

乱れ場の特性量を考慮した乱流プラントル数の表示式
Effects of a Turbulent Field on Turbulent Prandtl Number

(財) 電力中央研究所 牛島 省 Satoru USHIJIMA

This paper describes an investigation of the effects of characteristic values in a flow field on turbulent Prandtl number. The relational expressions of the dissipation rate of temperature fluctuation were obtained in an isotropic turbulent field when the turbulence became both sufficiently strong and weak. Consequently it became clear that in general a coefficient, included in the expression of the turbulent Prandtl number proposed by Launder, turned out to be a function of characteristic values in a field, such as turbulent Reynolds number, turbulent Peclet number and so on. The expression of the turbulent Prandtl number was generalized with this result, and it was verified that the tendencies of some previous experimental results on the turbulent Prandtl number could be explained qualitatively by this modified expression.

Keywords : turbulent Prandtl number, dissipation rate of temperature fluctuation, spectrum function of temperature, stratified shear flow

1. はじめに

本報では、成層流において重要な乱流量である乱流プラントル数の表示式に関する考察を行う。乱流プラントル数を対象とした既往の実験的な研究結果に認められる1つの傾向として、図1に示すように個々の研究では乱流プラントル数は安定度を表すパラメータの関数として比較的よくまとまって整理されているが、いくつかの研究結果を全体として見た場合には、一意的な関数形に帰着せず、結果のばらつきが大きくなっている。このことから、乱流プラントル数は、安定度を表すパラメータのみによって決定されるものではなく、乱れ場の特性を表す他のパラメータとも関係していると考えられる。

本報では、等方性乱流場を対象とした考察から、Launder¹⁾が示した乱流プラントル数の表示式中に含まれる温度変動量の散逸率に関係する定数が、一般的には乱流レイノルズ数、乱流ペクレ数といった乱れ場の特性量の関数であることを示す。そしてこれらの乱れ場の特性量が、Launderによって示された関係式を通じて乱流プラントル数にどのように影響するのかを考察した。

2. 考察

2.1 等方性乱流場における温度変動量の散逸率

L 、 L_θ をそれぞれ流速および温度に関する積分特性距離とし、波数 k に対して無次元波数 χ 、 χ_θ を次のように定義する。

$$\chi = kL, \quad \chi_\theta = kL_\theta \quad \text{--- (1)}$$

また、乱れの強さに関係した乱流レイノルズ数、乱流ペクレ数をそれぞれ次のように定義する。

$$Re_T = \left(\frac{3}{2}\overline{u^2}\right)^{1/2} L / \nu, \quad Pe_T = \left(\frac{3}{2}\overline{u^2}\right)^{1/2} L_\theta / \alpha \quad \text{--- (2)}$$

ここで、 u は流速の変動成分、 ν は動粘性係数、 α は熱拡散係数である。Rotta²⁾が示した等方性乱流場の相似仮説を温度変動のスペクトル関数 E_θ に用いれば、 E_θ は一般的に

$$E_\theta = \overline{\theta^2} L_\theta \phi_\theta(\chi_\theta, Re_T, Pe_T, \sigma_\theta) \quad \text{--- (3)}$$

と表される。ここに、 θ は温度の変動成分、 ϕ_θ は無次元関数であり、 σ_θ は温度変動場の大局的構造に関係した定数である。乱れが強くと、 Re_T および Pe_T が十分に大きい場においては、Rottaが示した相似仮説を(3)式に用いると、無次元関数 ϕ_θ に対して熱拡散係数 α および動粘性係数 ν の影響は小さくなり、 γ_θ を定数として ϕ_θ は次式で表現されると考えられる。

$$\phi_\theta = \phi_\theta(\chi_\theta, \sigma_\theta) = \gamma_\theta \chi_\theta^{-5/3} \quad \text{--- (4)}$$

乱れが十分に強い場において、Obukhov³⁾、Corrsin⁴⁾は、Kolmogorov⁵⁾の局所相似性の仮説を温度変動のスペクトル関数 E_θ に適用して、次の関係式を得た。

$$E_{\theta} = n \varepsilon_{\theta} \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad \text{--- (5)}$$

ここに n は定数であり、 ε 、 ε_{θ} はそれぞれ乱れの運動エネルギーの散逸率、温度変動量の散逸率である。

(1)、(3)、(4)、(5) 式より、 ε_{θ} に関する次の関係式が得られる。

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\gamma_{\theta}}{n} \frac{\overline{\theta^2}}{L_{\theta}^{2/3}} \varepsilon^{1/3} \quad \text{--- (6)}$$

上式と同様の結果は、岩佐・細田・松井⁶⁾によっても得られている。

Rotta は、乱れの運動エネルギーの散逸率 ε に関して、次式を示した。

$$\varepsilon = c \frac{\left(\frac{3}{2} \overline{u^2}\right)^{3/2}}{L} \quad \text{--- (7)}$$

乱れが十分に強い場合、Rotta は上式中の c が定数 (0.2) に漸近することを示した。一方、乱れの状態がこれとは異なるとき、Rotta はエネルギースペクトル関数の相似解を Heisenberg⁷⁾ の輸送モデルを用いて求め、(7) 式を一般化して c が乱流レイノルズ数 Re_T の関数 $c(Re_T)$ であることを示した。このようなことから、乱れが強い場において成り立つ関係式 (6) 式を用いて、乱れが比較的弱い場合も含めて一般的に ε_{θ} を

$$\varepsilon_{\theta} = c_1 \frac{\overline{\theta^2}}{L_{\theta}^{2/3}} \varepsilon^{1/3} \quad \text{--- (8)}$$

と表すとき、 c_1 は定数でなく流れの場の特性を表すパラメータの関数になると考えられる。等方性乱流場で乱れが非常に弱くなった減衰終期においては、次式で示される温度変動のスペクトル方程式中の輸送関数 T を無視することができる。

$$\frac{\partial E_{\theta}}{\partial t} + T + 2\alpha k^2 E_{\theta} = 0 \quad \text{--- (9)}$$

このような状態の E_{θ} は (9) 式を時間積分することにより求められ、Hinze⁸⁾ は次式を導いた。

$$E_{\theta} = c_0 k^2 \exp(-2\alpha k^2 t) \quad \text{--- (10)}$$

ここに c_0 は定数である。また、同様の場において、Hinze は積分特性距離 L_{θ} に関して

$$L_{\theta}^2 = 2\pi \alpha t \quad \text{--- (11)}$$

なる関係式を示した。(10)、(11) 式より t を消去すれば、

$$E_{\theta} = c_0 k^2 \exp(-k^2 L_{\theta}^2 / \pi) \quad \text{--- (12)}$$

が得られる。一方、上式より、

$$\overline{\theta^2} = \int_0^{\infty} E_{\theta} dk = c_0 \int_0^{\infty} k^2 \exp(-k^2 L_{\theta}^2 / \pi) dk = c_0 (\pi^2 / 4) L_{\theta}^{-3} \quad \text{--- (13)}$$

となる。従って、 c_0 は

$$c_0 = (4 / \pi^2) \overline{\theta^2} L_{\theta}^3 \quad \text{--- (14)}$$

で与えられる。これらのことから、乱れが非常に弱い場での ε_{θ} は、(12) 式と、(14) 式より、次のように求められる。

$$\varepsilon_{\theta} = 2\alpha \int_0^{\infty} k^2 E_{\theta} dk = 3\pi \alpha \overline{\theta^2} L_{\theta}^{-2} \quad \text{--- (15)}$$

また、(7)、(8) 式より ε を消去すると、

$$\varepsilon_{\theta} = c_1 c^{1/3} \lambda^{-1/3} \frac{\overline{\theta^2} \left(\frac{3}{2} \overline{u^2}\right)^{1/2}}{L_{\theta}} \quad \text{--- (16)}$$

が得られる。ここに λ は積分特性距離の比の値で、

$$\lambda = L / L_{\theta} \quad \text{--- (17)}$$

である。(15) 式を (16) 式に代入して ε_{θ} を消去すれば、 Pe_T が 0 に漸近した場合の c_1 に対する次の関係式が得られる。

$$c_1 = 3\pi c^{-1/3} \lambda^{1/3} \frac{1}{Pe_T} \quad \text{--- (18)}$$

特に Re_T と Pe_T がともに十分小さい値となる場合には、Rotta の結果を用いて、 c_1 は次式のように表わされる。

$$c_1 = 3\pi \left(\frac{5\pi}{4} \frac{1}{\text{Re}_T} \right)^{-1/3} \lambda^{1/3} \frac{1}{\text{Pe}_T} \quad \text{--- (19)}$$

上式が Re_T と Pe_T が十分小さくなった場合の c_1 を示すもので、これより c_1 は Re_T 、 Pe_T および積分特性距離の比 λ あるいはプラントル数 Pr を用いて一般に次のように表示されることが考えられる。

$$c_1 = c_1(\text{Re}_T, \text{Pe}_T, \lambda) \quad \text{or} \quad c_1 = c_1(\text{Re}_T, \text{Pe}_T, \text{Pr}) \quad \text{--- (20)}$$

2. 2 温度変動のスペクトル方程式の相似解に関する基礎式

Rotta は等方性乱流場における乱れのエネルギースペクトル関数に対して Heisenberg の輸送モデルを用いてその相似解を求めた。ここでは、これとほぼ同様の手法により、温度変動のスペクトル関数の相似解を得るための方程式を導く。温度場において次のような大域的構造に関連する不変量 A_θ の存在を仮定する。

$$A_\theta = a_\theta \overline{\theta^2} L_\theta^{\gamma+1} = \text{const.} \quad \text{--- (21)}$$

ここに a_θ 、 γ は定数である。Hinze の結果より得られた (14) 式を考慮すると、ここでは $\gamma = 2$ となる。

(9) 式を積分表示式とした場合に、その左辺の項は (21) 式を用いて次のように変形される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E_\theta(k, t) dk = \frac{d \overline{\theta^2}}{dt} \left(\int_0^k \phi_\theta d\chi_\theta - \frac{1}{1+\gamma} \phi_\theta \chi_\theta \right) \quad \text{--- (22)}$$

さらに、(9) 式の右辺第 1 項の輸送項に対して Pao⁹⁾ により示された輸送モデルを用いると、その積分形は次のように表される。

$$\int_0^k T(k, t) dk = m^{-1} \varepsilon^{1/3} k^{5/3} E_\theta(k, t) \quad \text{--- (23)}$$

ここに m は定数である。また、これとは別に Heisenberg の輸送モデルを用いれば、Hinze により示された結果を用いて次の関係式が得られる。

$$\int_0^k T(k, t) dk = \kappa_\theta \int_k^\infty \left\{ \frac{E(k, t)}{k^3} \right\}^{1/2} dk \int_0^k 2k^2 E_\theta(k, t) dk \quad \text{--- (24)}$$

ここに κ_θ は定数、 $E(k, t)$ はエネルギースペクトル関数である。(23)、(24) 式より、相似解 ϕ_θ を求めるための基礎方程式はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} c_T \left(\int_0^k \phi_\theta d\chi_\theta - \frac{1}{1+\gamma} \phi_\theta \chi_\theta \right) \\ = m^{-1} c^{1/3} \chi_\theta^{5/3} \phi_\theta + \lambda^{1/3} \frac{2}{\text{Pe}_T} \int_0^k \chi_\theta^2 \phi_\theta d\chi_\theta \end{aligned} \quad \text{--- (25)}$$

$$\begin{aligned} c_T \left(\int_0^k \phi_\theta d\chi_\theta - \frac{1}{1+\gamma} \phi_\theta \chi_\theta \right) = \kappa_\theta \lambda^{4/3} \int_k^\infty \left(\frac{\phi}{\chi^3} \right)^{1/2} d\chi \int_0^k 2\chi^2 \phi_\theta d\chi_\theta \\ + \lambda^{1/3} \frac{2}{\text{Pe}_T} \int_0^k \chi_\theta^2 \phi_\theta d\chi_\theta \end{aligned} \quad \text{--- (26)}$$

(26) 式中の ϕ はエネルギースペクトル関数の相似解である。これらの式中の c_T は、 c_1 および c あるいは相似解 ϕ_θ と次の関係がある。

$$c_T = c_1 c^{1/3} \quad \text{--- (27)}$$

および

$$c_T = \frac{2\lambda}{\text{Pe}_T} \int_0^\infty \chi_\theta^2 \phi_\theta d\chi_\theta \quad \text{--- (28)}$$

従って、Rotta が示した c と Re_T の関係等を用いて、(25) 式あるいは (26) 式を (28) 式と連立させて解くことにより相似解 ϕ_θ が求められ、その結果に (27) 式を用いて (20) 式の具体的な形が得られると考えられる。しかしながら、ここではこれらの方程式の解を得るための解法上の困難が伴ったため、 c_1 に対する近似的な表示を行った。まず、 c と Re_T の関係には Rotta が示した結果に対する近似式として次の関係式を用いる。

$$c = \frac{5\pi}{4} \frac{1}{\text{Re}_T} \frac{1+0.06\text{Re}_T}{1+0.01\text{Re}_T} + 0.2 \quad \text{--- (29)}$$

上式と Rotta の結果を図 2 に示した。両者はほぼ一致している。一方、 c_1 に対しては Pe_T が無限大あるいは 0 に漸近した場合の表示式 (6)、(18) 式を用いて簡単に次式で表現されたと仮定した。

$$c_1 = 3\pi c^{-1/3} \lambda^{1/3} \frac{1}{Pe_T} + \frac{\gamma_\theta}{n} \quad \text{--- (30)}$$

上式で表される c_1 は、 $Pe_T \rightarrow \infty$ で (6) 式、 $Pe_T \rightarrow 0$ で (18) 式に近づく。 γ_θ の値は明らかでないが、後述するように、Gibson と Launder¹⁰⁾ の結果を用いると、 γ_θ / n は 0.43 という値になる。(29)、(30) 式を用いて、 $\gamma = 2$ 、 $\gamma_\theta / n = 0.43$ 、 $\lambda = 1$ とした場合のいくつかの Re_T および Pe_T ($Re_T = Pe_T$) に対する、(25) 式から得られる ϕ_θ と χ_θ の関係を図 3 に示した。(30) 式の c_1 の表示は仮定として得られたものであるが、得られた ϕ_θ の分布を用いて (28) 式より求められる c_T の値と、(27) 式から求められる c_T の値との誤差は $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 程度のオーダーと小さいものとなっている。

2. 3 乱流プラントル数の表示式

Launder¹⁾ は、レイノルズ応力や乱流熱フラックスの輸送方程式に対する second-order のモデル化を行って、それらの代数的方程式から成層流中の乱流拡散係数や乱流プラントル数に対する表示式を導いた。その結果を用いれば、運動量および熱の乱流拡散係数に相当する無次元パラメータ β' 、 γ' は次式で表される。

$$\beta' = \phi \{1 + \phi (\phi_T + \phi_i \gamma' / \beta') B\}^{-1} \quad \text{--- (31)}$$

$$\gamma' = \phi_T (1 + \phi_i c_i B)^{-1} \quad \text{--- (32)}$$

ここに ϕ 、 ϕ_T 、 ϕ_i 、 c_i は係数であり、 B は次式で定義される成層流の安定度を表すパラメータである。

$$B = \beta g \left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \quad \text{--- (33)}$$

ここに β 、 g 、 q 、 Θ は、それぞれ体膨張係数、重力加速度、乱れの運動エネルギー、平均温度であり、 x_3 は鉛直上向きの座標成分である。(31)、(32) 式より乱流プラントル数 Prt は、等温状態 ($B \rightarrow 0$) の時の Prt を Prt_0 として次のように表される。

$$\frac{Prt_0}{Prt} = \frac{\gamma'}{\beta'} = \frac{1 + \phi \phi_T B}{1 + \phi_i (c_i - \phi_T) B} \quad \text{--- (34)}$$

Launder によれば、上式中の係数 c_i は、次のようなモデル化を行う際に導入されたものである。

$$\frac{1}{2} \varepsilon_\theta = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{1}{c_i} \frac{\varepsilon \theta^2}{q} \quad \text{--- (35)}$$

一方、上式と同等の関係式は、これまでに導いた等方性乱流場における諸関係式からも導かれる。すなわち、(7)、(8)、(17) 式より次式が得られる。

$$\varepsilon_\theta = c_1 c^{-2/3} \lambda^{2/3} \frac{\varepsilon \theta^2}{\left(\frac{3}{2} u^2\right)} \quad \text{--- (36)}$$

(35)、(36) 式より c_i に対して次の関係式が導かれる。

$$c_i = 2 c_1^{-1} c^{2/3} \lambda^{-2/3} \quad \text{--- (37)}$$

これまでの考察から、 Re_T および Pe_T が十分大きい場では上式中の c_1 および c はある定数に漸近するため c_i も定数となり得るが、より一般的には、 c_i は Re_T および Pe_T 等の関数であると考えられる。このため、(37) 式を考慮すると、(34) 式で表される乱流プラントル数は安定度を示すパラメータ B のみの関数ではなく、 Re_T や Pe_T 等の乱れ場の特性量をも含んだ関数として表現される。Launder が示した (34) 式の中には、温度変動量の散逸率に関係する係数 c_i 以外にも、レイノルズ応力の輸送方程式に含まれる Pressure-Strain 項や乱流熱フラックスの輸送方程式中にある Pressure-Scrambling 項に由来する係数が含まれており、より一般性のある乱流プラントル数の表示式を得るためには、乱れ場の特性量がそれらの係数に与える影響についても考察を加える必要がある。しかしながら、Pressure-Strain 項に関しては、Hanjalic ら¹¹⁾ は乱流レイノルズ数の効果は考慮していないことなどから、ここではこれらの項に対する乱れ場の特性量の影響は考慮しないものとする。

以上の結果を用いて、乱流プラントル数に対する乱れ場の特性量の影響について検討する。著者ら¹²⁾ は、冷温水により形成される成層流の乱流計測実験を行い、乱流プラントル数と局所勾配型リチャードソン数 Ri との関係求めた。その結果、図 1 に示したように、乱流プラントル数の逆数 Prt_0 / Prt は、Launder の関係式よりも Ri の増加に対する低減が大きいものとなった。この実験結果に対して、著者¹³⁾ が提案した積分特性距離 L_θ に関する次のモデル式を適用して Pe_T を算出した。

$$L_g = \frac{C_E}{C_1} \frac{q^{1/2} \theta^2}{-u_3 \theta (\partial \Theta / \partial x_3)}, \quad \frac{C_E}{C_1} = 0.36 \quad \text{--- (38)}$$

得られた Pe_T と Ri の関係を図4に示す。 Pe_T は Ri の増加に伴い、やや低減する傾向が見られる。 $\lambda \cong 1$ とし、水では $Pr \cong 7$ であることを考慮して、 $Re_T \cong 140$ 、 $Pe_T \cong 1000$ とした場合の Pr_{to}/Pr_t と B の関係を図5に示した。その際に、GibsonとLaunder¹⁰⁾により示された $c_T = 1.6$ という値が、 Re_T および Pe_T が十分大きい場で得られたものと考え、 $\lambda \cong 1$ 、 $c = 0.2$ とすれば (37) 式より $c_1 = 0.43$ となることから、 γ_g/n は 0.43 とした。その Pr_{to}/Pr_t と B の関係は、図1の実験結果と同様に、Launderの示した関係式よりも安定度を示すパラメータの影響を強く受け、 B の増加に伴い Pr_{to}/Pr_t はより大きく低減する傾向を示すものとなっている。また、Komori¹⁴⁾らによる成層流中の乱流計測実験では、図1に示すように、 Pr_{to}/Pr_t と Ri の関係を表す実験結果は著者らの結果よりさらに下方に位置するものとなっている。Komoriの実験では、成層流の鉛直方向の長さスケールや乱れ強度等が著者らの実験と比較して小さいことから、 Re_T および Pe_T はさらに小さいものとなっていると考えられる。図5に $\lambda \cong 1$ とした条件下で、 Re_T および Pe_T を著者らの実験から得られた値より1オーダー、2オーダーと低下させた場合の Pr_{to}/Pr_t と B の関係を示した。これらの結果は図1のKomoriの結果が示す傾向と定性的に一致するものとなっている。また、Webster¹⁵⁾は、空気を用いた温度成層流中の乱流量を計測した。空気では $Pr \cong 1$ であることを考慮して、 $\lambda \cong 1$ 、 $Re_T = Pe_T = 10$ 、1とした場合の Pr_{to}/Pr_t と B の関係を図5に示した。 $\lambda \cong 1$ の下では、 c_T は $Re_T \rightarrow 0$ で (5/6) Pr に漸近する。従って空気を対象とする場合には、乱れが十分小さくなると c_T が 1.6 よりも小さくなるため、図5に示したように Pr_{to}/Pr_t は B にあまり依存しなくなる傾向を示す。なお、 $Pr_{to}/Pr_t \leq 1$ なる条件が要求される場合には、 $\phi_T (c_T - \phi_T) \geq \phi \phi_T$ が満たされる範囲内で (34) 式は有効なものとなる。

3. おわりに

本報では、等方性乱流場を対象とした考察から、Launderが示した乱流プラントル数の表示式に含まれる温度変動量の散逸率に関する定数が、乱流レイノルズ数や乱流ペクレ数等の乱れ場の特性量の関数であることを明らかにした。そしてこれらの特性量の影響を表示式中に考慮することにより、乱流プラントル数に関する既往の実験結果が示す個々の定性的な傾向を表現し得ることを示した。今後は本報中で仮定として用いた関係式や係数値等をより明確なものとしてゆくと同時に、等方性乱流場で得られた表示式の成層流中における有効性等に関する検討を行い、それらの結果を数値解析モデル中に反映させてゆく予定である。

《参考文献》

- 1) Launder, B.E.; On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech., vol. 67, 1975.
- 2) Rotta, J.C.; 乱流 (大路通雄訳), 岩波書店, 1975.
- 3) Obukhov, A.M.; Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Geogr. i Geofiz., 13, 58, 1949.
- 4) Corrsin, S.; J. Appl. Phys. 22, 1951.
- 5) Kolmogorov, A.N.; C. R. Acad. Sci. USSR 30, 301, 1941.
- 6) 岩佐義明・細田尚・松井健一郎; 開水路流れにおける濃度変動場の伝播特性, 京都大学 防災研究所年報 第29号B-2 別刷, 昭和61年.
- 7) Heisenberg, W.; Zur statistischen Theorie der Turbulenz, Z. Phys. 124, 1948.
- 8) Hinze, J.O.; Turbulence, Second Edition, MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1975.
- 9) Pao, Y.H.; Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers, Physics of Fluids, vol. 8, 1965.
- 10) Gibson, M.M. and Launder, B.E.; Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer, J. Fluid Mech., vol. 86, 1978.
- 11) Hanjalic, K. and Launder, B.E.; Contribution towards a Reynolds-stress Closure for Low-Reynolds-number Turbulence, J. Fluid Mech., vol. 74, 1976.
- 12) 牛島 省・守屋祥一; 2方程式乱流モデルの成層流への適用性, 電力中央研究所報告, 研究報告, U87070, 1988.

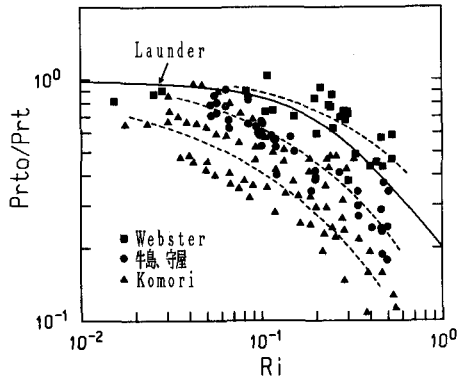


図1 乱流プラントル数と勾配型リチャードソン数

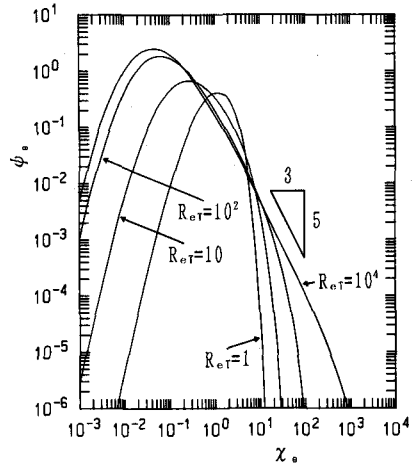


図3 ϕ_0 と χ_0 の関係

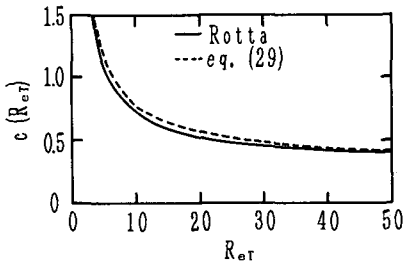


図2 $c(Re_\tau)$ と Re_τ の関係

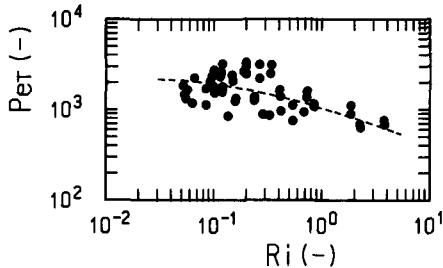


図4 Per と Ri の関係

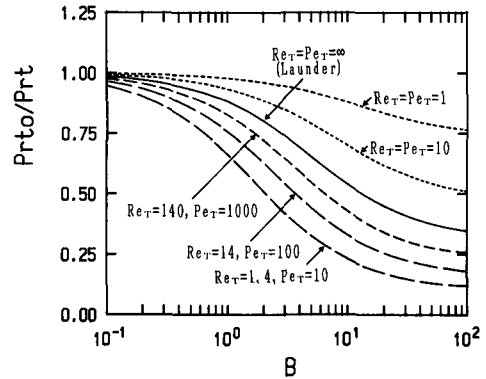


図5 $Prto/Prt$ と B の関係

- 13) 牛島 省; 成層流における温度相関の積分特性距離に関するモデル式の提案, 電力中央研究所報告, 研究報告 U87057, 1988.
- 14) Komori, S.; Turbulence Structure in Stratified Flow, Ph.D. dissertation., Kyoto University, 1980.
- 15) Webster, C.A.G.; An Experimental Study of Turbulence in a Density-stratified Shear Flow, J. Fluid Mech., vol. 19, 1964.