分する。次に界面 ($y=0$) で $\phi_1^{(1)}$, $d\phi_1^{(1)}/dy$ を求め, これを境界条件 (11), (13) に代入して次の連立方程式を得る。

$$\left[\Delta(\alpha, c_r, c_i; R_i, \gamma) \right] \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ C_1^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

従って固有値方程式 $|\Delta| = 0$ より α , c_r , c_i 間の関係がパラメーター R_i , γ の各値について求め得る。 $\psi_2^{(1)}$, $\psi_2^{(2)}$ については上記の関係と $\psi_1^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$ を用いて求めることができる。ただ式 (17) から分かるように $c_1^{(1)}$, $c_2^{(2)}$ の比は求まるが, それぞれの値は決定し得ないから $\psi_1^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$ の中にはなお 1 つの任意定数は含まれる (以下この定数を C とおく)。 $\psi_2^{(1)}$, $\psi_2^{(2)}$ はすでに求められた α , c_r , c_i , R_i , γ , $\psi_1^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$ と定数 C を含んだ形で求めることができる。具体的には $y = \pm 5$ で $\exp(-2\alpha y)$, $\exp(2\alpha y)$ を初期値とし式 (6) をやはり 0.01~0.02 のきざみ幅で数値積分して $\psi_2^{(1)}$, $\psi_2^{(2)}$ を決定する。なお, ψ_2 の解は次の形式を有する。

$$\psi_2^{(1)} = C_2^{(1)} \phi_2^{(1)} + C^2 \phi_2'^{(1)} \quad (18)$$

$$\psi_2^{(2)} = C_2^{(2)} \phi_2^{(2)} + C^2 \phi_2'^{(2)} \quad (19)$$

ここに ϕ_2' は特解部分である。最後まで残る任意定数 C の決定は次のようにして行なった。

2 次のオーダーまで考慮した界面波の形状は次式によって求められる。

$$\eta(x, 0, t) = 2|A(t)| |\eta_1| \cos\{\alpha x + \arg(A(t)) + \arg(\eta_1)\} + 2|A(t)|^2 |\eta_2| \cos\{2\alpha x + 2\arg(A(t)) + \arg(\eta_2)\} \quad (20)$$

そこで $2|A(t)| |\eta_1|$ が実際の界面波高に対応するように (ここでは $|\eta_1| = 1$ とした) C を決定した。界面近傍の流況は流れ関数 ψ から知ることができる。これについても 2 次のオーダーの項まで求めると次式となる。

$$\psi = \log(\operatorname{cosech}(y)) + 2|A(t)| |\psi_1| \cos\{\alpha x + \arg(A(t)) + \arg(\psi_1)\} + 2|A(t)|^2 |\psi_2| \cos\{2\alpha x + 2\arg(A(t)) + \arg(\psi_2)\} \quad (21)$$

5. 解析結果及び考察

固有関数 ψ_1 , ψ_2 については紙面の関係で記述を省略する。又、式 (17) から得る固有値方程式を

もとに $\alpha - R_i$ 空間で増幅率と位相速度を求めた結果についても従来の西田らの結果に一致することを報告するにとどめる。本研究の目的である流れの不安定によって生じる界面の変形（あるいは界面波形状の変化）の検討を行うため、実際に界面波が観測された R_i と most unstable 波数に近い条件下で計算された

W.N.=1.000 $c_r=0.440$ $c_i=0.084$
 $R_i=0.500$

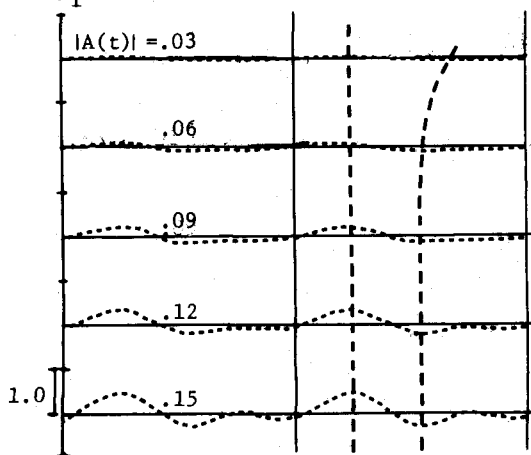


Figure 2(a) Time evolution of η for positive c_r

W.N.=1.000 $c_r=-0.440$ $c_i=0.084$
 $R_i=0.500$

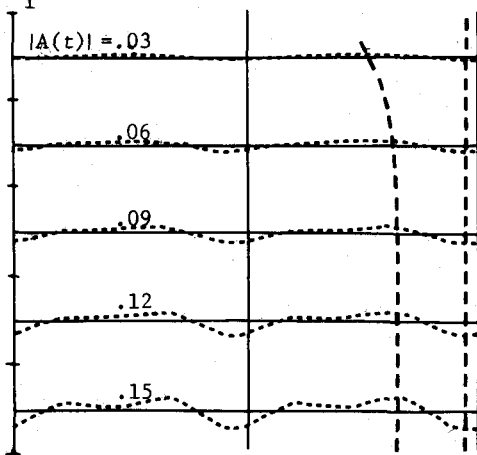


Figure 2(b) Time evolution of η for negative c_r

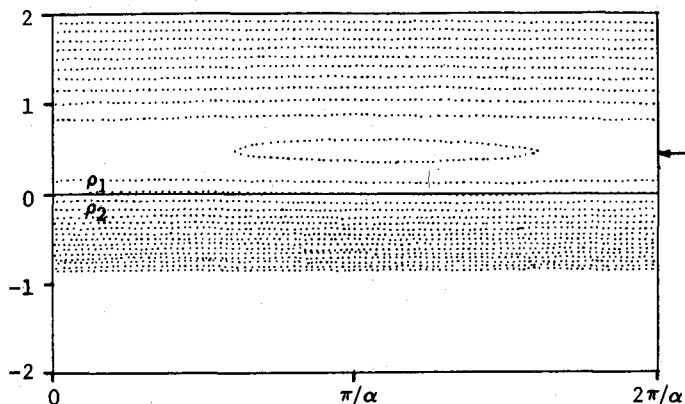


Figure 3(a) Stream lines for $\alpha=1.0000$, $c_r=0.4400$, $c_i=0.0840$, $R_i=0.5000$, $|A(t)|=0.0100$

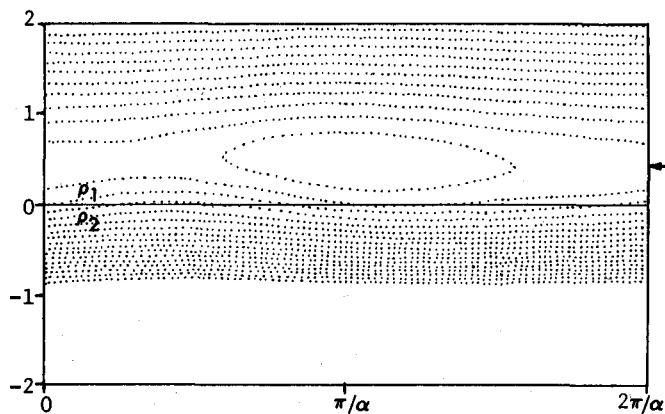


Figure 3(b) Stream lines for $\alpha=1.0000$, $c_r=0.4400$, $c_i=0.0840$, $R_i=0.5000$, $|A(t)|=0.0600$

$y=0$ を中心とする変位 $\eta(x,0,t)$ を Figure 2 に示す。(a)は $c_r > 0$ の例で、正弦波に比べて急峻な山を有している。(b)は $c_r < 0$ の例で、(a)の界面上のある点を中心に 180° 回転した界面形状を有している。今一つの特徴は不安定開始後短時間のうちに急峻な山(又は谷)が平坦な谷(又は山)にある距離だけ急速に接近し、以後はほぼその距離を保つことである。この結果は単に基本波の2倍高調波を考慮したことにより得たものであるが、現実の界面現象の特徴をよく示している。次に上記の界面変形を生む原因となる界面近傍の不安定流を流線を通して検討してみよう。Figure 2 の例に対応する $c_r > 0$ に対する流線(細い点線)を3つのステージについて順に示すと Figure 3 (a), (b), (c)を得る。なお、(c)には流れの可視化法によって得られた、ほぼ同じ水理条件下の流脈(太い点線)と界面(実線)⁸⁾も示されている。Figure 4は $c_r < 0$ の例であるが、ある可視化実験の結果と対応する水理条件下の計算結果である。同図にも実測された流脈と界面が示されている。Figure 3 に示された急峻な山を有する波がクーリガン波に、又、Figure 4 に示された急峻な谷を有する波がサイクロイド波に対応している。流況については計算結果が流線であるのに実験結果が流脈であるから直接の比較にはならないが、Hama⁹⁾ によって示された流線と流脈の関係からも推定されるように計算によるcat's eye の中心は流脈の示す集中渦の中心とほぼ一致する。このことから Figure 3(c)と Figure 4 における、計算と実験による集中渦の位置はほぼ一致するといえる。

以上の結果から、従来明確でなかった集中渦と界面波形(あるいは界面波)の関係が理論的にもほぼ裏づけられたといえる。今後、粘性や3次以上の項の考慮によってさらに精緻に検討できるであろうが、界面波が確認できる段階からカスプ状の破壊に到る前の界面現象については、2次のオーダーの項が大きく寄与しているといえよう。

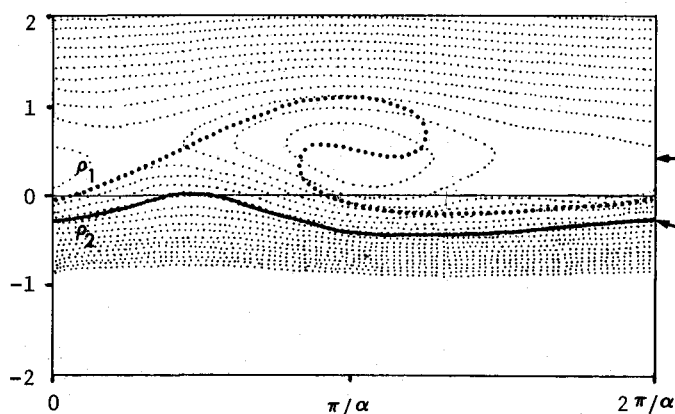


Figure 3(c) Stream lines for
 $\alpha=1.0000$, $c_r=0.4400$, $c_i=0.084$,
 $R_1=0.5000$, $|A(t)|=0.1200$

CRITICAL LEVEL

INTERFACE

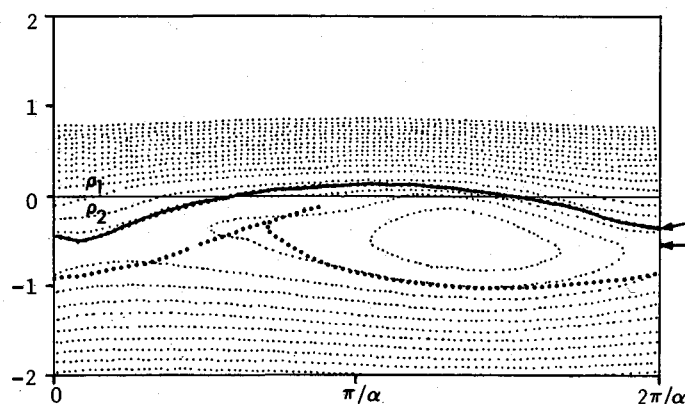


Figure 4 Stream lines for
 $\alpha=1.14$, $c_r=-0.4800$, $c_i=0.0720$,
 $R_1=0.6500$, $|A(t)|=0.1000$

INTERFACE

CRITICAL LEVEL

6. 結 論

変動量の2次の項を考慮した非粘性弱非線形安定性解析と可視化実験の結果との比較により以下の結果を得た。

1) $c_r > 0$ の場合, 急峻な山を有する界面波が発生する. 逆に $c_r < 0$ の場合には急峻な谷を有する界面波が発生する.

2) $c_r > 0$ (又は $c_r < 0$) における山 (又は谷) とそれより下流 (又は上流) に位置する平坦な谷 (又は山) の間隔はそれより上流 (又は下流) に位置する平坦な谷 (又は山) までの間隔より短い. この間隔の短縮は界面波発生初期段階に著しく, 短時間にして間隔が確立して保持される.

3) 2) の結果は界面上下の cat's eye 構造の流線の歪に基づいている.

4) 上記 1), 2) の結果は可視化実験により得た界面形状及びその近傍の流脈とほぼ一致する.

以上の結果から, 従来実験によって見出されてきた定性的なクーリガン波 (又はサイクロイド波) と流れの不安定に基づく集中渦の関係が, 非線形効果を考慮することによって力学的にも明確になったといえる.

謝 辞

本研究は一部科学研究費補助金 (課題番号 62460158) によって遂行された. 記して謝意を表したい.

文 献

- 1) 西田修三・吉田静男: 二層流の安定性に関する実験的研究, 第28回水理講演会論文集, pp.339-344, 1984
- 2) 吉田静男・柏田昌之: 二層流界面波の流速の線形解と実測値, 第32回水理講演会論文集, pp.173-177, 1988
- 3) 吉田静男: 密度界面における混合機構の研究, 土木学会論文報告集, Vol. 273, pp.59-68, 1978
- 4) T.Andow, K.Hanawa, Y.Toba: Experimental study on interfacial waves in a stratified shear flow, J.Oceanographical Society of Japan, Vol.37, No.4, pp.179-192, 1981
- 5) S.A.Thorpe: Transitional phenomena and the development of turbulence in stratified fluids: A review, J.geophysical Research, Vol.92, pp.5231-5248, 1987
- 6) J.T.Stuart: On the non linear mechanics of hydrodynamic stability, J.Fluid Mech., Vol.4, pp.1-21, 1958
- 7) 巽 友正編: 乱流現象の科学, 東京大学出版会, 1986
- 8) S.Yoshida: The growth mechanism of interfacial wave packet, Bulletin of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, No.130, pp.127-135, 1986
- 9) R.Hama: Streaklines in a perturbed shear flow, The Physics of Fluids, Vol.5, No.6, pp.644-650, 1962