

乱流モデルの成層せん断流への適用
Application of Turbulence Model to Stratified Shear Flow

大阪大学工学部 室田 明 Akira MUROTA

大阪大学工学部 中辻啓二 Keiji NAKATSUJI

大阪大学大学院 藤崎 豊 Yutaka FUJISAKI

An algebraic stress model is applied to a two-dimensional buoyant surface jet for examining applicability of the turbulence model to stably stratified shear flows. Through comparison with experimental data, it is clear that reasonable calculations can be obtained for stably stratified flows when the buoyancy term is neglected in the ϵ -equation, although its treatment has remained unsolved and has been major weakness for using k - ϵ or extending k - ϵ models. The solution tested produces a good agreement with measurements on the flow development and turbulent entrainment and also the dependence of turbulence intensities and turbulence transports on the Richardson number.

Key words : turbulence model, stably stratified shear flows, buoyancy effects modelling

1. まえがき

原子炉容器等の内部流動や自然界に観られる成層流の数値解析はここ十数年活発に実施されている。モデル化に際して最も重要なことは、乱流輸送をいかに正確に表現するか、また安定成層流にあっては成層安定効果による乱れの減衰をいかに評価するかにある。乱流粘性や混合距離の0方程式モデルから、最近では応力方程式モデルまで多用され、近似精度の向上とともに方程式系が複雑になってきた。そのなかでも工学の分野で最も一般的に用いられるのは k - ϵ 二方程式モデルである。また、非均質性や非等方性の卓越した成層流場では、拡張 k - ϵ モデルというべき代数的応力モデルが多用される傾向にある。

成層流場においては、重力場が平均流場と連立されて解かれることはもちろんであるが、乱れエネルギー k や粘性消散率 ϵ の輸送方程式中にも浮力による生成項が負荷される。 k および ϵ の輸送方程式の誘導に際して、全ての項を計算可能なように時間平均量で表わすモデル化が行われる。その一般形はLaunder(1980)やRodi(1980)により詳細に解説されている。ただ、 ϵ の輸送方程式の浮力生成項の取扱いについては種々の議論がある。例えば、McGuirk-Papadimitriou(1986)は微小スケールの乱流運動が等方的であるならば、浮力生成項は無視できると報告している。この仮定はBritter et al.(1983)の強安定成層流の実験によっても支持されており、Gibson-Launder(1978)やViollet(1980)は同じ立場をとっている。一方、浮力生成項の必要性を唱えるのはRodi(1979)や岩佐等(1987)である。Rodiは実測した表層密度噴流の連行係数との比較から ϵ 方程式における浮力生成項の有効性を指摘しているが、計算された平均量の積分値である連行係数との比較であるから、彼の結論に首肯できない。このように、成層流場では比較できる信頼度の高い実測データが乏しいこともあって、浮力生成項の評価に関して定説がないのが現状である。

本研究では代数的応力モデルの適用を計り、成層せん断流場での乱流計算の可能性を検討する。対象とする流動は著者等(1984)が永年に亘って乱流計測を実施してきた二次元表層密度噴流である。自由水表面の存在に原因する鉛直方向乱れの減衰も存在するが、本論では成層効果のみに焦点を絞って考察する。まず、粘性消散率 ϵ の輸送方程式中の浮力生成項の影響を乱流計測結果との比較から検討する。つぎに、計算結果に基づいて成層安定効果による乱れの減衰について定量的に評価する。

2. 乱流モデル

非圧縮性流体、静水圧近似、ブーシネスク近似および境界層近似の諸仮定を適用すれば、流れおよび密度変化をもたらす保存物質（例えば、塩分濃度、熱）の基礎方程式はつぎのように表現できる。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{uw}) \quad (2)$$

$$0 = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + U \frac{\partial B}{\partial x} + W \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{wb}) \quad (4)$$

ここに、座標系は静水時の放流口の水表面を原点に採り、流下方向を x 軸、鉛直下向きを z 軸とする。 U 、 W は x 、 z 方向の平均流速成分、 u 、 w は乱れ変動成分である。密度 ρ は保存物質の濃度に比例すると仮定し、浮力パラメータ B は周囲環境水の密度 ρ_a を用いて $B = g(\rho_a - \rho)/\rho$ で表わす。

上式を完結させるためには、レイノルズ応力 $-\overline{uw}$ と乱流浮力流束 $-\overline{wb}$ を算定する必要がある。今回適用した代数的応力モデル（以下、ASM と称する。）は $\overline{u_i u_j}$ や $\overline{u_i b}$ の輸送方程式を直接解くレイノルズ応力モデルの基本的な特性を保持したままで、方程式系を代数的表現に簡略化したモデルである。その基本的な考え方は、 $\overline{u_i u_j}$ の輸送方程式の非定常項、移流項および拡散項を乱れエネルギー k の輸送方程式の対応する項で近似する方法である。Ljuboja-Rodi(1980)に従えば、全ての乱流諸量はつぎのように表現される。

$$\begin{aligned} \overline{w^2} &= \frac{2}{3} k \left\{ C_1 - 1 + \frac{P+G}{\epsilon} (C_2 - 2C_2 C_1 f) + \frac{G}{\epsilon} (3 - C_2 - 2C_3 + 2C_2 C_1 f) \right\} \left\{ C_1 + 2C_1 f + \frac{P+G}{\epsilon} - 1 \right\} \\ \overline{u^2} &= \frac{2}{3} k \left\{ \frac{P}{\epsilon} (3 - 2C_2 - 2C_2 C_1 f) + C_1 - 1 + \frac{3}{2} C_1 f \frac{\overline{w^2}}{k} \right\} \left\{ C_1 + \frac{P+G}{\epsilon} - 1 \right\}^{-1} \\ \overline{uw} &= -\frac{\overline{w^2}}{k} \left\{ 1 - C_2 + \frac{3}{2} C_2 C_1 f - (1 - C_{2b}) \frac{1 - C_3}{C_{1b}} \alpha \beta \right\} \left\{ C_1 + \frac{3}{2} C_1 f + \frac{1 - C_3}{C_{1b}} \beta \right\}^{-1} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\overline{ub} = -\frac{1}{C_{1b}} \frac{k}{\epsilon} \overline{uw} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{C_{2b} - 1}{C_{1b}} \overline{w^2} \frac{\alpha \beta}{g} \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\overline{wb} = -\alpha \overline{w^2} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\overline{b^2} = -\overline{wb} \frac{k}{\epsilon} C_R \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\text{ここに、} \quad \alpha = \left\{ C_{1b} + C_{1b} f + 2(1 - C_{3b}) C_R \beta \right\}^{-1}, \quad \beta = -g \frac{k^2}{\epsilon^2} \frac{\partial B}{\partial z}.$$

上記の代数的表現式にみられるように、全ての乱流諸量は次式に示す乱れエネルギー k ($= 1/2 \overline{u_i^2}$) と粘性消散率 ϵ ($= \nu \partial u_j / \partial x_i \partial u_i / \partial x_j$) の二つの輸送方程式を解くだけで算定できる点に ASM の利点がある。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P + G - \epsilon \quad (6)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \left\{ P + (1 - C_{\epsilon 3}) G \right\} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (7)$$

$$\text{ここに、} \quad P = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} = \nu_i \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \quad \text{and} \quad G = -\overline{wb} = \frac{\nu_i}{\alpha} \frac{\partial B}{\partial z}.$$

式(6),(7)は最も単純な表現であり、誘導に際しては物理的洞察に基づいて計算可能なようにモデル化されていることは言うまでもない。 ϵ 方程式中の生成および消散項は k 方程式中の対応する項 P 、 G 、 ϵ に比例すると仮定されている。(Launder・Spalding, 1974) これらのモデル化の問題点は経験的に用いられる ϵ 方程式のあいまいさ、とくに浮力効果の表現の不明確さにある。

式(5)中の f は自由水面減衰関数であり、水表面で特定された粘性消散率 ϵ_s を用いて次式で表わす。自由水表面条件に関しては別途(室田・中辻・藤崎, 1989)考察したので、ここでは省略する。

$$f = \frac{k^{3/2}}{C_w \epsilon} \frac{1}{Z_n + 0.04 k_s^{3/2} / \epsilon_s}, \quad \epsilon_s = k_s^{3/2} / (aH).$$

モデル定数は Gibson・Launder(1978)にしたがい、 $(C_1, C_2, C_3, C_1', C_2', C_{1b}, C_{2b}, C_{3b}, C_{1b}', C_R, C_w, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, a) = (1.8, 0.6, 0.5, 0.5, 0.3, 3.0, 0.33, 0.33, 0.5, 0.8, 5.0, 1.44, 1.92, 1.0)$ を用いた。 $C_{\epsilon 3}$ は種々変化させて、浮力生成項の乱れ変動に及ぼす感度解析を行った。

計算方法ならびに計算内容は室田・中辻(1986)と同一である。放流口条件は実験値から水深 $H_0 = 2.5\text{cm}$ で一様平均流速分布 $U_0 = 10\text{ cm/s}$ 、一様平均浮力分布 B_0 とし、 B_0 を $4.44, 1.11, 0.49\text{ cm}^2/\text{s}$ と変えることによって、密度フルード数 Fd_0 の値を $3.0, 6.0, 9.0$ と変化させた。 k および ϵ は $k_0 = 0.0025 U_0^2\text{ cm}^2/\text{s}^2$ 、 $\epsilon_0 = k_0^{3/2} / H_0\text{ cm}^2/\text{s}^3$ の一様分布を与えた。

3. ϵ 方程式における浮力生成項の影響評価

粘性消散率 ϵ の輸送方程式(7)中の浮力生成項 $C_{\epsilon 1} \cdot \epsilon / k \cdot (1 - C_{\epsilon 3})G$ の平均量ならびに変動量分布に及ぼす影響を把握するために、 $C_{\epsilon 3}$ の値を $1.0, 0.8, 0.0$ の3種類に変化させて数値計算を行った。 $C_{\epsilon 3} = 1.0$ は浮力生成項を無視した場合に、また $C_{\epsilon 3} = 0.0$ は浮力生成項の係数をせん断生成項と同じ値に設定した場合に相当する。また、 $C_{\epsilon 3} = 0.8$ は Rodi(1979)の推奨する値である。数値計算は $Fd_0 = 3.0$ と 6.0 の放流口条件の下で実施し、実験結果(室田・中辻, 1984)との比較を試みた。

図-1は平均浮力 B/B_0 の鉛直方向分布の流下方向変化を示す。 $Fd_0 = 6.0$ の水表面近傍の逓減割合に関して計算値が実験値に比べて少し小さい傾向にあることを除いて、計算結果は実験結果と良好に一致していることが分かる。詳細に観察すれば、平均浮力の鉛直分布は、 $C_{\epsilon 3}$ の値の減少とともに、わずかながら下方への拡がりを示し、実験値に近づく。しかしながら、その違いはわずかである。前報(室田・中辻, 1986)の渦動粘性・拡散係数を用いた計算結果と比較して、計算精度は格段に改善され、実験値と良好に一致しているのが確認できる。

図-2は流下位置 $x/H_0 = 40$ での平均流速 U/U_0 ならびに乱れ強度 u', w', b' の鉛直分布を示す。平均流速分布の計算値は平均浮力分布と同様の傾向を示している。すなわち、 $C_{\epsilon 3}$ の値の減少とともに、つまり ϵ 方程式中の浮力生成項の増加とともに、平均流速分布はわずかながら鉛直下方へ拡がる。 ϵ 方程式中の浮力生成項の増大は、式(7)、(6)から分かるように、 ϵ の減少、ひいては k の増加をもたらす、乱れ強度ならびに乱流輸送の増加を招く。この結果として、平均浮力および平均流速の鉛直下方への拡がりが見られたものと考えられる。

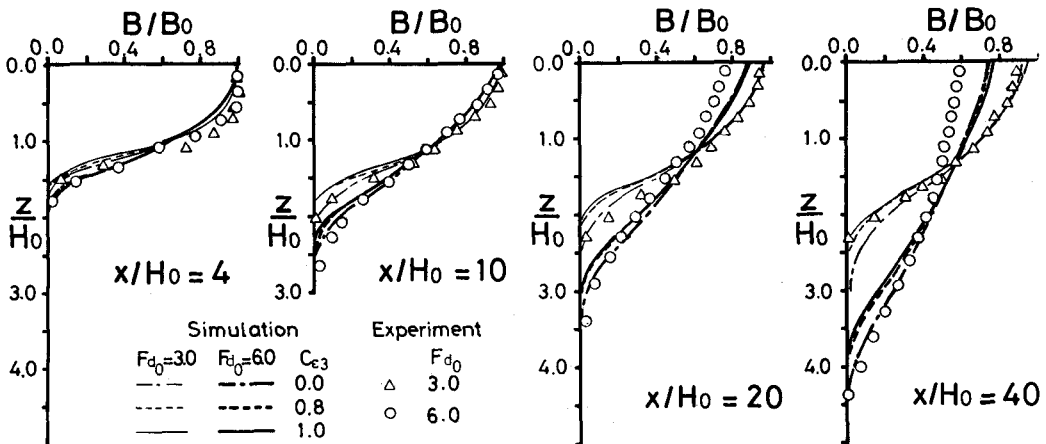


図-1 平均浮力 $B(z)/B_0$ の流下方向変化に及ぼす $C_{\epsilon 3}$ の影響

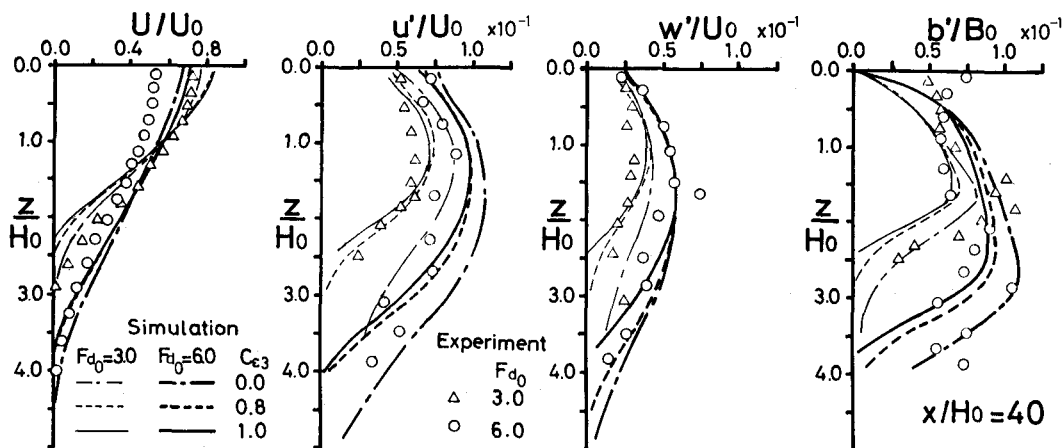


図-2 平均流速および乱れ強度の鉛直方向分布に及ぼす $c_{\epsilon 3}$ 値の影響

この傾向は乱れ強度の鉛直分布に明瞭に現われている。 $c_{\epsilon 3}$ の値の減少にしたがって乱れ強度の絶対値は増加しており、それは平均流速・浮力勾配の大きな鉛直下方でより顕著である。実験値と比較すれば、 $c_{\epsilon 3} = 1.0$ 、つまり浮力生成項を考えない場合の一致度が最も良く、平均流速・浮力分布の計算結果と逆の傾向を示す。 $c_{\epsilon 3} = 1.0$ と $c_{\epsilon 3} = 0.8$ の計算値の違いは実験値の誤差の範囲にあり、有意な差は認められない。

図-3は図-2に対応する流下位置での渦動粘性係数 ν_t ならびに渦拡散係数 σ_t の計算結果を示す。予想通り、 $c_{\epsilon 3}$ の値の減少とともに ν_t や σ_t は増加する傾向にあり、 ν_t の増加はせん断効果の卓越した $Fd_0 = 6.0$ の結果に、また σ_t の増加は成層効果の卓越した $Fd_0 = 3.0$ の計算結果に明瞭に現われている。前報では噴流に対して通常用いられる $\nu_t/U_0 H_0 = 0.0256$ を中立状態の渦動粘性係数として採用したが、それは多分に多き過ぎる値であったことが分かる。 $c_{\epsilon 3}$ による ν_t あるいは σ_t の値の差違が前述した平均流速・平均浮力分布の違いをもたらしている。

図-4は断面積分した表層流量の流下方向変化率で定義した進行速度 V_e と層平均リチャードソン数 $Riu (= \overline{B} H_u / \overline{U}^2)$ との関係を示す。Ellison-Turner(1959)と室田・中辻(1984)の実験値を同図に比較のために載せた。計算結果は Riu の増大とともに、換言すれば、成層安定度が増すとともに進行速度が低減する傾向を良好に予測している。

Rodi(1979)は同図の比較より $c_{\epsilon 3}$ の値として 0.6 - 0.8 を推奨しているが、今回の計算結果は

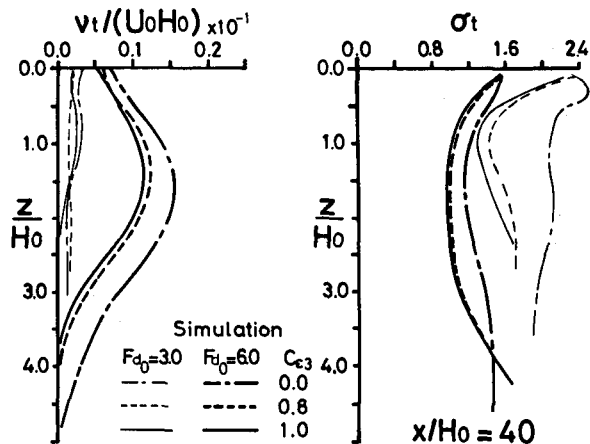


図-3 ν_t , σ_t の鉛直分布に及ぼす $c_{\epsilon 3}$ 値の影響

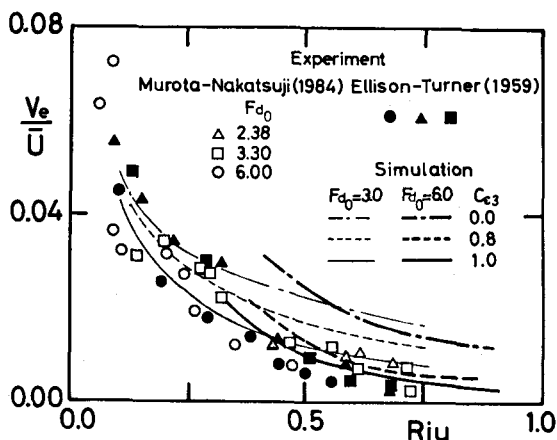


図-4 進行速度に及ぼす $c_{\epsilon 3}$ 値の影響

$c_{\epsilon_3} = 1.0$ 、つまり ϵ 方程式中の浮力生成項を無視した場合が実験値と最も良く合致することを示している。両者の結論の違いには水表面条件の違いが反映しているとも考えられる。強いて言えば、 C_{ϵ_3} の値を0.8程度に選ぶ範囲においては、進行速度に関する限り浮力生成項を無視した場合との差違はそれほど無い。ところが、 $c_{\epsilon_3} = 0.0$ の計算結果は $c_{\epsilon_3} = 0.0$ の計算結果と比べて2倍以上の違いが認められ、実験値とは合わなくなる。

以上の計算結果と実験値との比較より、安定な成層せん断流の解析においては粘性消散率 ϵ の輸送方程式に含まれる浮力による生成項は考慮しなくて良いことが定量的に結論づけられる。

4. 成層安定効果による乱れの減衰

安定な成層状態の下では乱流輸送や混合が減衰することが知られている。そこで、 $c_{\epsilon_3} = 1.0$ の計算結果を基に、成層度の指標である勾配型リチャードソン数 Ri と乱流諸量との関係を調べた。

図-5、6は乱れ強度 u' 、 w' と総乱れエネルギー $q = \sqrt{u'^2 + w'^2}$ との比率を示す。両図の上段は実験値、下段は計算値である。 Ri の増加とともに、つまり成層安定度が強まるとともに、 w' の比率が減少して、乱れの非等方性が増す。一方、 u' は Ri の影響を殆ど受けない。乱流モデル式(5)から求まる中立状態の非等方性度 u'/w' は、乱れの生成と消散との平衡状態を仮定すれば、約0.7となり、実験結果と良く合う。

つぎに、鉛直方向乱流輸送を表わす渦動粘性係数 ν_t と渦拡散係数 Γ_t と Ri との関係を示したのが図-7、8である。中立状態の ν_{t0} 、 Γ_{t0} は放流口近くの最大値を採用した。乱流輸送率は成層化とともに減少していくのが同図から分かる。計算結果と比較的に良く合うのは、既発表の実験公式のうちVan Rees(1975)とOdd-Rodger(1978)の提案式である。前報で用いたWebb(1970)の成

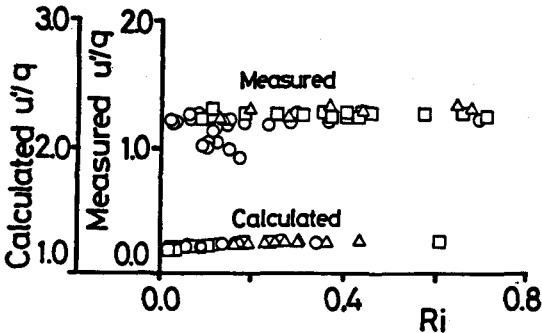


図-5 乱れ強度 u' と Ri との関係

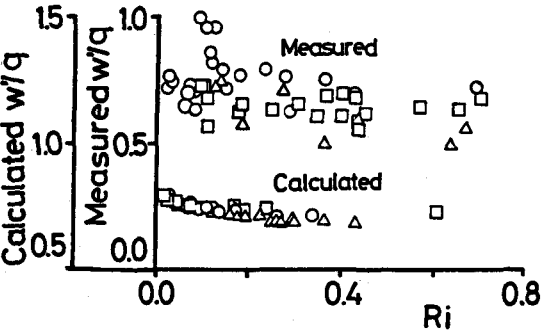


図-6 乱れ強度 w' と Ri との関係

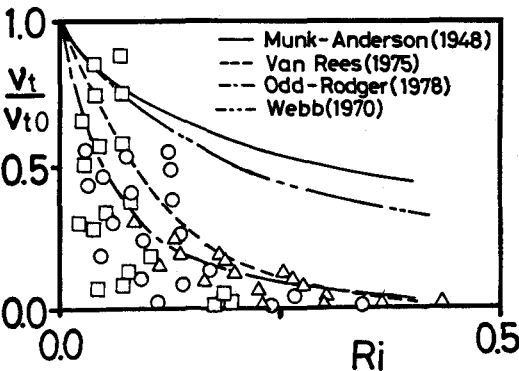


図-7 ν_t/ν_{t0} と Ri との関係

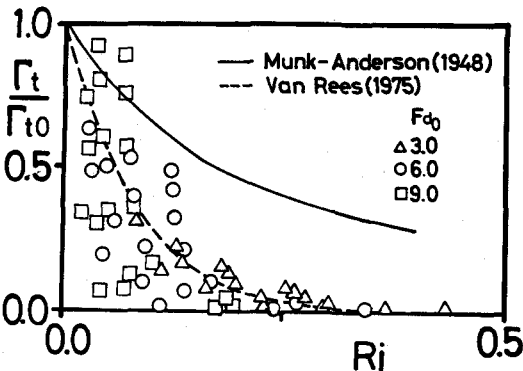


図-8 Γ_t/Γ_{t0} と Ri との関係

層化による低減割合は少し小さいことが分かる。この違いが前報での平均流速や平均浮力の鉛直分布における過大な拡がりに影響を及ぼしている。

図-9は混合長 l_m/l_{m0} の計算結果を実験・実測結果と比較したものである。計算結果は West-Shiono(1988) の実測結果と良好な一致を示している。しかし、全般的には計算値は少し大きめの減衰を示し、彼等の提案式は計算結果の上限に対応する。 $Ri < 0.1$ の範囲で l_m の値は急激に減少する。これには $\overline{uw}$ の減少と $\partial U / \partial z$ の増大が相乗的に効果を及ぼすが、後者の影響の方が非常に大きい。 $Ri > 0.2$ の範囲では l_m/l_{m0} は一定値 0.13 となる。

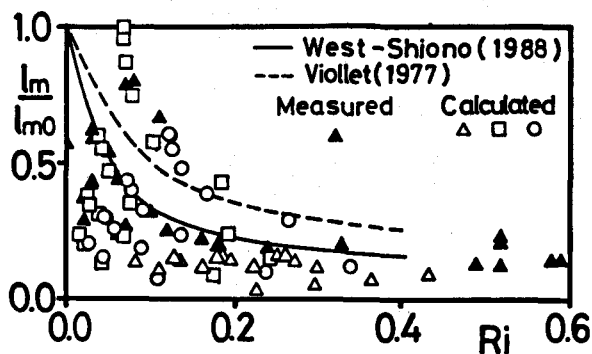


図-9 l_m/l_{m0} と Ri との関係

5. あとがき

代数的応力モデルを用いて二次元表層密度噴流の数値計算を行い、実験結果との比較から乱流モデルの成層流への適用性について基礎的な検討を行った。永年に亘って懸案になっていた粘性消散率 ϵ の輸送方程式に含まれる浮力生成項は安定成層流においては考慮する必要がないことが分かった。また、計算結果は表層密度噴流の流動特性を良好に予測するとともに、乱れや乱流輸送の減衰が成層安定度の指標である勾配型リチャードソン数の関数で表示されることが分かった。

参考文献

- Britter, R.E., Hunt, J.C.R., Marsh, G.L. and Snyder, W.H. (1983) J. Fluid Mech., Vol.127, pp.27-44.
 Ellison, T.H. and Turner, J.S. (1959) J. Fluid Mech., Vol.6, pp.423-448.
 Gibson, M.M. and Launder, B.E. (1978) J. Fluid Mech., Vol.86, pp.491-511.
 岩佐義朗・細田尚・伊藤邦展 (1987) 京都大学防災研究所年報, 第30号, B2, pp.583-595.
 Launder, B.E. (1980) Turbulence Models and Their Application, Eyrolles, pp.2-147.
 Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1974) Comp. Math. Appl. Mech. Eng., Vol.3, 269p.
 Ljuboja, M. and Rodi, W. (1980) J. Fluid Engng., Vol.102, pp.350-356.
 McGuirk, J.J. and Papadimitriou, C. (1986) Proc. Intl. Symp. Buoyant Flows, pp.242-255.
 Munk, W.H. and Anderson, E.R. (1948) J. Mar. Res., Vol.7, pp.276-295.
 室田明・中辻啓二 (1984) 土木学会論文集, 第351/II-2号, pp.97-106.
 室田明・中辻啓二 (1984) 土木学会論文集, 第351/II-2号, pp.107-116.
 室田明・中辻啓二 (1986) 土木学会第30回水理講演会論文集, pp.715-720.
 室田明・中辻啓二・藤崎豊 (1989) 土木学会論文集 (投稿中)
 Odd, N.V.M. and Rodger, J.G. (1978) Proc. ASCE, Vol.104, No.HY3, pp.337-351.
 Rodi, W. (1979) Proc. 2nd Symp. Turbulent Shear Flows, pp.10-37-42.
 Rodi, W. (1980) Turbulence Modelling: a state of the art review, IAHR Delft.
 Van Rees, A.J. (1975) Proc. XVI Congr. IAHR, Vol.3, pp.309-315.
 Viollet, P.L. (1977) Thesis, University Paris 6.
 Viollet, P.L. (1980) Proc. 2nd Intl. Symp. Stratified Flows, pp.315-325.
 Webb, E.K. (1970) Quart. J. Roy. Met. Soc. Vol.35, pp.67-90.
 West, J.R. and Shino, K. (1988) Estuarine Coastal Shelf Sci., Vol.26, pp.51-66.