第33回水理講演会論文集　1989年２月

滑面上の浮遊砂を有する開水路流れの抵抗則について
Resistance Law of Open Channel Flows with Suspended Sediments over a Smooth Bed

京都大学工学部　岩 佐 義 朗　Yoshiaki IWASA
京都大学工学部　細　田　尚　Takashi HOSODA
京都大学大学院　坂 井 伸 一　Shinichi SAKAI

This paper deals with the resistance law of open channel flows with suspended sediments over a smooth bed by means of the k-ε model. The interaction term between the solid and liquid phase is taken into account in the k-ε equations. The mathematical form of this term is considered by using of motion of a single sediment particle. Calculated results concerning the depth-wise velocity distributions and the friction factor are compared with the previous theoretical and experimental studies. These comparison indicate that the basic equations used here are applicable to the turbulent shear flow with suspended sediments to some extent, though further theoretical investigations of the basic equations are required.
Keywords: multiphase flow, turbulence model, resistance law

1．緒　言

本研究は、浮遊砂を有する滑面上の開水路流れについて、数値解析的に検討したものである。用いる基礎式は、乱れReynolds数が低い領域を考慮したk-εモデルを固液混相流に拡張したものである。この基礎式を用いることにより、原理的には粘性底層より対数流速分布則に従う領域への遷移過程を再現することができ、Karman定数を仮定することなく解析を進めることができる。また、滑面での浮遊砂濃度の増加に伴う抵抗係数の増加機構を解明するためには、路床のごく近傍の流れを再現する必要があり、対数則の成立する点より上方を扱うwall function 法は適切でない。

本研究では、基礎式中に現れる、固相と液相の乱れ速度の差に起因する項を、単一粒子の運動方程式を用いて考察しモデル化する。板倉・岸は、乱れエネルギーの関係式にこの項を考慮することにより、流速分布に関してlog-linear則を導いているが、本研究においてもこの項を考慮する必要性について考察する。さらに、密度流との相似性から、渦動粘性係数をRichardson数の関数として数値解析を行い、得られた結果と従来の実験結果とを比較・検討する。

2．基礎式

用いる基礎式は、乱れReynolds数の低い領域を考慮したk-εモデルを、固液混相流に拡張したものである[1]。乱れReynolds数の低い領域を考慮したk-εモデルには、Patel·Rodi·Sheuerer[2] がまとめているように、基本的にはJones·Launder[3] が提案しているものと、Lam·Bremhorst[4] のものに分けられている。本研究では両者の優劣には立ち入らず、とりあえずJones·Launder のモデルを用いて解析を進める。基礎式を誘導する際に用いられている仮定をまとめると次のようになる。

① 固相の平均流速 U_{pi} は液相の平均流速を用いて次式で表せる。

$$Up_i = U_{f_i} - w_0\delta_{i2} \qquad (1)$$

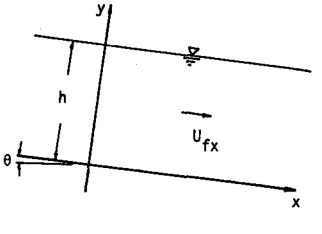

Fig.1　Coordinate system

ここに、U_{pi}, U_{fi}；各々、固相・液相の平均流速ベクトルの成分, i ; Fig.1 に示した座標の方向を示す指数で、i=1 が流れ方向（x 方向）、2 が路床に垂直な方向（y 方向）に対応する。また、w_0 は砂粒子の沈降速度の大きさである。w_0 について、最近、振動流中の粒子の沈降速度が検討されているが[5],[6]、

本研究では、静水中をStokes則に従って沈降する粒子の最終速度を用いる。

② 固相と液相の乱れ速度は一致しない。すなわち、

$$u_{p_i} \fallingdotseq u_{f_i} \tag{2}$$

ここに、u_{pi}, u_{fi}；各々、固相、液相の乱れ速度ベクトルの成分。固相の乱れ速度が液相のそれに一致しないことにより、k-ε 方程式に付加項が現れる。この項の表示については、次章で考察する。

③ 固相と液相の相互作用として、粘性抵抗と浮力項のみを考慮する。その他に、仮想質量項、液相の流速の非定常性に起因する項が存在するが、平均流に対しては、定常状態を考えているため無視できる。乱れ速度の基礎式中では、これらの項は無視できない。しかし、平均化操作を行った後のk-ε方程式中に現れるこれらの項が十分小さいことが、次章の解析で確かめられた。

これらの仮定を用い、広長方形断面の等流状態を考えるとき、基礎式は次のようになる[1]。座標系はFig. 1のものを用いている。

$$\frac{\partial U_{f_x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_{f_x}u_{f_y}}) - U_{f_x}\frac{\partial C w_0}{\partial y} = \frac{g\sin\theta}{1-C} + \nu\frac{\partial^2 U_{f_x}}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\overline{u_{f_x}u_{f_y}}\frac{\partial U_{f_x}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{D}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right] - \varepsilon - 2\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2 - \overline{cu_{f_y}}\frac{g}{1-C}\frac{\rho_p-\rho_f}{\rho_f} - \frac{18\nu}{(1-C)d^2}\left[C\left(\overline{u_{f_i}^2}-\overline{u_{f_i}u_{p_i}}\right)\right] \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{k}D\left(\frac{\partial U_{f_x}}{\partial y}\right)^2 - c_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{D}{\sigma_\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right] + 2\nu D\left(\frac{\partial^2 U_{f_y}}{\partial y^2}\right)^2 - c_{\varepsilon_3}\overline{u_{f_y}c}\frac{g}{1-C}\frac{\varepsilon}{k}\frac{\rho_p-\rho_f}{\rho_f} - \frac{18\nu}{(1-C)d^2}\left[2C\left(\nu\overline{\frac{\partial u_{f_i}}{\partial x_k}\frac{\partial u_{f_i}}{\partial x_k}} - \nu\overline{\frac{\partial u_{f_i}}{\partial x_k}\frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_k}}\right)\right] \tag{5}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[w_0(C-1)C] = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{cu_{f_y}}) \tag{6}$$

$$-\overline{u_{f_x}u_{f_y}} = D\frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\overline{cu_{f_y}} = \beta D\frac{\partial C}{\partial y}$$

ここに、C, c；平均体積濃度とそれからの偏差, k ；液相の乱れエネルギー, ε ；液相の乱れエネルギー散逸率, d ；砂粒の粒径, ρ_p ；砂粒の密度, ν ；分子粘性係数。また、D は渦動粘性係数であり、次式を用いている。

$$D = c_\mu(Re_T)\cdot f(Ri)\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{7}$$

ここに、Re_T ；乱れReynolds数（$k^2/\nu\varepsilon$）, Ri；Richardson数（$-g(\rho_p/\rho_f-1)\partial C/\partial y/(\partial U/\partial y)^2$）

c_μ, $c_{\varepsilon 2}$ はRe_T の関数であり、Jones·Launderに従い次式を用いる[3]。

$$c_\mu = c_{\mu_\infty}\exp\left[-\frac{2.5}{1+Re_T/50}\right], \quad c_{\varepsilon_2} = c_{\varepsilon_{2\infty}}[1-0.3\exp(Re_T^2)] \tag{8}$$

さらに、f(Ri) は渦動粘性係数に及ぼす密度勾配の影響を表す関数であって、混相流でのf(Ri)の関数形は現在のところ明らかになっていない。本研究では、密度流で用いられている関数形を代用し、次式を用いる[7]。

$$f(Ri) = \frac{1-1.5\,Ri}{1+1.5\,Ri} \quad (0\leq Ri<1/1.5); \qquad = 0 \quad (1/1.5\leq Ri) \tag{9}$$

上式中現れるk-ε定数の値をTable 1に示した。βの値については多くの議論があるが、本研究ではとりあえず1.0 とした。

Table 1 k-ε constants

c_{μ_∞}	c_{ε_1}	$c_{\varepsilon_{2\infty}}$	c_{ε_3}	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	3.0	1.0	1.3

最後に(4),(5)式中の固相、液相の乱れ速度の差に起因する項((4),(5)式最終項)のモデル化が必要であり、次にこの項の考察を行う。

3．k-ε方程式の相互作用項

本章では、単一粒子の運動方程式を用いて、k-ε方程式の相互作用項の考察を行う。数値的に発生させたランダムな液相の乱れ速度を用いて、単一粒子の運動方程式を数値解析し、統計処理することによりモデル化に必要な諸量を得る。

単一粒子の運動方程式は次のようになる[8]。

$$(\rho_p+\chi\rho_f)\frac{\pi d^3}{6}\frac{dv_p}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_f C_D\frac{\pi d^2}{4}(v_p-v_f)\left|v_p-v_f\right| + \rho_f(1+\chi)\frac{\pi d^3}{6}\frac{dv_f}{dt} \qquad (10)$$

ここに、v_p；単一粒子の速度，v_f；ランダムな液相の乱れ速度，χ；仮想質量係数で 0.5を用いた。C_Dは抗力係数で、Stokes則に従う場合、定数とした場合、Reynolds数 ($Re=|v_f-v_p|d/\nu$) の関数

$$C_D = \frac{24}{Re}(1+0.152\sqrt{Re}+0.0151\,Re) \qquad (11)$$

を用いた場合の三通りで解析を行った。

v_fは、自己相関係数 $R_{fL}(\tau)$が次式を満たすように発生させられたランダム変動量である。

$$\overline{v_f^2}\int_{-\infty}^{\infty}R_{fL}(\tau)\exp(-i\,2\pi f\tau)d\tau = \frac{2\overline{v_f^2}T_L}{1+(2\pi f T_L)^2} \qquad (12)$$

ここに、f ；周波数，T_L；液相の乱れ速度の Lagrange 的時間スケール。

無次元量

$$v_p'=\frac{v_p}{\sqrt{\overline{v_f^2}}},\quad v_f'=\frac{v_f}{\sqrt{\overline{v_f^2}}},\quad t'=\frac{t}{T_L}$$

を導入して、C_DがStokes則，定数の場合について(10)式を書き換えると次式のようになる。

(Stokes則)

$$\left(\frac{\rho_p}{\rho_f}+\chi\right)\frac{dv_p'}{dt'} = -\frac{\nu T_L}{d^2}(v_p'-v_f') + (1+\chi)\frac{dv_f'}{dt'} \qquad (13\text{-a})$$

(C_D= const.)

$$\left(\frac{\rho_p}{\rho_f}+\chi\right)\frac{dv_p'}{dt'} = -3C_{D_0}\frac{\sqrt{\overline{v_f^2}}T_L}{d}(v_p'-v_f')\left|v_p'-v_f'\right| + (1+\chi)\frac{dv_f'}{dt'} \qquad (13\text{-b})$$

このように、無次元パラメータ$\nu T_L/d^2$，$\sqrt{\overline{v_f^2}}T_L/d$ が現れる。C_Dとして(11)式を用いた場合には、この二つの無次元パラメータが同時に現れることになる。

数値解析の結果を用いて$\overline{v_p'^2}/\overline{v_f'^2}$, $\overline{v_p'v_f'}/\overline{v_f'^2}$を求め、$\nu T_L/d^2$ に対して図示したのがFig.2, Fig.3である。Stokes則を用いたときの$\overline{v_p'^2}/\overline{v_f'^2}$ についての計算結果は、Hinze[8]の求めた解析解

$$\frac{\overline{v_p'^2}}{\overline{v_f'^2}} = \frac{aT_L'+b^2}{aT_L'+1} \qquad (14)$$

$$\left(a=\frac{36}{1+2\rho_p/\rho_f},\ b=\frac{3}{1+2\rho_p/\rho_f},\ T_L'=\frac{\nu T_L}{d^2}\right)$$

に一致することを確認している。

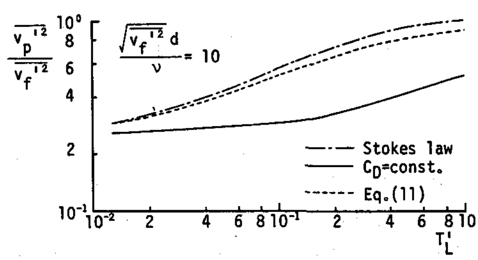

Fig.2 Relation between $\overline{v_p'^2}/\overline{v_f'^2}$ and T_L'

Fig.2,3 をみると、C_Dとして(11)式を用いた結果は、本解析の範囲ではStokes則を用いた結果とほぼ一致する。

k-方程式でモデル化が必要な項は$\overline{v_p'v_f'}/\overline{v_f'^2}$であり、(14)式と同様に

$$\frac{\overline{v_f'v_p'}}{\overline{v_f'^2}} = \frac{eT_L'+f}{eT_L'+1} \qquad (15)$$

と表示する。$T_L'=0$ での値はf であり、(13-a)

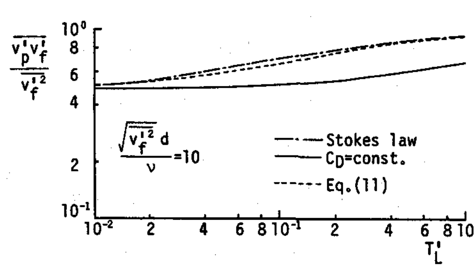

Fig.3 Relation between $\overline{v_f'v_p'}/\overline{v_f'^2}$ and T_L'

式よりf の値として(16)式を得る。

$$f = \frac{1 + \chi}{\rho_s/\rho_p + \chi} \qquad (16)$$

また、e の値は計算結果よりe =5.0となった。T_Lを$T_L=c_L k/\varepsilon$とおいて、(4)式中の相互作用項を(15)式から

$$\overline{u_{fi}}^2\left(1-\frac{\overline{u_{fi}u_{pi}}}{\overline{u_{fi}^2}}\right) = 2k\left(1-\frac{e^{T_L'}+f}{eT_L'+1}\right) = 2k\frac{1-f}{e\cdot c_L Re_T(\nu/\sqrt{k}d)^2+1} \qquad (17)$$

とモデル化する。

計算結果を用いて仮想質量項に起因する項 $\overline{v_f' dv_p'/dt'}$ を評価すると、0 に近い値となり、本研究ではこの項を無視している。

k-方程式と同様に、ε－方程式に現れる相互作用項を、次元的考察により次のようにモデル化した。

$$2\nu\left(\overline{\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_k}\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_k}}-\overline{\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_k}\frac{\partial u_{pi}}{\partial x_k}}\right) = c_{\varepsilon 4}\frac{\varepsilon}{k}\left(1-\frac{e^{T_L'}+f}{eT_L'+1}\right) \qquad (18)$$

4．数値解析の条件

数値解析に用いた水理諸量を Table 2に示した。Run 1 は$\rho_p/\rho_f=1$ の中立浮遊粒子を用い、断面平均体積濃度を変化させた場合である。Run 2-5は、$\rho_p/\rho_f=2.65$の砂粒子を用い、粒径・水深比 (d/h)を固定して断面平均体積濃度(C_m)を変化させた場合、C_mを固定して d/h を変化させた場合である。

Table 2 Hydraulic variables in numerical simulations

	$\frac{u_* h}{\nu}$	$\frac{u_*}{\sqrt{gh}}$	$\frac{d}{h}$	$\frac{\rho_p}{\rho_f}$	C_m
Run 1	1237.4	0.1	0.006	1.0	0.0001-0.01
Run 2	1237.4	0.1	0.006	2.65	0.0001-0.003
Run 3	1237.4	0.1	0.004	2.65	0.0001-0.001
Run 4	1237.4	0.1	0.004 -0.006	2.65	0.0003
Run 5	1237.4	0.1	0.0024-0.006	2.65	0.001

$u_* = \sqrt{ghs in\theta}$

計算の境界条件は、自由表面 y=hと路床y=0において次のように与えた。

（自由表面 y=h） $D\frac{\partial U}{\partial y}=0,\ D\frac{\partial k}{\partial y}=0,\ D\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=0,\ -\overline{cv_{f_y}} = w_0 C(C-1)$

（路床 y=0） $U=0,\ k=0,\ \varepsilon=0,\ -\overline{cv_{f_y}} = w_0 C(C-1)$

この境界条件と、(3)-(6)式を用いて、適当な初期条件より出発して定常状態に達するまで繰り返し計算した。

5．計算結果の考察

（1）中立浮遊粒子の場合

中立浮遊粒子の場合、$\rho_p/\rho_f=1$ であり、 f=1となるため、k-ε方程式の相互作用項は 0となる。また、沈降速度も 0であり、濃度勾配も存在しないので、浮遊粒子の存在しない清水流の場合との基礎式の違いは重力加速度 gが g/(1-C)と変わるだけである。このことより、液相が路床に作用している摩擦速度

$$u_{*f} = \sqrt{\int_0^h \frac{g}{1-C}dy\,sin\theta} = \sqrt{\frac{gh}{1-C_m}sin\theta} \qquad (19)$$

を用いれば、Karman定数がC_mとともに変化することなく、対数流速分布則(20)が成立することを示している。

$$\frac{U_f}{u_{*f}} = \frac{1}{\kappa_0}ln\frac{u_{*f}y}{\nu} + A_s \qquad (20)$$

一方、従来の実験結果の整理に用いられている$u_*=\sqrt{gh\ sin\theta}$ を用いて(20)式を書き直せば

$$\frac{U_f}{u_*} = \frac{1}{\kappa_0\sqrt{1-C_m}}ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-C_m}}\frac{u_* y}{\nu}\right) + A_s \qquad (21)$$

となり、見かけのKarman定数が次式となる。

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \sqrt{1-C_m} \qquad (22)$$

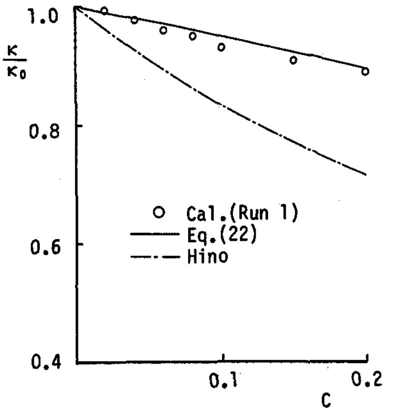

Fig.4 Relation between κ and C

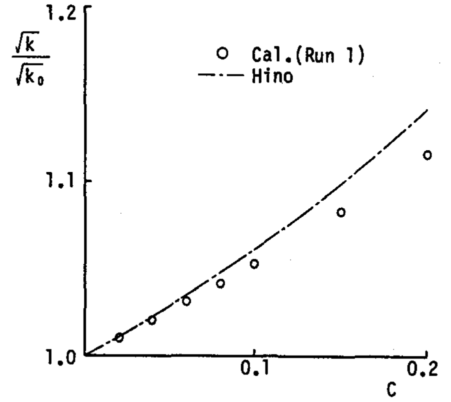

Fig.5 Relation between k and C

すなわち、Cmの増加とともにKarman定数が減少するという従来と同様の結果が得られる。 Fig. 4に、計算結果より得られた κ/κ_0 と(22)式を示した。両者はよく一致している。図中には、従来の実験結果とよく適合する日野の理論式 [8]も示した。計算結果は日野の理論式とは適合しておらず、体積濃度の大きい領域において固相・固相間の応力伝達を考慮する必要性を示していると思われる。

Fig. 5には、y/h=0.5 での乱れエネルギーの値を、同一点でのCm=0の乱れエネルギーの値 $k=k_0$ で除した k/k_0 をCmに対して示した。従来の結果と同様に、Cmの増加と共に k/k_0 は増加して行く。

（２）砂粒子の場合

① 流速分布特性； まず、計算結果に及ぼす相互作用項、Richardson数の影響を見るために、Run 5 の条件(d/h=0.0024)を用いて、Fig.6 に流速分布の計算結果を示した。この図より、本計算の条件では、Richardson数の影響は小さいが、相互作用項は無視できないことがわかる。また、相互作用項を考慮した場合には、板倉・岸[9] が指摘しているようなlog-linear則の成立が確認できる。以後の計算は、相互作用項、Richardson数の影響を考慮した計算結果を示している。

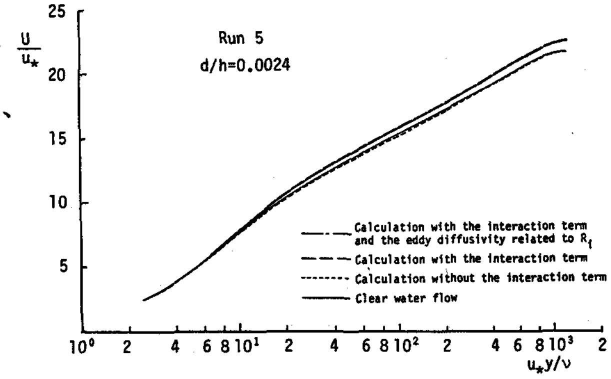

Fig.6 Effect of interaction term

次に、Run 2 の条件を用いて、流速分布に及ぼす濃度の効果を検討した。平均濃度を変化させて得られた流速分布を Fig.7に示した。この図より、濃度の増大とともに流速の値が減少していることがわかる。この結果は、今本・大年[11]、浅野[12]が指摘しているように、滑面上では浮遊砂濃度の増加に伴い抵抗係数が増大することに対応している。これは、滑面に特有の現象であることが今本・大年[11]により示されており、本研究で試みているように、粘性底層も含めた解析を行うことによって再現可能となる。次に、このことについて考察しよう。

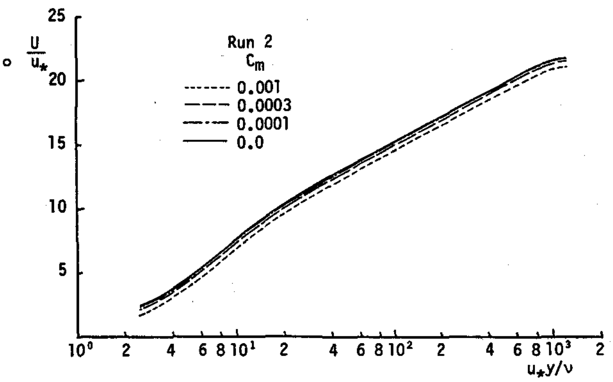

Fig.7 Effect of concentration

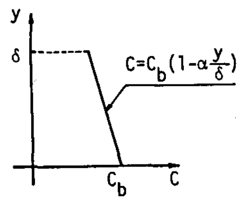

Fig.8 Definition sketch

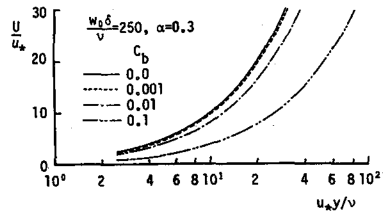

Fig.9 Effect of concentration for velocity

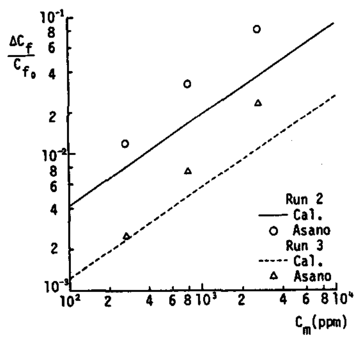

Fig.10 Relation between C_f and C_m

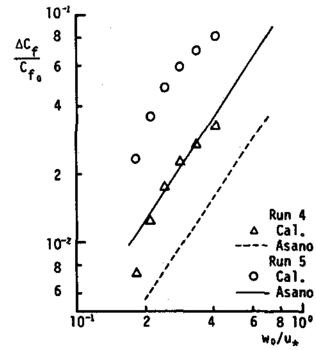

Fig.11 Relation between C_f and w_0

② 滑面における抵抗係数の増加機構； 粘性底層内で渦動粘性係数を無視すれば、運動方程式(3)は次のようになる。

$$\nu\frac{d^2U_{fx}}{dy^2}+\frac{g\sin\theta}{1-C}+U_{fx}\frac{dCw_0}{dy}=0 \qquad (23)$$

上式中、左辺第三項は固相の沈降により固相が液相に置き変わることによって生ずる応力伝達を示す。この項は、液相の連続式が厳密には $\partial U_{fi}/\partial x_i=\partial w_0C/\partial x_2$ となることに起因し、通常は Cが小さいことにより無視される。しかし、壁面近傍では C, $\partial C/\partial x_2$ がかなり大きな値をとることが予想され、この項を無視できないと考えられる。Fig.8 に示したような濃度分布を仮定し、$y=0$ で$U_{fx}=0$, $y=\delta$ で $\partial U_{fx}/\partial y=0$ としてC_bを変化させて(23)式を解くと、Fig.9 のような結果が得られる。すなわち、C_bの増加とともに流速は減少して行き、抵抗係数の増加機構が定性的に説明できる。

抵抗係数について定量的評価を行うためにRun 2-5 の計算結果と浅野の提案する次式[11]

$$\frac{\Delta C_f}{C_{f_0}}=14\,C_m^{2/3}\left(\frac{w_0}{u_*}\right)^{3/2} \qquad \left(0.2<\frac{w_0}{u_*}<0.7\right) \qquad (24)$$

を比較したのがFig.10,11 である。計算結果は、抵抗係数の変化過程をほぼ再現している。

6．結　語

本研究は、混相流での乱流モデルを用いて、滑面上の浮遊砂を有する開水路流れの抵抗則について検討したものであって、抵抗係数の濃度、沈降速度による変化過程がほぼ再現された。

参　考　文　献

(1) 細田尚，余越正一郎；第31回水理講演会論文集，1987,pp.581-586，(2) Patel,V.C.,Rodi,W. and Scheuerer,G.; AIAA J.,Vol.23,1985,pp.1308-1319，(3) Jones,W.P. and Launder,B.E.;Int. J. Heat Mass Transfer,Vol.15,1972,pp.301-314，(4) Lam,C.K.G. and Bremhorst,K.A.; ASME J.Fluid Eng., Vol.103,pp.456-460，(5) 関根正人，吉川秀夫；土木学会論文集，第387号／II-8,1987,pp.209-218，(6) 池田駿介，山坂昌成 他；土木学会論文集，第393号/II-9,1988,pp.57-66,(7) 牛島省，守屋祥一；電中研報告，No.U87070，1988，(8) Hinze,J.O.; Turbulence,McGraw-Hill,1975，(9)日野幹雄；土木学会論文集，第92号,1963,pp.11-20，(10) Itakura,T. and Kishi,T.; Proc.ASCE,Vol.106,No.HY8,1980, pp.1325-1343，(11)今本博健，大年邦雄；京大防災研究所年報，第22号B-2,1979,pp.453-468，(12) 浅野富夫；京都大学学位論文,1980