

新しい代数的応力モデルの提案とその複断面流路の流れへの適用

Proposal of a New Algebraic Stress Model and its Application to a Compound Channel Flow

東京大学工学部 河原能久 Yoshihisa KAWAHARA
東京大学工学部 玉井信行 Nobuyuki TAMAI

An algebraic stress turbulence model is developed to reproduce turbulent flows with turbulence-driven secondary currents in ducts of arbitrary cross-section. The model is obtained as an extension of the $k-\varepsilon$ model to include non-linear effects of the mean rate of strain. The expression of the non-linear terms in the model is derived from Launder-Reece-Rodi model with neglecting advection and diffusion terms. Then, the model is applied to a compound channel flow to test its validity. Comparison between calculated results and experimental data reveals that the present model can reproduce mean flow field as well as Reynolds stress distributions.

Keywords: turbulence-driven secondary flow, algebraic stress model, compound channel

1. はじめに

非円形の横断面形状を有する直線開水路の乱流においては、プラントルの第2種2次流が存在する。この2次流は、非等方非一様なレイノルズ応力により維持されており、その大きさは主流の2～3%程度と小さいが、主流の等流速線を大きく歪ませたり、壁面剪断応力分布を変化させることなどが知られている。

著者らは、複雑な横断面形状の例として複断面流路を取り上げ、乱流モデルを組み込んだ数値解析により流れ場の再現を試みてきた。そして、 $k-\varepsilon$ モデルに代表させるような等方的な渦動粘性係数を用いるモデルではレイノルズ応力の非等方性を維持できず、2次流を算出することができないことを証明した¹⁾。また、Launder-Yingによる代数的応力モデル (Algebraic Stress Model) が平均流速場をかなり良好に再現することを示した²⁾。しかし同時に、低水路と高水数との境界部近傍の2次流の大きさを正確に算出するためにはLaunder-Yingモデル中の1つの定数をオリジナルの値の2倍ほどに増加させることが不可欠であることを明らかにした。このことは、その乱流モデルが横断面形状に対して不変でないこと、2次流の生成、維持機構をより正確に表現する乱流モデルの開発が必要であることを意味している。

本研究の目的は、複雑な横断面形状を持つ直線流路の乱流場を解析することのできる代数的応力モデルを導出することである。以下では、代数的応力モデルの導出過程を述べ、次に、モデルを複断面流れに適用した結果を報告し、モデルの妥当性を検証する。

2. 代数的応力モデルの導出

第2種2次流を再現する代数的応力モデルの導出方法は2通りに大別できる。1つめの方法は、レイノルズ応力に対する輸送方程式モデル中の移流項と拡散項を無視し、またはモデル化し、偏微分方程式を代数方程式化するものである^{3)～5)}。2つめの方法は $k-\varepsilon$ モデルに変形速度テンソルの高次項を付加するものである^{6)～8)}。2つの方法は相補的である。前者の方法は、レイノルズ応力の生成項を正確に表現できることや壁面や水面近傍でのレイノルズ応力の異方性をモデルに組み込み易いなどの点が優れている。また、レイノルズ応力の表現がどの機構に由来するのかを理解することができるとも有用な点である。一方、2番目の方法は、レオロジー方程式の誘導と同様に、レイノルズ応力に、物理的にも合理的でありテンソル量としても満足すべき関数表現を与えることができることに利点がある。ここでは、後者の考え方に立脚するが、 $k-\varepsilon$ モデルに加える非線形項を前者の方法から決定することとする。

定式化は、複雑な横断面形状の流路への適用を考慮して、境界形状に適合した座標系にて行う。座標系として主流方向に x^1 軸、横断面内に x^2 軸、 x^3 軸を設定する。ただし、 x^1 軸と x^2 軸、 x^3 軸とは直交するが、 x^2 軸と x^3 軸とは非直交であるとする。レイノルズ応力 $(-\overline{u^i u^j})$ を次のように表現する。

$$-\overline{u^i u^j} = -\frac{2}{3} k g^{ij} + \nu_t (U^i;^j + U^j;^i) + \tau^{ij} \quad (1)$$

ここで、 τ^{ij} は変形速度テンソルの高次項であり、トレースがゼロのテンソルである。また、 g^{ij} は計量テンソルであり、 ν_t は渦動粘性係数、 U^i は平均流成分、セミコロン(;)は共偏微分を表す。このレイノルズ応力の表現は等方的な乱流場をも記述しうることを示唆している。

非線形項(τ^{ij})を Launder-Reece-Rodi による輸送方程式モデル⁹⁾の代数化から決定することとする。したがって、壁面近傍の流れ場を解析しうるモデルではない。レイノルズ応力の輸送方程式モデル中の移流項と拡散項とを無視すると以下ようになる。速度成分を v^i と表し、式(1)での u^i と区別する。

$$(1-\alpha)P^{ij} + B(\overline{v^i v^m v^j};^m;^j + \overline{v^j v^m v^i};^i;^j) - \gamma k (V^1;^j + V^j;^1) - \frac{\varepsilon}{k} [c_\psi \overline{v^i v^j} + \frac{2}{3}(1-\alpha-B-c_\psi)k g^{ij}] = 0 \quad (2)$$

なお、

$$P^{ij} = -\overline{v^i v^m v^j};^m;^j - \overline{v^j v^m v^i};^i;^j \quad (3)$$

主流が存在し、その大きさが2次流のそれより1桁程度以上大きいことから、次の近似が成立するものと仮定する。

$$v^1;^2, v^1;^3 \gg v^1;^1, v^2;^2, v^3;^3, v^2;^3, v^3;^2 \gg v^2;^1, v^3;^1 \quad (4)$$

このとき、式(2)のトレースの計算から、乱れエネルギーの生成項(Prod)は散逸項(ε)と等しくなることがわかる。乱れエネルギーの生成項は次のように近似できる。

$$\text{Prod} = \varepsilon = -\overline{v^i v^m v^i};^m;^i = -\overline{v^1 v^2 v^1};^2;^1 - \overline{v^1 v^3 v^1};^3;^1 \quad (5)$$

各レイノルズ応力成分に対する代数方程式を、式(4)のオーダー評価を式(2)に施すことによって求めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} & -\overline{v^1 v^1} \text{ 成分;} \\ & -\overline{v^1 v^1} = -c_0 k g^{11} \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} & -\overline{v^1 v^2} \text{ 成分;} \\ & -c_\psi \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^1 v^2} - (\gamma - B c_0) k v^1;^2;^2 - (1-\alpha)(\overline{v^2 v^2 v^1};^2;^2 + \overline{v^2 v^3 v^1};^3;^2) = 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} & -\overline{v^1 v^3} \text{ 成分;} \\ & -c_\psi \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^1 v^3} - (\gamma - B c_0) k v^1;^3;^3 - (1-\alpha)(\overline{v^2 v^3 v^1};^3;^2 + \overline{v^3 v^3 v^1};^3;^3) = 0 \end{aligned} \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} & -\overline{v^2 v^2} \text{ 成分;} \\ & -c_\psi \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^2 v^2} - \frac{2}{3}(1-\alpha-B-c_\psi)\varepsilon g^{22} + 2Bv^1 \overline{v^2 v^1};^2;^2 g_{11} = 0 \end{aligned} \quad (6d)$$

$$\begin{aligned} & -\overline{v^3 v^3} \text{ 成分;} \\ & -c_\psi \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^3 v^3} - \frac{2}{3}(1-\alpha-B-c_\psi)\varepsilon g^{33} + 2Bv^1 \overline{v^3 v^1};^3;^3 g_{11} = 0 \end{aligned} \quad (6e)$$

$$\begin{aligned} & -\overline{v^2 v^3} \text{ 成分;} \\ & -c_\psi \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^2 v^3} - \frac{2}{3}(1-\alpha-B-c_\psi)\varepsilon g^{23} + B(\overline{v^1 v^2 v^1};^3;^3 + \overline{v^1 v^3 v^1};^2;^2) g_{11} = 0 \end{aligned} \quad (6f)$$

連立方程式(6a)～(6f)を解くと、レイノルズ応力成分が次のように求められる。

$$-\overline{v^1 v^1} = -c_0 k g^{11} \quad (7a)$$

$$-\overline{v^1 v^2} = v_t^* v^1;^2 \quad (7b) \quad -\overline{v^1 v^3} = v_t^* v^1;^3 \quad (7c)$$

$$-\overline{v^2 v^2} = -c_k k g^{22} + c' v_t^* \frac{k}{\varepsilon} v^1;^2 v^1;^2 g_{11} \quad (7d)$$

$$-\overline{v^2 v^3} = -c_k k g^{23} + c' v_t^* \frac{k}{\varepsilon} v^1;^2 v^1;^3 g_{11} \quad (7e)$$

$$-\overline{v^3 v^3} = -c_k k g^{33} + c' v_t^* \frac{k}{\varepsilon} v^1;^3 v^1;^3 g_{11} \quad (7f)$$

レイノルズ応力の剪断成分 ($-\overline{v^1 v^2}$, $-\overline{v^1 v^3}$) が同一の渦動粘性係数 (ν_t^*) を用いて表現されている。また、Launder-Ying モデルはこのモデルの特別な場合であることがわかる。上式は、次のように変形される。

$$-\overline{v^1 v^1} = -\frac{2}{3} k g^{11} + c_1 v_t^* \frac{k}{\varepsilon} (v^1;^2 v^1;^2 + v^1;^3 v^1;^3) \quad (8a)$$

$$-\overline{v^1 v^2} = v_t^* v^1;^2 \quad (8b) \quad -\overline{v^1 v^3} = v_t^* v^1;^3 \quad (8c)$$

$$-\overline{v^2 v^2} = -\frac{2}{3} k g^{22} + v_t^* \frac{k}{\varepsilon} [(c_2 v^1;^2 v^1;^2 + c_3 v^1;^3 v^1;^3) g^{22} + c_4 v^1;^2 v^1;^3 g^{23}] g_{11} \quad (8d)$$

$$-\overline{v^2 v^3} = -\frac{2}{3} k g^{23} + v_t^* \frac{k}{\varepsilon} [(c_2 v^1;^2 v^1;^2 + c_3 v^1;^3 v^1;^3) g^{23} + c_4 v^1;^2 v^1;^3 g^{33}] g_{11} \quad (8e)$$

$$-\overline{v^3 v^3} = -\frac{2}{3} k g^{33} + v_t^* \frac{k}{\varepsilon} [(c_3 v^1;^2 v^1;^2 + c_2 v^1;^3 v^1;^3) g^{33} + c_4 v^1;^2 v^1;^3 g^{23}] g_{11} \quad (8f)$$

なお、モデル中の定数は次のようである。

$$c_1 = \frac{2}{3c_\psi} [2(1-\alpha) + \beta], \quad c_2 = \frac{2}{3c_\psi} (1-\alpha-\beta) \quad (9a, b)$$

$$c_3 = \frac{2}{3c_\psi} (1-\alpha+2\beta), \quad c_4 = \frac{2\beta}{c_\psi} \quad (9c, d)$$

$$\alpha = 0.7636 - 0.06f, \quad \beta = 0.1091 + 0.06f \quad (10a, b)$$

$$\gamma = 0.185, \quad c_\psi = 1.5 - 0.5f \quad (10c, d)$$

上式に現れる関数 (f) は壁面による異方性強化の影響を示す量であり、流れの対数則領域内では1、壁面から離れるにしたがって減少する値をとる。ここでは、次式で表される Ilegbusi⁹⁾ の表現を用いることとする。これは、流れが乱れの特性長さの変化量から壁面からの位置を検出すると考えたものであり、境界までの距離を組み込んだ従来の表現より適用範囲が広がるものと期待できる。

$$f = \left| \text{grad} \left(\frac{C_\mu^{3/4}}{\kappa} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right) \right| \quad (11)$$

式中の C_μ は0.09の値をとる定数であり、 κ はカルマン定数、 k は乱れエネルギー、 ε はエネルギー散逸率である。

式(4)のオーダー評価を考慮しながら式(1)と式(8)とを比較すると、レイノルズ応力の非線形項 (τ^{ij}) を次のように求めることができる。ただし、モデルの簡略化のために、渦動粘性係数 (ν_t^*) を式

(1) のそれ (ν_t) とを同一と近似している。

$$\tau^{11} = c_1 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} (v^1;_2 v^1;_2 + v^1;_3 v^1;_3) \quad (12a)$$

$$\tau^{12} = 0 \quad (12b)$$

$$\tau^{13} = 0 \quad (12c)$$

$$\tau^{22} = \nu_t \frac{k}{\varepsilon} [(c_2 v^1;_2 v^1;_2 + c_3 v^1;_3 v^1;_3) g^{22} + c_4 v^1;_3 v^1;_3 g^{23}] g_{11} \quad (12d)$$

$$\tau^{23} = \nu_t \frac{k}{\varepsilon} [(c_2 v^1;_2 v^1;_2 + c_3 v^1;_3 v^1;_3) g^{23} + c_4 v^1;_3 v^1;_3 g^{33}] g_{11} \quad (12e)$$

$$\tau^{33} = \nu_t \frac{k}{\varepsilon} [(c_3 v^1;_2 v^1;_2 + c_2 v^1;_3 v^1;_3) g^{33} + c_4 v^1;_2 v^1;_3 g^{23}] g_{11} \quad (12f)$$

デカルト座標系でのレイノルズ応力の表現は以下のようである。

$$-\overline{u^2} = -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} - c_1 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} [(\frac{\partial U}{\partial y})^2 + (\frac{\partial U}{\partial z})^2] \quad (13a)$$

$$-\overline{uv} = \nu_t (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \quad (13b)$$

$$-\overline{uw} = \nu_t (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \quad (13c)$$

$$-\overline{v^2} = -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} + \nu_t \frac{k}{\varepsilon} [(c_2 (\frac{\partial U}{\partial y})^2 + c_3 (\frac{\partial U}{\partial z})^2)] \quad (13d)$$

$$-\overline{vw} = \nu_t (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) + c_4 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} (\frac{\partial U}{\partial y}) (\frac{\partial U}{\partial z}) \quad (13e)$$

$$-\overline{w^2} = -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial w}{\partial z} + \nu_t \frac{k}{\varepsilon} [(c_3 (\frac{\partial U}{\partial y})^2 + c_2 (\frac{\partial U}{\partial z})^2)] \quad (13f)$$

このようにして得られた代数的応力モデルは管路流れに対する Naot-Rodi のモデル⁴⁾を拡張したものであることが知られる。また、直線流路の流れに対する Speziale のモデル⁸⁾や $k-\varepsilon$ モデルをもその特別な場合として包括していることが知られる。

3. 代数的応力モデルの適用

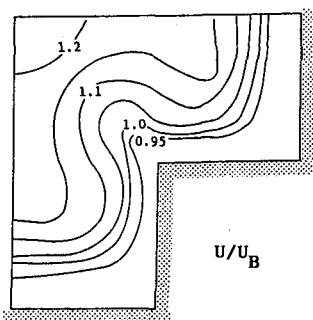
代数的応力モデルの妥当性を検討するために、正方形管路流れや複断面管路流れの解析に適用した。ここでは、十字形管路内の流れ場を詳細に計測している中山ら¹¹⁾の実験結果との対比を行う。なお、参考のために、オリジナルのモデル定数値を使用した Launder-Ying モデルによる結果を併記する。

基礎方程式は十分発達した流れ場に対する連続の式、3方向の運動量方程式と標準の $k-\varepsilon$ モデルである。主流方向を x 軸、鉛直上方を y 軸、幅方向を z 軸とする座標系を用いる。基礎方程式は有限体積法で離散化され、解かれた。

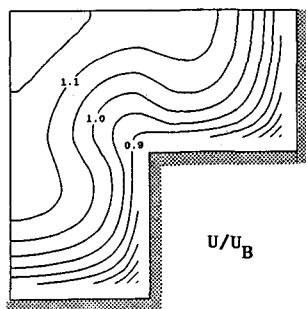
Fig. 1 は主流速度の等値線図を示している。実験結果においては、低流速部が高水数先端から低水路中央に向かって広がること、高水数上に高流速部が張り出している。本モデルはそれらの特徴をよく再現している。一方、Launder-Ying モデルは等流速線の湾曲を過小に算出している。

横断面内の2次流の分布を比較したものが Fig. 2 である。実験結果では1対のセルが形成されている。本モデルと Launder-Ying モデルも2次流のパターンを良好に再現している。本モデルは Launder-Ying モデルに比べ、低水路と高水数との境界面付近の2次流を大きく算出し、低水路底面近傍では小さく計算している。これが、Launder-Ying モデルでの主流の等流速線の湾曲が実験結果と異なる原因である。

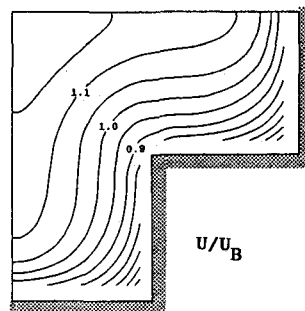
Fig. 3 はレイノルズ応力 ($-\overline{uv}$) を表している。本モデルが異符号領域の形成をも正確に算出していること



(a) Experiment

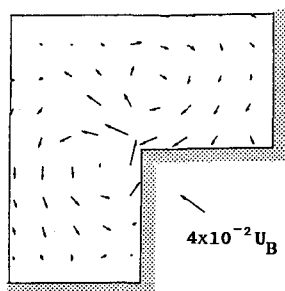


(b) Present model

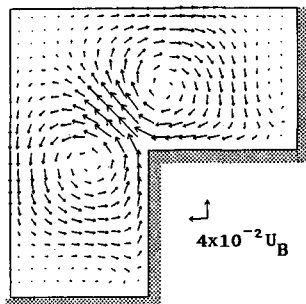


(c) Launder-Ying model

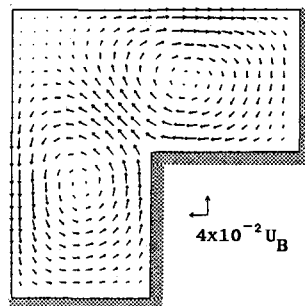
Fig. 1 Primary velocity



(a) Experiment

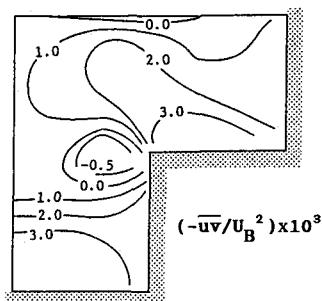


(b) Present model

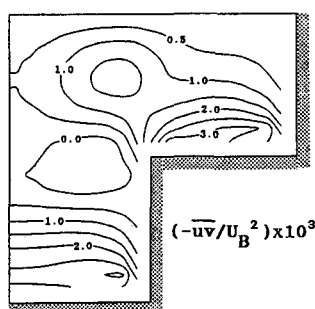


(c) Launder-Ying model

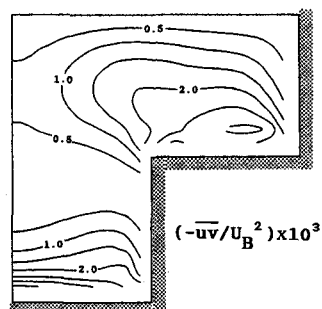
Fig. 2 Secondary flow



(a) Experiment

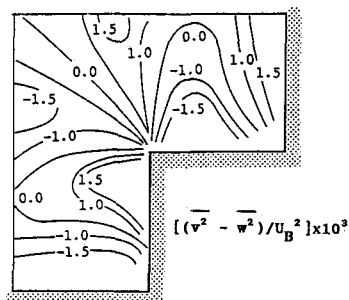


(b) Present model

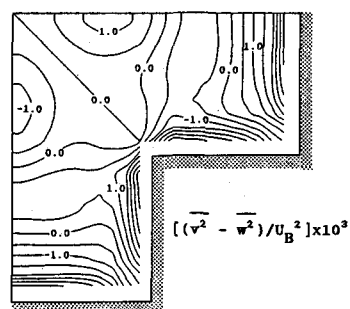


(c) Launder-Ying model

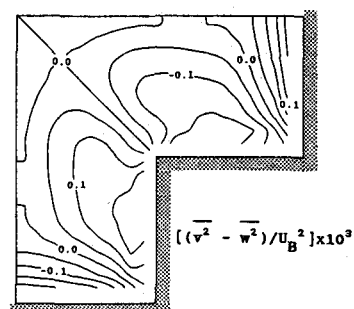
Fig. 3 Reynolds stress $(-\overline{uv})$



(a) Experiment



(b) Present model



(c) Launder-Ying model

Fig. 4 Anisotropy of normal stress $(\overline{v^2} - \overline{w^2})$

が知られる。このレイノルズ応力が主流の勾配から求められることから、Launder-Ying モデルが再現できないことは明らかである。

レイノルズ応力の垂直成分間の差 ($\overline{v^2 - w^2}$)，すなわち異方性は2次流の生成、維持機構の主要部である。その異方性を比較した結果が Fig. 4 である。本モデルは異方性の強い領域が壁面近傍と管路中心近くに形成されることを良好に算出している。一方、Launder-Ying モデルは壁面近傍の異方性の大きな領域を算出しているが、そのレベルは一桁過小である。なお、Launder-Ying モデルに本モデルと同程度の異方性を導入すると、今度は2次流を過大に算出し主流すら再現できなくなった。このことから、Launder-Ying モデルのような表現をとる乱流モデルでは2次流の生成機構を表現しえないと考えられる。本モデルは2次流を合理的に算出しており、複雑な横断面形状を有する管路流れに適用しうる可能性が示唆されたと言える。

4. おわりに

複雑な横断面形状を有する直線管路流れを解析することのできる代数的応力モデルを導出した。また、そのモデルが従来提案されているいくつかのモデルをその特別な場合として包含していることを述べた。さらに、そのモデルを複断面管路流れに適用し、妥当性を確認した。今後、異なる断面形状の管内流に適用するとともに、本モデルを拡張し開水路流れへの適用を検討する予定である。

参考文献

- 1) 河原能久, 玉井信行: 非円形断面直線流路の2次流に対する乱流モデルについて, 土木学会論文集, No. 399, 247-250, 1988.
- 2) Kawahara, Y., and Tamai, N.: Numerical calculation of turbulent flows in compound channels with an algebraic stress turbulence model, Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, 9-16, 1988.
- 3) Launder, B.E., and Ying, W.M.: Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section, Heat and Fluid Flow, No. 33, 455-461, 1973.
- 4) Naot, D., and Rodi, W.: Calculation of secondary currents in channel flow, J. Hyd. Div., ASCE, 108, 948-968, 1982.
- 5) Demuren, A.D., and Rodi, W.: Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts, J. Fluid Mech., Vol. 140, 189-222, 1984.
- 6) Baker, A.J., and Orzechowski, J.A.: An interaction algorithm for three-dimensional turbulent subsonic aerodynamic juncture region flow, AIAA J., Vol. 21, No. 4, 524-533, 1983.
- 7) Yoshizawa, A.: Statistical analysis of the derivation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation, Phys. Fluids, Vol. 27, 1377-1387, 1984.
- 8) Speziale, C.G.: On nonlinear K- ϵ and K- ϵ models of turbulence, J. Fluid Mech., Vol. 178, 459-475, 1987.
- 9) Launder, B.E., Reece, G.J., and Rodi, W.: Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, J. Fluid Mech., Vol. 68, 537-566, 1975.
- 10) Ilegbusi, J.O.: Numerical calculation of turbulent corner flows, Appl. Math. Modelling, Vol. 9, 263-270, 1985.
- 11) 中山 顕, 児山 仁, 渡辺貴彦: 十字形管路内の流れ及び熱伝達, 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 53, No. 489, 1573-1579, 1987.