

開水路段落ち流れの乱流構造に関する実験及び数値計算

International Collaboration between Japan and Germany on Experimental and Numerical Studies of
Turbulent Structure in Open-Channel Backward-Facing Step Flows

京都大学工学部土木工学教室 禰津 家久、中川 博次 [Iehisa Nezu, Hiroji Nakagawa]
Erlangen大学流体力学研究室 Georg Scheuerer and Beate Papritz-Wagner

《Abstract》

An international collaboration on experimental and numerical studies of turbulent open-channel step flows has been conducted between Kyoto University and University of Erlangen-Nürnberg. The experiments were carried out with high accurate two-component Laser Doppler anemometer(LDA) in open-channel step flows, whereas the calculations were conducted using $k-\epsilon$ turbulence model with collocated (non-staggered) variable arrangement. Five test cases with different Reynolds and Froude numbers (see Table 1) were considered. The very good agreement of the calculations with the experimental data was obtained not only for mean velocity distributions, but also for turbulence characteristics such as the turbulent energy k , Reynolds stress $-\overline{uv}$ and turbulent dissipation ϵ . The reattachment length could be predicted accurately. Keywords: $k-\epsilon$ model, Open-channel step flows, Numerical calculations, LDA measurements.

1. 序 論

流れには層流と乱流とがあるが、自然界の流れの大半は乱流と言っても過言ではなく、乱流現象の解明は流体力学の中で最も重要であるが、しかし最も難解な現在でも解明し尽くされていない魅力あふれる研究分野である。Navier-Stokes(N-S)の式 of 非線形性やカオス特性によって乱流理論の展開は容易ではなく、自然界に適用できるせん断乱流理論はまだ未完成である¹⁾。自然界の流れ、具体的には土木工学分野の河川・湖沼・海岸・海洋の流れ(Geophysical Flows)、またダム水理や水路などの人工の水理構造物での流れ、一方、機械工学や航空工学などの分野では流体機器内での流れなどが乱流の代表例である。この乱流構造を解明することが流れの制御や水理構造物また流体機器の合理的な設計のためには不可欠であり、これまでに主として実験的研究によって解明されて来た。この研究動向は今後も変わらないであろうと考えられるが、近年のコンピュータの急速な発展、特にスーパー・コンピュータの開発によって従来は層流しか数値計算が可能ではなかったものが、主流規模の大規模渦から熱逸散に關与するKolmogoroffスケールの微小渦までの大幅なスペクトル分布をもつ乱流を数値計算できるようになって来た²⁾。正に数値流体力学の誕生であり、これまでの乱流の実験的研究を補完するべき有力な道具となって来た。コンピュータの能力がさらに進展すると、数値流体力学が主で、実験流体力学が従となる時代が到来するかも知れない。

さて、乱流の数値計算には 1) 多方程式モデル、2) Large-Eddy Simulation (LES)、3) Direct Numerical Simulation(DNS)とがある。1) は乱流の完全なモデル化、2) は計算格子以上の大規模渦はN-S式の直接計算であるが、計算格子以下の微小渦は乱流のモデル化が行われ、3) になって初めてモデル化のないN-S式の直接計算が行われる。しかし、1) から3) の順に計算量は飛躍的に増大し、工学的・実用的には1) の多方程式モデルの開発・適用が現状であるが、2) 特に3) は乱流の基礎研究には非常に有力な武器であり、組織乱流の解明には不可欠なものになりつつある³⁾。例えば、Kimら(1987)³⁾ はCRAY-XMPスーパー・コンピュータをCPU時間だけで実に10日間以上稼働させて、レイノルズ数 $Re=3300$ の乱流のDNSに初めて成功し、想像以上に多くの、実験では得られなかった知見を与え、極めて貴重なデータ・ベースを作ったことは賞賛に値し、米国NASAの研究レベルの高さが改めて認識される。DNSは乱流の経験的なモデル化がまったく導入されないから、基礎流体力学の発展に多大な寄与を及ぼすものと考えられる。Eswaran & Pore(1988)⁴⁾ はDNSを用いて乱れのカスケード過程を検証し、また、最近人気のあるLESの根本的欠陥の解明とその改良にDNSのデータベースを活用しようとする試みがKimら(1987)³⁾ や堀内(1988)⁵⁾ 等によって行われており、注目される。

ところで、工学的計算手法となった多方程式モデルの中でも $k-\epsilon$ モデルは最もポピュラなものであり、その標準型はほぼ確立されたと言ってもよい⁶⁾。 $k-\epsilon$ モデルはImperial Collegeのグループが1970年代に流体機器内での乱流とその熱輸送を数値予測する目的で精力的に開発された。1980年代初頭にKarlsruhe大学のRodiのグループがダクト流に比べてはるかに複雑な境界条件をもつ自由水面のある開水路流れに適用し初めた⁶⁾。河床が平坦な固定境界面で、しかも水深が一定の開水路流れという最も基本的な等流の乱流構造をかなり良好に数値計算した。最近では、河川・湖沼・海岸流などの自然界の流れまで $k-\epsilon$ モデルが適用され初め、流れやそれが引き起こす各種の輸送問題(土砂、汚泥、温排水、水質など)をかなり合理的に予測できるようになり、従来の渦動粘性係数や渦動拡散係数を人工的に与えて計算していた『経験的水理学』が『流体力学に基づいた水理学』へと正しく変貌する時代が到来したと考えられる。こ

れに関する優れたレビューが米国土木学会水理委員会 (ASCE Task Committee) で1988年行われている⁷⁾。最近、禰津・中川(1987)⁸⁾や Gibson & Rodi(1989)⁹⁾は、自由水面によって乱れの鉛直成分がダクト流に比べて抑制されるという実験事実に着目し、乱れエネルギーのdamping係数を導入し、平均流速分布に加えて乱れ構造をも高精度に数値計算することに成功した。平坦河床での開水路乱流の数値計算にはほぼ目度が立った。また、その乱流構造の実験値は高精度なレーザ流速計によって最近得られ¹⁰⁾、空気ダクト流の実験値と十分対比できる標準値として確立された¹¹⁾。

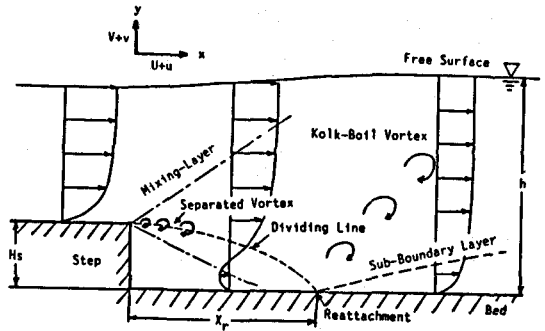
次の課題として、自然界によく現れる河床形状が急変し、剝離流が生じるという複雑な乱流の実験及び数値計算の開発が急務になっている。この流れの典型例が本研究で取り扱うステップ流である。ステップ剝離流の研究は境界層やダクト流でさえ不明な点が多く、現在でも流体力学の主要な分野として精力的に研究が行われている。この課題に関する優れたレビューが有江・木谷(1984)¹²⁾によって行われている。開水路ステップ流に関してのレビューは禰津ら(1988)¹³⁾が行っている。本研究は、自由水面が変化するこのような複雑な開水路流れのステップ剝離流を実験と数値計算の両面から解明しようとするBig Projectに挑戦したものであり、実験及び数値計算を遂行するのに要する能力的及び資金的制約から国際共同研究をすることになった。実験は日本側が、数値計算は西ドイツ側が主として担当することになり、本水理講演会で、これまでに得られた成果を公表したい。

2. 開水路ステップ流に関する高精度な実験計測

図・1に示すように、ステップ流は剝離泡内に逆流域が生じ、しかも剝離流線に沿って強いせん断層が形成され、乱れ変動が極度に大きくなるから、熱線(hot-wire)流速計や熱膜(hot-film)流速計で計測することは不可能に近い。この種の流れは最も複雑な乱流ではあるが、運動エネルギーの形状損失や熱・物質輸送を予測する上で極めて重要な流れであり、流体力学的解明が強く求められていた。近年、レーザ流速計が開発・実用化され、Bragg-cellを使うと逆流をも高精度に、また組織渦の発生という非常に不安定かつ複雑な乱流構造を何ら攪乱することなしに計測できるようになり、ステップ流の実験は1980年代になって本格化し出した¹³⁾。開水路ステップ流の実験が2成分レーザ流速計を用いて Nezu & Nakagawa (1987)¹⁴⁾によって世界で初めて行われた。自由水面が変化するという複雑な境界条件のもとで開発された本研究でのk-εモデルの有効性及び計算精度を検証するために用いられる高精度な実験値はこの実験で得られたものである。表・1は、この開水路ステップ流の実験の水理条件表である。全部で5ケース行われた。フルード数 $Fr = U_m / \sqrt{gh}$ (ここで、 U_m は断面平均流速、 h は水深、 g は重力加速度)を0.2と固定して、レイノルズ数 $Re = U_m h / \nu$ (ここで、 ν は水の動粘性係数)を8200から23400まで系統的に変化させた3つのケース(ST-1、ST-2、ST-3)がメインの実験である。その他、 Re 数を固定して Fr 数を変化させた場合も行われ、レイノルズ数 Re 及びフルード数 Fr の影響を検討しようとした。ステップの高さ H_s は、 $H_s = 2\text{cm}$ である。計測は、水路中央軸のx-y面内(図・1を参照)を最大で432点トランスバースし、瞬間流速成分(u, v)が1測点当り200Hzで10000個A-D変換された後、乱流の長時間平均統計値が電算処理された。実験装置や実験結果に関する詳細な内容は文献 14) 及び 15) を参照されたい。

3. 開水路ステップ流の支配方程式とその乱流モデル

2次元、定常の開水路乱流を支配する連続式及びレイノルズ方程式(N-S式の時間平均式)が、乱れエネルギー k 及びその逸散率 ε の輸送方程式と連立され、5個の連立偏微分方程式が構成される。その結果、運動方程式系が渦動粘性係数を人工的に与えなくても完結(Closure)して、平均流速(U, V)、圧力 P 及び乱れ特性値である k と ε との合計5個の未知変数が適切な計算スキームを用いて解くことができる¹³⁾。



図・1 開水路ステップ流の説明図

Fig.1 Schematic Description of Open-Channel Step Flow.

表・1 実験及び数値計算の水理条件表

Table 1. Hydraulic conditions for the present experiments

Case	H_s (cm)	U_m (cm/s)	U_{ms} (cm/s)	Re_s	Fr_s
ST-1	5.8	24.3	14.2	8 200	0.19
ST-2	7.9	26.7	17.9	14 000	0.20
ST-3	10.6	29.2	22.1	23 400	0.22
ST-4	7.8	42.5	29.3	22 900	0.33
ST-5	8.1	15.5	10.4	8 400	0.12

Suffix 2 = Values at the downstream section

4. 新しく開発された数値計算スキーム

よくご存知のように、合計5個の連立偏微分方程式は互いに相似な放物線型の偏微分方程式であり、Patankar-Spalding(1972)¹⁶⁾が与えたアルゴリズムを使って数値的に解くことができる。

現在は、Gosmanら(1985)¹⁷⁾のTEACHコードが汎用コードとしてそのソフトが市販されている。このコードは、スタガード格子を用いるため移流項及び拡散項の差分が近似であり¹⁸⁾、数値計算結果を実験値と比較する場合、両者の差違が上述のk-εモデルの欠陥に起因するものか、計算スキームの欠陥に起因するものか判断できない。そこで、本研究では、コロケード格子を採用し、ガウスの発散定理を用いて移流項及び拡散項を厳密に差分化する有限体積法を新しく開発した。紙面の制約により、その結果のみを次に示すが、その詳細は文献19)及び20)を参照されたい。

$$\sum_{m=W,E}^{N,S,P} a_m \phi_m = S_\phi + \gamma \sum_{m=E,W}^{N,S,P} (a_m - \epsilon a_m \phi_m^*) \quad (1)$$

ここで、 ϕ は、U, V, k あるいは ϵ を表し、 S_ϕ はそれに対応するソース項である。 a_m 及び ϵa_m はそれぞれ風上差分及び中央差分の有限体積係数である。 ϕ^* は ϕ のくり返し計算の1つ前の値である。

また、 γ は風上差分と中央差分とのブレンド係数であり、 $\gamma=0$ が風上差分、 $\gamma=1$ が中央差分となる。圧力Pと速度(U,V)はPatankar(1980)¹⁸⁾のSIMPLE法で関係づけられた。くり返し計算が行われ、相対誤差が0.001内になったときを収束条件とした。採用された計算アルゴリズムの解法誤差 E_d は、Carusoら(1985)²¹⁾の方法から評価され、格子間隔をdとすると次式で与えられる²⁰⁾。ここで、Fは、 ϕ_d のdによる1階微分である。式(2)によって粗い格子(2d)の解 ϕ_{2d} と細かい格子(d)の解 ϕ_d との差すなわち解法誤差 E_d が判定される。

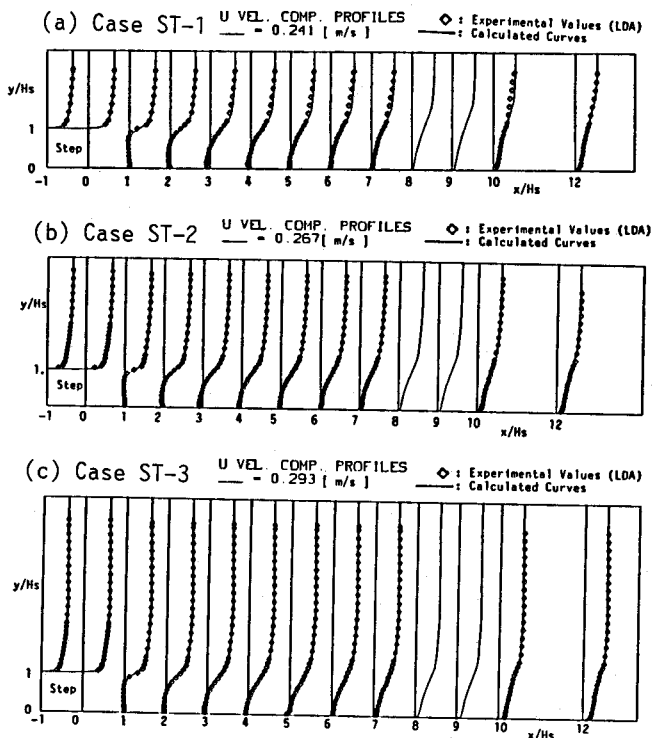
$$E_d = \phi_d - \phi_{2d} = F \cdot d + O(d^2) \quad (2)$$

5. 境界条件 及び 初期条件

境界条件は、壁面ではWall関数が使われ、自由水面では圧力P=0になるように水深hが修正された(水面形計算法)。開水路ステップ流の主要な現象は図・1に示したように剝離現象であるから、自由水面による鉛直方向の乱れ成分 v' のdamping効果を考慮しなくても十分に高精度な結果が得られる²⁾。なお、Wall関数及び自由水面の境界条件に関する詳細な記述は、文献20)を参照されたい。初期条件は $x/H_s = -1$ の断面での実験値を採用し、 $x/H_s = 30$ の断面を下流端として対称条件を用いた。

6. 計算結果と実測値との比較・検討

図・2は、主要な実験ケースであるST-1, ST-2及びST-3の流速分布 $U(x,y)$ の計算値と実測値とを比較したものである。計算値は実測値と非常に良好に一致している。実測値が高い精度をもつことは連続式及び運動量式を用いてすでに実証されていたが(連続式が5%以内の誤差で満足された)¹⁴⁾、計算結果がこれほど高精度に一致するとは両国研究者間にプロジェクトを行う前には予測していなかったために驚きであった。この予測は剝離流を伴うステップ流の計算にはk-εモデルは適用されにくく、したがって低精度な計算しかできないという従来の報告(1988)^{22), 23)}があったからである。平均流速は、ステップ直上では対数則分布を示すが、ステップ直後では対数則分布から次第にずれて混合層型に移行することがわかる。再付着点から内部境界層が発達し、流速分布は次第に対数則分布へと回復するが、この回復過程は常流



図・2 主流方向の平均流速分布 $U(x,y)$ の実測値と数値計算値との比較
Fig. 2 Comparison of Calculated Values of Streamwise Mean Velocity $U(x,y)$ with Experimental Data.

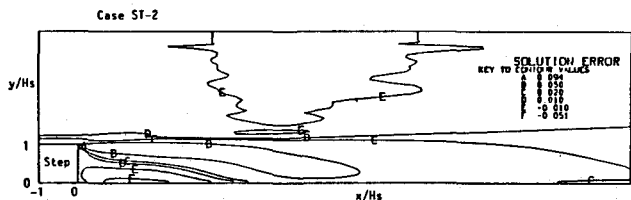
では $x/H_s = 50$ 以上とかなり長いことが知られている²⁴⁾。

図・3は、式(2)から得られた解法誤差 E_d のコンターを示す1例である。解法誤差は、ステップ直下で最大となり、約10%を示す。剝離泡内でも高く、約5%の誤差であるが、それ以外の領域では1%程度である。ステップの直下は流れの形状が急変する所であるから、この程度の誤差は、やむを得ないかも知れない。

図・4は、鉛直方向の平均流速 $V(x,y)$ の計算値と実測値とを比較した1例である。 V の最大値は U_{max} の約5%と微流速であることを考慮すると¹⁴⁾、 V の計算値と実測値との一致はかなり良好なものといえる。剝離泡内の $x/H_s \leq 2$ では河床近傍で $V > 0$ となり、その外側で $V < 0$ となることが明瞭にわかる。

図・5は、乱れエネルギー k [(m/s)²]の計算値を示す1例である。残念なことに、レーザ流速計では光軸方向(z 軸方向)の流速成分は計測できず、 w 成分が不明であるから乱れエネルギー k の実測値はまだ得られていない。しかし、一般的な開水路流では、 $w^2 \geq v^2$ という結果があるから、 $k \approx (\overline{u^2}/2 + \overline{v^2})$ と近似してこの実測値を図示した。計算値と実測値には若干大きい差違が認められる。この原因は、 $k-\epsilon$ モデルの欠陥なのか、上述の k の実測値の近似に問題があるのか現在不明であるが、後者の可能性が図・6に示すレイノルズ応力分布から強いと推察される。レイノルズ応力 $-\rho \overline{uv}$ [N/m²]の分布は思いのほか、実測値と計算値との一致が非常に良好であり、渦動粘性モデルがステップ剝離流でも十分に適用されると考えられる。ただ、ステップ直下で剝離渦が発生し、組織渦の複雑なフィード・バック機構をもつ領域¹⁵⁾では、計算値が実測値より過小評価されている。組織渦の影響は、 $k-\epsilon$ モデルでは計算できず、開水路ステップ流へのLES法の開発・適用が待たれる。

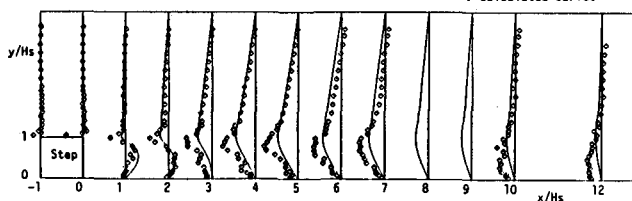
図・7は、ステップ下流の水深の変化 $\Delta h \equiv (h - h_0)$ (ここで、 h_0 は $x=0$ での水深)を示すものである。フルード数 Fr が1以下すなわち常流では、1次元水理解析法をステップ流を挟む上流と下流の検査面に適用して $\Delta h > 0$ となることが容易に示されるが¹¹⁾、 $x=0$ から下流方向に対する Δh の変化特性までは得られず、正しく $k-\epsilon$ モデルによって初めて予測されたものである。実測値は1/20 mmまで目測できるポイント・ゲージで得ら



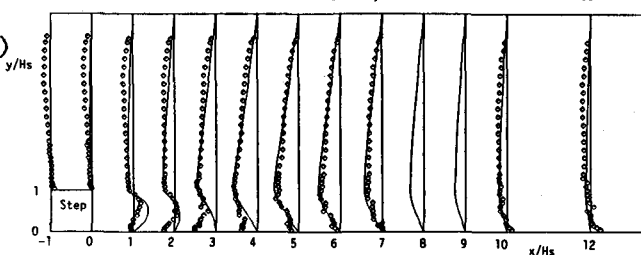
図・3 解法誤差の値 E_d のコンター図

Fig. 3 Contours of Solution Errors E_d in the Present $k-\epsilon$ Model.

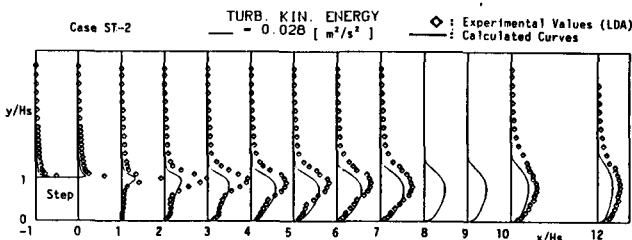
(a) Case ST-2 V VEL. COMP. PROFILES $\diamond$: Experimental Values (LDA) —: Calculated Curves



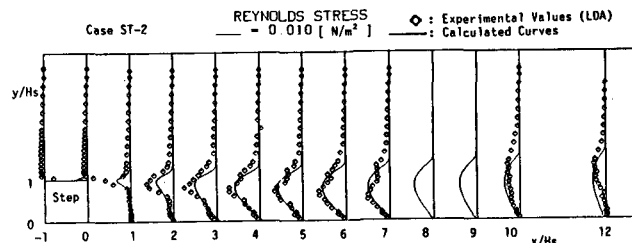
(b) Case ST-3 V VEL. COMP. PROFILES $\diamond$: Experimental Values (LDA) —: Calculated Curves



図・4 鉛直方向の平均流速分布 $V(x,y)$ の実測値と数値計算値との比較
Fig. 4 Comparison of Calculated Values of Vertical Mean Velocity $V(x,y)$ with Experimental Data.



図・5 乱れエネルギー k の分布の実測値と数値計算値との比較
Fig. 5 Comparison of Calculated Values of Turbulent Energy $k(x,y)$ with Experimental Data.



図・6 レイノルズ応力 ρuv の分布の実測値と数値計算値との比較
Fig. 6 Comparison of Calculated Values of Reynolds Shear Stress $\rho uv(x,y)$ with Experimental Data.

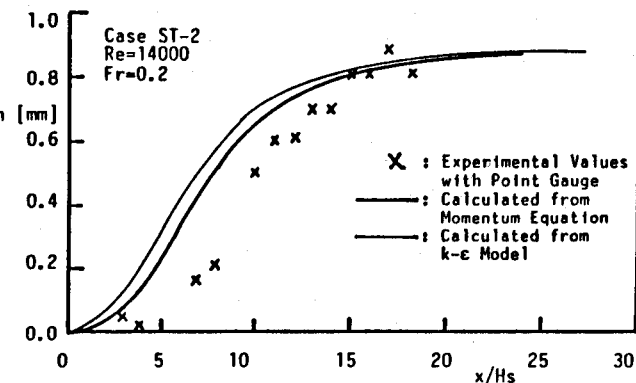
れたものであり、あまり精度は期待できない。図中の太線は、レイノルズ方程式に流速の実測値を代入してエネルギー勾配を計算し、これから dh/dx を求め、 Δh を計算したものであり¹⁴⁾、1種の実測値ともいえる。 Δh の値は十分下流で約 0.9 mm という小さな値にもかかわらず、本研究で開発された $k-\varepsilon$ モデルからの計算値はこの実測値に非常に良好に一致し、注目される結果である。

最後に、本研究で得られたすべての実験ケースの再付着点距離 X_r の実測値と計算値を表・2 に示し、比較してある。再付着点距離 X_r の正確な予測は、図・1 からわかるように剝離泡の形状を決定するものであり、工学上最も重要な水理量の 1 つである。計算格子が密となると X_r/H_s は過大評価され、本実験の範囲内では (3) の $76 \times 36 = 2736$ のコロケード格子が最も妥当であった。ケース ST-4 を除くと、計算値と実測値との相対誤差は 5% 以内であり、非常に良好な一致である。ダクトのステップ流での従来の多くの計算値のうちで最もよいものでも相対誤差が 20% 程度であることを考慮すると^{22), 23), 25)} 本研究での計算値は非常に妥当なものといえる。この原因は、現在究明中であるが、ダクト流と比較して開水路流は図・7 に示したように水深が変化するから動圧力が解放されるために¹⁴⁾ 上述のように予想外に良好な一致が得られたものと推測される。

7. 結 論

本研究は、開水路ステップ剝離流という複雑な流れの乱流構造を高精度な実験計測でまず解明し、次に、この乱流構造を高精度に予測できる数値計算手法を開発したものである。実験値と計算値とは予想外に非常に良好な一致が見られ、日独国際共同研究は実り多い成果が得られた。紙面の制約で、研究成果のほんの一端を述べたに過ぎないが、壁面せん断応力分布や運動量、平均流エネルギー（比エネルギー）及び乱れエネルギーの変換過程（エネルギーの形状損失に関する流体力学的解明）なども良好に予測することができる。特に、流砂水理学では最も重要なステップ下流の壁面せん断応力の流下方向への変化特性が、従来の経験的なモデルから得られる結果より^{26), 27)} はるかに合理的かつ高精度に評価することができる。これらの結果に関してはいずれ他の機会に公表したい。

最後に、本研究を遂行するに当たって、日本側では文部省科学研究費を、西ドイツ側では Deutsche Forschungsgemeinschaft から研究費を受けことを記し、これに感謝したい。また、Dr. Scheuerer は数値流体力学の専門家であり、1986 年、低レイノルズ数での $k-\varepsilon$ モデルの開発に関する研究業績に対してアメリカ航空宇宙学会賞 (AIAA) を授賞している。また、Papritz-Wagner は半年間、研究生として京都大学工学部土木工学教室水理学研究室（中川博次教授）に在籍し、本研究で開発された $k-\varepsilon$ モデルの基本プログラムの開発に従事し、帰国してから Dr. Scheuerer の指導でプログラムの細部設計と計算を行った。その成果は Diplomarbeit（修士論文に相当する）²⁸⁾ として Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Strömungsmechanik (Director Prof. F. Durst) から認められたものである。



図・7 ステップ下流の水深の変化特性 $\Delta h \equiv h - h_0$
Fig. 7 Variation of the Water Depth Downstream of the Step.

Table 2 Comparison of Reattachment Length X_r/H_s Between Experimental and Calculated Values.

Case	Re	Fr	Reattachment Length X_r/H_s				Discrepancy Errors [(3)-(1)] (%)
			(1) Observed Values	Calculated Values Grid Points in (x, y)			
				(2) 38x18	(3) 76x36	(4) 152x72	
ST-1	8200	0.19	6.3	5.55	6.45	6.75	2.4 %
ST-2	14000	0.20	5.8	4.30	5.60	6.45	-3.4 %
ST-3	23400	0.22	5.2	3.45	5.45	6.00	4.8 %
ST-4	22900	0.33	6.4	4.45	5.55	6.15	-13.3 %
ST-5	8400	0.12	5.5	4.30	5.75	6.40	4.5 %

表・2 再付着点距離 X_r/H_s の実測値と計算値との比較

《 参 考 文 献 》

- 1) 巽友正 (編) : 乱流現象の科学、東京大学出版会、(1986)。
- 2) 彌津家久 : 環境水理解析における乱流の数値モデルの応用、土木工学における数値解析最前線、土木学会関西支部研修会テキスト、pp.111-127、(1987)。

- 3) Kim, J., P. Moin and R. Moser : Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number, *J. Fluid Mech.*, vol.177, pp.133-166, (1987).
- 4) Eswaran, V. and S.B. Pore: An Examination of Forcing in Direct Numerical Simulations of Turbulence, *Computers & Fluids*, vol.16, pp.257-278, (1988).
- 5) 堀内潔: チャンネル流におけるLES乱流モデルの検証、第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集、pp.359-362, (1988).
- 6) Rodi, W. : Turbulence Models and their Application in Hydraulics, IAHR, Publication, Delft, (1980).
- 7) Bedford, K., A. Findikakis, B.E. Larock, W. Rodi and R.L. Street: Turbulence Modelling of Surface Water Flow and Transport, ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations, *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, vol. 114, pp.969-1073, (1988).
- 8) 禰津家久・中川博次: 修正 $k-\epsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算、土木学会論文集、第387号、pp.125-134, (1987).
- 9) Gibson, M.M. and W. Rodi : Simulation of Free Surface Effects on Turbulence with a Reynolds Stress Model, submitted to *J. Hydraulic Research* (1989).
- 10) Nezu, I. and W. Rodi : Open-Channel Flow Measurements with a Laser Doppler Anemometer, *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, vol.112, pp.335-355, (1986).
- 11) 禰津家久: 開水路流れ、流体力学ハンドブック、(日本流体力学会編)、丸善、pp.253-268, (1987).
- 12) 有江幹男・木谷勝: 剝離流れ、流体力学の進歩・境界層、(谷一郎編)、丸善、pp.139-195, (1984).
- 13) 禰津・中川・G. Scheuerer・B. Papritz-Wagner: 開水路ステップ剝離流の実験及び数値計算に関する日独国際共同研究、第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集、pp.425-432, (1988).
- 14) Nakagawa, H. and I. Nezu: Experimental Investigation on Turbulent Structure of Backward-Facing Step Flow in an Open Channel, *J. Hydraulic Research*, vol.25, pp.67-88, (1987).
- 15) Nezu, I. and H. Nakagawa: Turbulent Structure of Backward-Facing Step Flow and Coherent Vortex Shedding from Reattachment in Open-Channel Flows, "Turbulent Shear Flows" (ed. J.H. Whitelaw et al.), Springer-Verlag, vol.6, pp.313-337, (1989).
- 16) Patankar, S.V. and D.B. Spalding: A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.15, pp.1787-1806, (1972).
- 17) Gosman, A.D., B.E. Launder and G.J. Reece: Computer-Aided Engineering; Heat Transfer and Fluid Flow, John Wiley & Sons, (1985).
- 18) Patankar, S.V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, (1980).
(水谷・香月(訳): コンピュータによる熱移動と流れの数値解析、森北出版(1985)).
- 19) Peric, M., R. Kessler and G. Scheuerer: Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids, *Computers & Fluids*, vol.16, pp.389-403, (1988).
- 20) Nezu, I., B. Papritz-Wagner and G. Scheuerer: Numerical Calculation of Turbulent Open Channel Backward-Facing Step Flows, *Proc. of 3rd Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, IAHR, Tokyo, pp.183-190, (1988).
- 21) Caruso, S.C., J.H. Ferziger and J. Olinger: Adaptive Grid Techniques for Elliptic Flow Problems, Report No. TF-23, Thermosc. Div., Stanford University, (1985).
- 22) Perng, C.Y. and R.L. Street: The SEAFLOS Numerical Codes; High Speed N-S Solvers, *Proc. of 3rd Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, IAHR, Tokyo, pp.191-198, (1988).
- 23) Rodi, W.: Private Communication, (1988).
- 24) 禰津・中川・天野・藤本: 開水路段落ち流れの流速回復過程と再付着点からの組織渦の放出特性、第31回水理講演会論文集、pp.413-418, (1987).
- 25) Morgan, K., J. Periaux and F. Thomasset (Eds.): Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step, Notes on Numerical Fluid Mechanics vol.9, Friedr. Vieweg & Sohn, (1984).
- 26) 吉川秀夫(編著): 流砂の水理学、第6章、丸善、(1985).
- 27) Nezu, I. and H. Nakagawa: Evaluation of Shear Stress in Open-Channel Step Flows, Fluvial Hydraulics (ed. W.R. White), 22nd Congress of IAHR, Lausanne, pp.219-220, (1987).
- 28) Papritz-Wagner, B. : Berechnung der Offenen, Turbulenten Kanalströmung über ein Zweidimensionales Hindernis, Dipl. Th., Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Universität Erlangen-Nürnberg, (1988).