

河床波上の流れの底面せん断応力に関する理論的研究

Study on wall shear stress in the flow with sand waves.

北海道大学工学部 正会員 山田 正 Tadasu YAMADA

北海道大学工学部 学生員 竹本典道 Norimichi TAKEMOTO

北海道大学工学部 学生員 大前智敬 Satoyuki OOMAE

According to previous investigations, it is well known that the phase lag between the form of river bed and wall shear stress is the essential factor in the formation of sand ripples or dunes. In the present paper, we calculate the phase lag mentioned above in two ways using cartesian and boundary layer co-ordinates. The obtained results are ; (1)The phase lag shows a peak value in a range of wave numbers of sand waves. (2)The phase lag of wall shear stress calculated in boundary layer co-ordinate shows the better fitting to the experimental values than in cartesian ones. (3)In case of rough baundary, the distribution of phase lag dose not reveal a peak in wave number domain.

1. はじめに 河床形状と河床に働いているせん断応力の間には位相ずれが存在することが知られており、この位相ずれが河床形状の発達・移動・変形に重要な役割を果たしていることが解ってきた(Kennedy(1), 林(2))。また、山田・竹本(3)もせん断応力の位相ずれが河床波の発生・発達に重要な役割を果たしていることを確かめている。この問題に関しては、Benjamin(4)、Reynolds(5)、日野・宮永(6)の理論解析があり、日野・宮永の実験的研究がある。その後、Hanrattyら(7)によって行われた一連の詳細な実験の報告がある。本研究は、上記の実験的研究を参照しつつ、河床波上の流れにつき層流および乱流時の底面せん断応力を解析的に求めたものである。なお、層流には松信(8)の示した手法を、乱流にはReynolds(5)の示した手法を用い、これに数式処理言語REDUCEを援用して解析を進めている。

2. 層流の場合の解析

2-1 基礎式および計算手法 x軸に関して対称なゆるやかな波状境界面をもつ流れを考える。壁面は、 $y=H \sin(kx)$ で与え、流れは2次元定常流とし、non-slipの条件を考慮する。ここで、 H ：流路の半幅、 L ：河床波の周期、 k ：断面が非一様である領域の特性的長さの逆数($k=1/L$)、 $h(kx)$ ：境界断面の形状を与える関数(x について任意回微分可能)、 κ ：断面の空間的变化のゆるやかさを表す無次元パラメータ($\kappa=kH=H/L$)、 a ：河床波振幅、 ϵ ：河床波振幅間の距離とする。次に空間座標(x, y)の無次元化を行うと、 x 方向、 y 方向は、それぞれ

$$\xi = kx, \eta = \frac{y}{H \sin(kx)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

となり、流れの領域は、 $-1 \leq \eta \leq 1$ で表される真つすぐな平行断面内部に写像される。流れの諸量を直交関数である超球多項式(またはGegenbauer多項式) $C_n^q(\eta)$ を用いて展開する。流れ関数 ψ の展開は、

$$\psi = -\frac{1}{3} HU \sum_{n=1}^{\infty} h(\xi) A_{2n}(\xi) C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで、 U ：代表流速、 $A_{2n}(\xi)$ ： ψ に関する展開式である。(2)式を基にして、流れの各諸量の展開形を求め、渦度方程式に代入すると解くべき基礎式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1}(\xi) C_{2n-1}^{5/2}(\eta) &= \frac{1}{3} \kappa \text{Re} \left\{ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}'(\xi) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}(\xi) C_{2n}^{-1/2}(\eta) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3h(\xi)} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (h(\xi) A_{2n}(\xi))' C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-2}^{3/2}(\eta) \right\} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 Re ：レイノルズ数、 $\Omega_{2n}(\xi)$ ： ω に関する展開式、 $N_{2n-1}(\xi)$ ： $\nabla^2 \omega$ に関する展開式である。(3)式はパラメータとして κRe (以後、 $\epsilon = \kappa \text{Re}$ とする)の形だけが現れている。また、 Ω 、 N の形より全ての未知数は κ^2 のべき級数に展開されることがわかる。計算を行うにあたってはREDUCEによる数式処理を用い何らの省略を行うことなく、 ϵ^2 、 κ^2 の項まで求めた。

2-2 解析結果および考察

本節では2. で求めた解を基にして壁面せん断応力を求めてみた。境界断面形状はSIN形および(4)式によって表されるDUNE形を用いた。

$$h(\xi) = 1 - \frac{A}{H} \frac{L}{t} \left[\left(\xi - \frac{1}{2} \right) \tanh \left\{ \frac{L}{2\delta t} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] \quad (4)$$

(4)式ではパラメータ t 、 δ 、 A および波長 L の値によって断面形状のなめらかさを変え得る。

i) SIN形をした河床波上の流れ

図1、2、3はSIN形における解析結果を示す。(1)壁面せん断応力の最大値は河床波のcrestの上流側にずれる。(2)剥離の発生の有無にかかわらず、位相差 ϕ が生じており、パラメータ κ 、 ε ($=\kappa \cdot Re$)、 a/H によって一意的に決定される。(3) κ が同じ値において a/H の値が小さい程位相差 ϕ が大きい。 a/H を小さくしていくと位相差 ϕ 間の差が小さくなり、 a/H が十分小さくなれば位相差 ϕ がある一定の値に収束する。(4)位相差 ϕ はある κ の値において極大値をとる。その値は Re が大きい程大きくなり、ピークも顕著に現れる。(5)剥離が生じたとき、その領域が大きくなる(κ が大きくなるとき)につれ、位相差 ϕ も大きくなる傾向が見られる。その傾向は、 Re が大きい程はつきりする。(6) a/H が大きい程、小さい κ の値において剥離が発生する。(7) κ の値が小さくなるにつれ壁面せん断応力の分布は平たくなり最大値は小さくなる。

ii) DUNE形をした河床波上の流れ

図4は、DUNE形における壁面せん断応力の分布を表した1例である。結果は、以下のである。(1)crestのあたりで壁面せん断応力が極大値をとっている。位相差 ϕ はSIN形の時とは逆に下流側にずれる。(2) κ の値を大きくしていくと、ちょうど断面の変曲点あたりでもう一度極大値をとる。さらに κ の値を大きくすると2度目の極大値が最大値となる。(3) κ の値が過大になると分布の振動が激しくなり、理論の適用限界をはずれる。(4) t/L が小さくなると変曲点あたりを境にして壁面せん断応力は大きく上下に変動する。

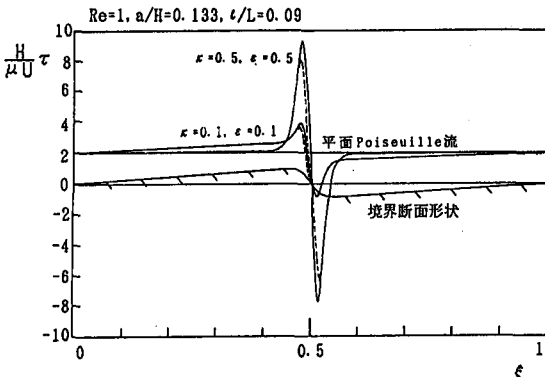


図4 DUNE形の壁面せん断応力分布図
(破線は壁面上にそったせん断応力
を示す。)

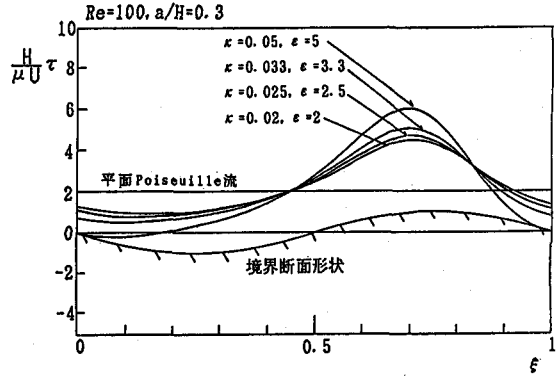


図1 SIN形の壁面せん断応力分布図

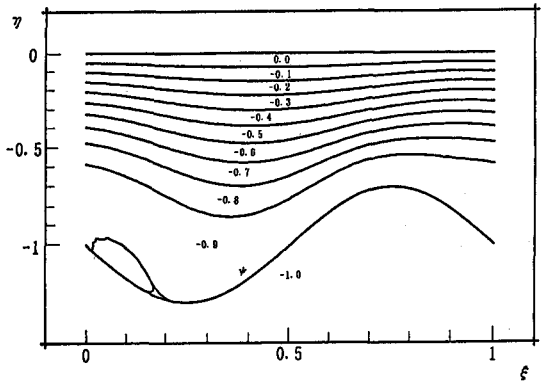


図2 SIN形の流線図
($Re=100$, $\kappa=0.05$, $\varepsilon=5$, $a/H=0.3$)

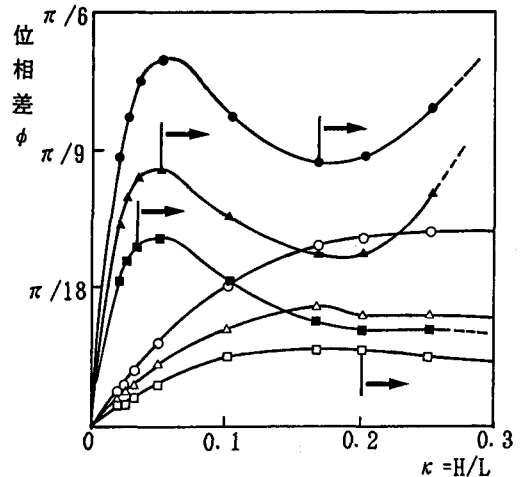


図3 位相差 ϕ と κ の関係

○ $Re=10$, $a/H=0.1$ ● $Re=100$, $a/H=0.1$
△ $Re=10$, $a/H=0.3$ ▲ $Re=100$, $a/H=0.3$
□ $Re=10$, $a/H=0.5$ ■ $Re=100$, $a/H=0.5$
(図中の | → は、| より → の領域で剥離が起きていることを示す。)

3. 乱流の場合の解析

3-1 基本式の導出 本研究では直線直行座標系及び境界層座標系(図5)について解析している。流下方向に周期的な現象を取り扱うため、流速・圧力・せん断応力等に関して $f = \bar{f} + \hat{f} + f'$ のように主成分・周期成分・乱れ成分の3成分に分けて扱う。このとき、壁面に鉛直方向の周期成分 $\hat{w}$ に関して基礎方程式(5)を得る。

$$\begin{aligned} & \text{直線直行座標系} \\ & [(\bar{u}-c)(D^2-k^2)-D^2\bar{u}]\hat{w} \\ & = -\frac{i}{kRe}[(D^2-k^2)^2\hat{w} + E(D^2-k^2)^2\hat{w} \\ & \quad + 2DE \cdot (D^3-k^2D)\hat{w} + D^2E \cdot (D^2+k^2)\hat{w}] \\ & \dots\dots\dots(5-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{境界層座標系} \\ & [(\bar{u}-c)(D^2-k^2)-D^2\bar{u}]\hat{w} - ik^3\bar{u}^2 \\ & = -\frac{i}{kRe}[(D^2-k^2)^2\hat{w} + E(D^2-k^2)^2\hat{w} \\ & \quad + 2DE \cdot (D^3-k^2D)\hat{w} + D^2E \cdot (D^2+k^2)\hat{w}] \\ & \quad - \frac{k^2}{Re}(2D^2-k^2)\bar{u} - \frac{3k^2}{Re}(DE \cdot D\bar{u} + E \cdot D^2\bar{u}) \\ & \dots\dots\dots(5-b) \end{aligned}$$

ここに、Re: Reynolds数、k: 波数、E: 渦動粘性係数である。
 上記の(5)式を以下の境界条件(6)の基に解く。 ($\tilde{f} = \hat{f}(z) \cdot \exp[ik(x - ct)]$)

$$\begin{aligned} & \text{直線直行座標系} \\ & \hat{w} = 0 \quad \text{at } z=0 \\ & D\hat{w} = ik \cdot D\bar{u} \quad \text{at } z=0 \dots\dots(6-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{境界層座標系} \\ & \hat{w} = 0 \quad \text{at } z=0, \quad \hat{w} = -ik \cdot \bar{u} \quad \text{at } z=1 \\ & D\hat{w} = 0 \quad \text{at } z=0, \quad D\hat{w} = -ik \cdot D\bar{u} \quad \text{at } z=1 \dots\dots(6-b) \end{aligned}$$

計算には従属関数を導入し差分点を増やさずに4次までの精度を確保する差分法を採用している。本研究ではReynoldsによって提案された渦動粘性係数Eを用いて平均流 $\bar{u}$ を決定している。なお、この方法ではEと $\bar{u}$ が互いに陰な形で組み込まれており、与えられた圧力勾配に対し繰返し計算によりE、 $\bar{u}$ が求まる。図6はこのとき求められた平均流 $\bar{u}$ の分布である。 $u \cdot z/\nu < 10$ では粘性底層が良く表現されており、また、 $u \cdot z/\nu > 20$ では平均流 $\bar{u}$ が対数分布であると言える。

3-2 解析結果

i) 滑面上の流れ 本解析により流速・せん断応力・圧力の周期成分の分布及び位相ずれが得られている。

①流速の周期成分: 図7(a)はRe=25000, Van-Driest定数 $A^+ = 26$, 無次元波数 $\alpha^+(k\nu/u_\tau) = 0.001$ の場合における直線直行座標系での $|\hat{u}/u_\tau|$ と境界層座標系で求めた $|\hat{u}/u_\tau|$ の分布である。直線直行座標系では壁面($z=0$)で最大値を取っており、壁面から離れるに従い減少する。一方、境界層座標系では壁面上($z=0$)では $\hat{u}=0$ であり、 $z^+=20$ の位置でピークを示している。これは、境界条件の違いによる。図7(b)は壁面形状と $\hat{u}$ の位相ずれ θ についての分布を両座標系で比較したものである。直線直行座標系においては壁面近傍での位相差 θ が π となっているのに対して、境界層座標系では壁面近傍において位相差 θ が $\pi/4$ 程度である。流れのコア領域では、位相差 θ は、直線直行座標系では -20° 程度、境界層座標系では 0° 程度を取りはば一定となっている。

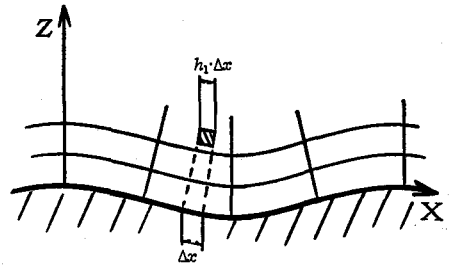


図5 境界層座標系

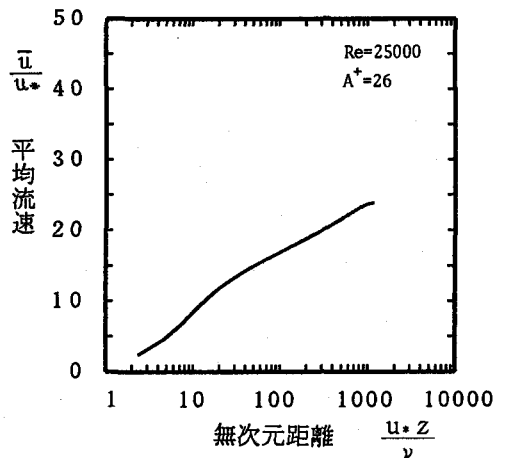


図6 平均流速 $\bar{u}$ の分布

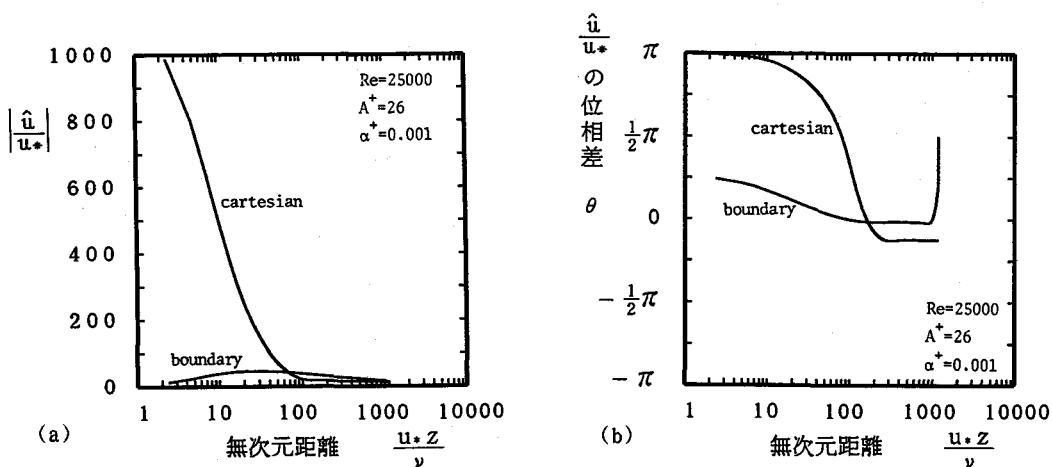


図7 x方向流速の周期成分 $\hat{u}$ (a)振幅(b)河床波との位相ずれ

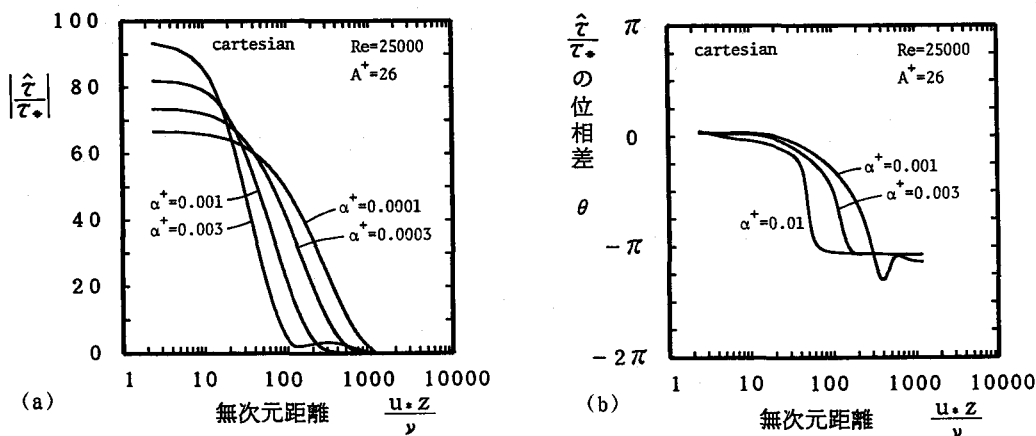


図8 せん断応力の周期成分 $\hat{\tau}$ (直線直行座標系) (a)振幅(b)河床波との位相ずれ

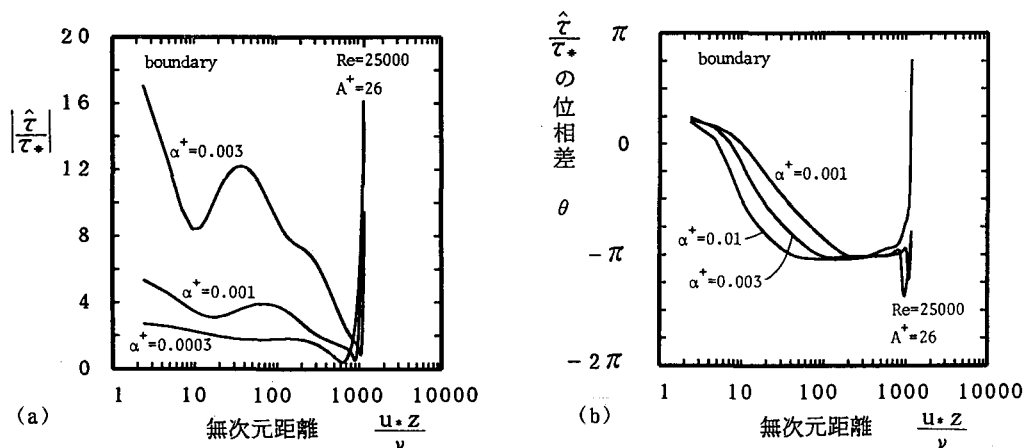


図9 せん断応力の周期成分 $\hat{\tau}$ (境界層座標系) (a)振幅(b)河床波との位相ずれ

②せん断応力の周期成分：図8(a)は、直線直行座標系における $Re=25000, A^*=26$ での各波数 ($\alpha^*=0.0001, 0.0003, 0.001, 0.003$) におけるせん断応力の周期成分の振幅 $|\hat{\tau}/\tau_*|$ の分布である。どの波数の場合でも、壁面($z=0$)で最大値を示しせん断応力の変動が大きくなる。 $|\hat{\tau}/\tau_*|$ は z が大きくなると一様に減少し、 $z=1$ で 0 となっている。 $z=0$ での最大値は波数が大きいほど大きくなる傾向にある。しかしながら、壁面での波数が十分に大きい(波長が短い)場合には z の増加によって急激にその値を減少させる。この事は流速の変動の場合と同じく河床波の存在による影響範囲が波数が大きくなると z の小さい壁面領域に限られることを示している。一方、波数が大きい場合には河床波の波形勾配は相対的に大きく、これにより壁面上で示される最大値は大きくなる。同様に Reynolds 数が大きくなると、 $|\hat{\tau}/\tau_*|$ の最大値は大きくなり、また、河床波によって影響される範囲は小さくなっている。Reynolds 数が大きくなることは、相対的に波数が大きくなることと同じ効果があると思われる。また、Van-Driest 定数 A^* について A^* が小さい方が $|\hat{\tau}/\tau_*|$ のピーク値は大きくなるが、分布形は A^* に対してほとんど変化しない。図9(a)は、境界層座標系での $Re=25000, A^*=26$ における各波数 ($\alpha^*: 0.0003, 0.001, 0.003$) でのせん断応力の周期成分の振幅 $|\hat{\tau}/\tau_*|$ の分布である。せん断応力の周期成分は、壁面上($z=0$)で最大値を示し、壁面から少し離れると急激な減少を示している。壁面からの距離が大きくなると河床波の影響が及ばなくなるはずであるが、 $z=1$ において $|\hat{\tau}/\tau_*|$ が急激な増加を示している。波数が大きい場合には、 $z=0$ から一旦急激な減少を見せた後、再び値を増加させピークを示す現象が見られる。また、Reynolds 数が高くなるほど波数が高くなるのと同様にピーク値が上がりより急激な変化を起こす。境界層座標系では直線直行座標系に比較し、ピーク値がかなり小さくなっている。図8(b)は、直線直行座標系においての $Re=25000, A^*=26$ での各波数 ($\alpha^*: 0.001, 0.003, 0.01$) における $\hat{\tau}$ の河床波との位相ずれ分布である。低波数では徐々に位相ずれが減少し、その減少が z のかなり大きな範囲にまで及んでいる。高波数の場合には、位相差が急速に低下する。低下した後は z が増加しても位相差は一定の値 ($-\pi$ より少し小さい値) でほとんど変化しない。Reynolds 数が変化した場合には、 $|\hat{\tau}/\tau_*|$ の場合と同じように波数の変化と同様の傾向を示し、 A^* の変化にはほとんど関係がない。図9(b)は、境界層座標系における $Re=25000, A^*=26$ での各波数 ($\alpha^*: 0.001, 0.003, 0.01$) における $\hat{\tau}$ の河床波との位相ずれ θ の分布である。一般に壁面から離れると位相ずれ θ は減少し、 $-\pi$ 程度まで減少した後、ほとんど一定の値となる。高波数の場合は θ の変化が急激になっている。他方、 A^* はせん断応力の周期成分 $\hat{\tau}$ の分布にはほとんど関係していないようである。図10は、各流れの Reynolds 数に対する河床波上($z=0$)のせん断応力と河床波の位相ずれ θ の分布である。位相ずれ θ はある波数で明かなピークを示している。そのピーク値は境界層座標系では約 $\pi/3$ であり、直線直行座標系では約 $\pi/6$ である。ピーク波数は Reynolds 数が大きくなるほど低波数側にずれる傾向にある。直線直行座標系の場合には過大な Reynolds 数の場合ではピークを示すものの、位相ずれのピーク値はかなり小さくなってしまう。境界層座標系では Reynolds 数によっていくらか分布形が変化しているものの、全体としてはピーク値・ピーク位置ともにほとんど変化がない。Hanrattyらによって行われた実験値と比較すると直線直行座標系では実験値のピーク位置と大幅にずれており実験結果を説明し得ない。これに対して、境界層座標系を用いた計算では流れの中央部で精度が落ちるものの、壁面せん断応力の位相ずれは実験値を良く説明していると言えよう。本研究は本来河床波の発生メカニズムを解明しようとするものである。この場合、境界付近の流れの場が河床波の発生に深く関わっていると考えられ、境界付近の流れの場を良く表現している境界層座標系が適しているものと思われる。

ii) 粗面上の流れ 粗面上の流れの場合は、粘性底層を持たず、全域に渡り対数分布していると考えられる。このとき、 $z \rightarrow 0$ で不合理が生じないように原点を $ks/30$ だけ補正し、境界条件としては滑面の場合と

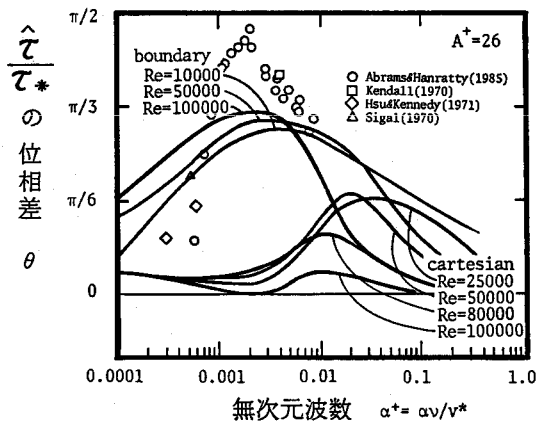


図10 壁面せん断応力の位相ずれ θ と波数の関係 (滑面)

同様の(6-a)式を用いる。図11はこの様にして求めた粗面を持つ流れにおける $\hat{\tau}$ の位相差 θ の分布図である。全体的な位相差 θ の分布形は滑面の場合と同じ様な分布をしている。図12は波数 α^+ に関する各粗度 ks における $\hat{\tau}/\tau_*$ と河床波の位相ずれ θ に関する分布である。粗面の場合には、滑面での場合にみられたようなピークを見ることができない。著者らの実験的研究により粗面の場合には、位相差は滑面ほど顕著に現れていないが、このことは、本研究によっても示された。しかし、位相差の絶対値に関しては未だ不十分であり、粗面の場合の境界条件は今後検討を要しよう。(ks は水路半幅で無次元化した粗度である。)

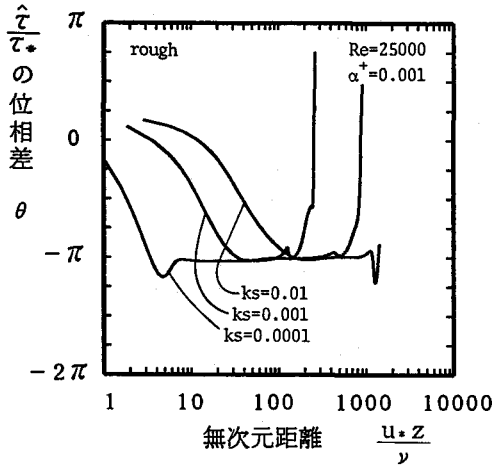


図11 せん断応力の位相ずれ θ (粗面)

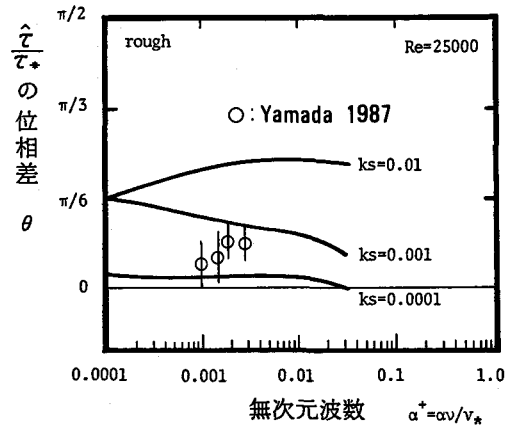


図12 壁面せん断応力の位相ずれ θ と波数の関係 (粗面)

4. まとめ

本解析で得られた結果を要約すると、層流では(1)河床波上の流れにおいては壁面せん断応力と波面との間に位相差 ϕ が生じる。位相差 ϕ は、SIN形のようにゆるやかな波面においてはcrestの上流側に進み、DUNE-1,2形のような波面の場合には、crestの下流側に遅れる。(2)SIN形において a/H を小さくしていき平面Poiseuille流に近づけていくと、 κ の値に対してある一定の位相差 ϕ の値に近づいていく。(3)DUNE形のような断面形においては $1/\kappa$ が小さくなると断面の変曲点において κ が敏感に効いてくる。そのため κ の値が大きくなると発散し理論の適用限界を越える。(4)なめらかな断面において κ の値は位相差 ϕ に敏感に働く。

乱流では、(1)境界層座標系を用いた方が境界(壁面)付近の流れの場をよりの確に表現している。(2)壁面せん断応力の位相差にピークを与えるような波数($\alpha^+ : 0.001-0.005$)が存在する。(3)位相のピーク値を与える波数は流れのReynolds数に対して低波数側にずれるが、このときのピーク値はReynolds数にほとんど影響されない。(4)粗面の場合、壁面せん断応力の位相差にピークを与えるような特定の波数は存在しない。また粗面の場合には $\hat{\tau}$ の位相差は小さい。このことが、粗面の場合にリップルが存在しない理由と考えられる。

謝辞 本研究は文部省科学研究費・重点領域研究(1)及び一般研究c(代表：山田正)の補助のもとに行われている。ここに記して謝意を表す。

参考文献(1)Kennedy, J. F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, J. F. Mech., vol. 16, 1963. (2)Hayasi, T. , Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, vol. 96, 1970. (3)山田正、竹本典道:空気流によるサンドリップルの発生発達に関する研究, 32回水講, 1988. (4)Benjamin, T. B. : Shearing flow over a wavy boundary, J. F. Mech., vol. 6, 1950. (5)Reynolds, W. C. , Hussain, A. K. M. F. : The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow, J. F. Mech., vol. 54, 1972. (6)日野幹雄、宮永洋一:波状境界を持つ2次元管路流の解析, 土木論報264, 1977. (7)Hanratty, T. J. , Abrams, J. : Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface, J. F. Mech., vol. 151, 1985. (8)松信八十男:ゆるやかに断面の変化するみぞの中の粘性流体の流れ, 日吉論文集, 1977.