

段波の一次元不定流解析

One-Dimensional Analysis of Open Channel Surges

長岡技術科学大学大学院 中 村 茂 Shigeru NAKAMURA

長岡技術科学大学建設系 福 嶋 祐 介 Yusuke FUKUSHIMA

Surges in open channels was computed by using Ameins' four-point difference scheme¹⁾ which is the most efficient method for flood routing problems³⁾. The method has been applied to surges²⁾, which suggested the optimum value of $\theta=0.6$, however, the effect of change of $\Delta x/\Delta t$ was not discussed. Price³⁾ has proposed, comparing the results with exact analytical solutions for the monoclinal wave, that the optimum value of $\Delta x/\Delta t$ is equal to kinematic wave speed. In this paper, comparisons are made between the results of numerical solutions and laboratory experiments. The results of calculations demonstrated good agreement with results of laboratory experiments. The numerical instability is observed for the large value of Δx compared to Δt .

[Key words : unsteady flow, open-channel surge, one-dimensional analysys]

1、序 論

開水路の不定流に関する水理学的数値シミュレーションには特性曲線を用いた解法や陽型式、陰型式の差分法等があるが、段波のような変化の急な流れに適用された例は以下に示す数例²⁾⁵⁾⁶⁾を見るばかりである。この内河西、白砂⁵⁾、岩佐、多田⁶⁾では固定格子点の特性曲線法を用いており、その内挿、外挿に新手法を取り入れている。Chaudhry & Contractor²⁾では Amein & Fang¹⁾の weighted four-point implicit schemeを用い、 θ (weighting factor) に対して、その最適値はマンニングの n と最上流端における段波前面の水面勾配の関数であるとしている。一方、Price³⁾ は単斜上昇波に対して weighted four-point implicit scheme で $\theta = 0.5$ に固定して計算をし、厳密解との比較をした。そこから $\Delta x/\Delta t$ の最適値を求めている。本論文は Amein et al.¹⁾⁴⁾ の weighted four-point implicit scheme を用いて段波の数値シミュレーションを試み、これを実験結果と比較することにより、特に Δt と Δx との関係に着目して、その性質を考察する。

2、計算手法

2.1 支配方程式

今回の一次元不定流数値解析に用いた連続の式と運動方程式は次のようである。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) = g(S_x - S_f) - g \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2)$$

ここに、 Q :流量、 A :断面積、 y :水深、 q :単位長さ当りの横越流量、 S_x :勾配、 S_f :摩擦勾配、

β :運動量補正係数、 g :重力加速度、 B :水面における水路幅

2.2 数値計算手法

この差分手法は図-1に示したような $x-t$ 座標上で考えられている。図中、 x 軸は空間的広がりを示し、 y 軸は時間の経過を示す。一次元不定流計算の場合 x 軸は流下方向距離を示す。解かれる対象となる変数(未知量)は、各々の node に対応する流量 Q (あるいは流速 u) と水深 y である。方程式(連続式と運動方程式)は図中の点 M の位置にたてられ、離散化の際には、その周囲の四つの点を用いて微分値などが表現さ

れる。また、点Mの位置が周囲の四つの点の中心から、y軸方向にずれることにより差分の形式は中心差分から陰的（Mの位置が図中上向きにずれる場合）なもの、或は陽的（Mの位置が図中下向きにずれる場合）なものに変化する。これはパラメータ θ (weighting factor)により表現される。ある任意の関数 Γ についてこれを示すと次式のようなである。

$$\Gamma(M) = \frac{\theta}{2}(\Gamma_1^{j+1} + \Gamma_{1+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2}(\Gamma_1^j + \Gamma_{1+1}^j) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(M) = \frac{\theta}{\Delta x}(\Gamma_{1+1}^{j+1} - \Gamma_1^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(\Gamma_{1+1}^j - \Gamma_1^j) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(M) = \frac{1}{2\Delta t}\{(\Gamma_1^{j+1} + \Gamma_{1+1}^{j+1}) - (\Gamma_1^j + \Gamma_{1+1}^j)\} \quad (5)$$

上式において、 Γ に添えられているスーパーSCRIPTは時刻を示し、サブSCRIPTは空間的な位置を示している。スーパーSCRIPT j が添えられている Γ の値は、現時刻の値であり、既知量と見なされる。 $j+1$ が添えられている Γ は一時間ステップ経過後の値を示し、未知量である。

いま、空間的（x方向の）nodeの数を N とすると、未知量の数は $2N$ 個となる。一方、方程式は各nodeの間毎に2つ（連続式と運動方程式）たてられるので、その

数は $2(N-1)$ 個となる。式の数と未知量の数の関係から、このままでは解くことはできない。そこで、上流端と下流端に対して各々境界条件を与え方程式を2つ増やし、全部で $2N$ 個の式を用意する。本計算手法では、これらを連立して解を獲る。なお連立方程式の解法についてはニュートン法を用いる。

連続の式（1）を式（3）（4）（5）にならって差分化すると次式のようなになる。

$$\frac{\theta}{\Delta x}(Q_{1+1}^{j+1} - Q_1^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(Q_{1+1}^j - Q_1^j) + \frac{1}{2\Delta t}\{(A_1^{j+1} + A_{1+1}^{j+1}) - (A_1^j + A_{1+1}^j)\} = 0 \quad (6)$$

運動方程式（2）は次式のように差分化される。

$$\frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\tilde{A}^3} \left\{ \tilde{A} \tilde{Q}^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2\tilde{\rho} \tilde{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \rho Q^2 \frac{\partial A}{\partial x} \right\} - g\tilde{S}_x + g\tilde{S}_f + g \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

式（6）（7）の右辺は未知量 $Q_{1+1}^{j+1}, Q_1^{j+1}, y_{1+1}^{j+1}, y_1^{j+1}$ の関数であるので、次式のように表現できる。

$$F_i(Q_{1+1}^{j+1}, Q_1^{j+1}, y_{1+1}^{j+1}, y_1^{j+1}) = \frac{\theta}{\Delta x}(Q_{1+1}^{j+1} - Q_1^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(Q_{1+1}^j - Q_1^j) + \frac{1}{2\Delta t}\{(A_1^{j+1} + A_{1+1}^{j+1}) - (A_1^j + A_{1+1}^j)\} \quad (8)$$

$$G_i(Q_{1+1}^{j+1}, Q_1^{j+1}, y_{1+1}^{j+1}, y_1^{j+1}) = \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\tilde{A}^3} \left\{ \tilde{A} \tilde{Q}^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2\tilde{\rho} \tilde{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \rho Q^2 \frac{\partial A}{\partial x} \right\} - g\tilde{S}_x + g\tilde{S}_f + g \frac{\partial y}{\partial x} \quad (9)$$

ニュートン法では式（8）（9）を $Q_{1+1}^{j+1}, Q_1^{j+1}, y_{1+1}^{j+1}, y_1^{j+1}$ で各々偏微分した値を必要とする。それらを

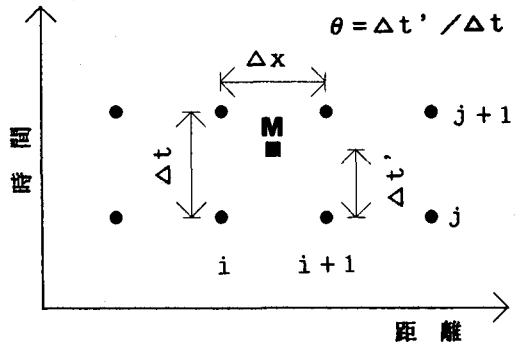


図-1 差分格子

示すと次のようである。(スーパースクリプトj+1は省略する)

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} = -\frac{\theta}{\Delta x} \quad (10), \quad \frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}} = \frac{\theta}{\Delta x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_i} = \frac{1}{2\Delta t} \frac{dA_i}{dy_i} = \frac{1}{2\Delta t} B_i(y_i) \quad (12), \quad \frac{\partial F_i}{\partial Q_{i+1}} = \frac{1}{2\Delta t} \frac{dA_{i+1}}{dy_{i+1}} = \frac{1}{2\Delta t} B_{i+1}(y_{i+1}) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial y_i} = & -\frac{\theta}{2\tilde{A}^2} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}^3} B_i \left\{ \tilde{Q} \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2\rho \frac{\partial Q}{\partial x} - \tilde{Q}\tilde{\rho} \left(\frac{3}{2\tilde{A}} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{\Delta x} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{3} \theta g S_{f_i} \left(2P_i^{-1} \frac{dP_i}{dy_i} - 5B_i A_i^{-1} \right) - \frac{1}{\Delta x} \theta g \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial y_{j+1}} = & -\frac{\theta}{2\tilde{A}^2} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}^3} B_{i+1} \left\{ \tilde{Q} \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2\rho \frac{\partial Q}{\partial x} - \tilde{Q}\tilde{\rho} \left(\frac{3}{2\tilde{A}} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{\Delta x} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{3} \theta g S_{f_{i+1}} \left(2P_{i+1}^{-1} \frac{dP_{i+1}}{dy_{i+1}} - 5B_{i+1} A_{i+1}^{-1} \right) + \frac{1}{\Delta x} \theta g \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial Q_i} = \frac{1}{2\Delta t} \frac{1}{\tilde{A}} + \frac{\theta}{\tilde{A}^2} \left\{ \tilde{Q} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \tilde{\rho} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{2}{\Delta x} \tilde{Q} \right) - \tilde{\rho} \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}} \frac{\partial A}{\partial x} \right\} + g \theta n_i^2 Q_i P_i^{4/3} A_i^{-1/3} \quad (16)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial Q_{i+1}} = \frac{1}{2\Delta t} \frac{1}{\tilde{A}} + \frac{\theta}{\tilde{A}^2} \left\{ \tilde{Q} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \tilde{\rho} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2}{\Delta x} \tilde{Q} \right) - \tilde{\rho} \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}} \frac{\partial A}{\partial x} \right\} + g \theta n_{i+1}^2 Q_{i+1} P_{i+1}^{4/3} A_{i+1}^{-1/3} \quad (17)$$

$$\tilde{A} = \frac{\theta}{2} (A_1^{j+1} + A_{1+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2} (A_1^j + A_{1+1}^j), \quad \tilde{\rho} = \frac{\theta}{2} (\rho_1^{j+1} + \rho_{1+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2} (\rho_1^j + \rho_{1+1}^j),$$

$$\tilde{Q} = \frac{\theta}{2} (Q_1^{j+1} + Q_{1+1}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2} (Q_1^j + Q_{1+1}^j), \quad \tilde{S}_x = \frac{S_{x_{i+1}} + S_{x_i}}{2},$$

$$\tilde{S}_f = \frac{\theta}{2} (S_{f_1}^{j+1} + S_{f_{1+1}}^{j+1}) + \frac{1-\theta}{2} (S_{f_1}^j + S_{f_{1+1}}^j),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ (Q_1^{j+1} + Q_{1+1}^{j+1}) - (Q_1^j + Q_{1+1}^j) \right\}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{1+1}^{j+1} - Q_1^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_{1+1}^j - Q_1^j), \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (A_{1+1}^{j+1} - A_1^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (A_{1+1}^j - A_1^j)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (\rho_{1+1}^{j+1} - \rho_1^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (\rho_{1+1}^j - \rho_1^j), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (y_{1+1}^{j+1} - y_1^{j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (y_{1+1}^j - y_1^j)$$

これらの値は、マトリックス中に配置され、それが解かれる。連立方程式の解法ではガウスの消去法を用い、その中では部分選択と行スケーリングを行っている。

2.3 断面評価手法

一次元開水路流の抵抗を評価する場合、底面及び側面の抵抗をどの様に評価するかが問題となる。今回作成したプログラムでは断面評価の方法として、福嶋、中村⁷⁾で提案された混合分割法を採用している。これを簡単に説明すると次のようである。

これまでの断面評価法は大きく2つに分けることができる。断面分割法と径深分割法である。断面分割法は広幅開水路に対して考えられた分割法であり、横方向流速差を表現できるという特徴を持つ。他方、径深分割法は狭幅開水路に対して考えられたものであり、底面と側壁で粗度が異なる場合にその効果を発揮する。混合分割法ではまず断面全体に対して鉛直線で断面分割を行い、その分割された各小断面に対して径深分割

を施す。こうすることにより、横方向流速差を表現でき、且つ鉛直に近い壁面を持つ横断面形状にも対応できる。

では、図-2の様な断面に混合分割法を適用することを考える。図中鉛直の実線は断面分割を示し、破線はその小分割面内での径深分割を概念的に示している。小分割面 j の潤辺 i の粗度係数を n_{ji} 、潤辺長を s_{ji} 、小分割断面の断面積を A_j とすれば径深分割法から、この小分割断面の合成粗度係数 n_{ej} は次のように求められる。

$$n_{ej} = \left(\frac{1}{s_j} \sum_i s_{ji} n_{ji}^{3/2} \right)^{2/3} \quad (18)$$

これを用いて、全断面に対する合成粗度係数 n_e は断面分割法から次式のようなのである。

$$n_e = \frac{A^{5/3} s^{-2/3}}{\sum_j \frac{1}{n_{ej}} A_j^{5/3} s_j^{-2/3}} \quad (17)$$

せん断応力は次のように評価される。

$$\frac{1}{\rho} \int_s \tau \, ds = \frac{g n_{ej}^2 A_j}{R^{4/3}} \frac{Q^2}{A^2} \quad (19)$$

また、各小分割面ごとの流速と運動量補正係数は次のように求められる。

$$U_j = \frac{n_e}{n_{ej}} \left(\frac{R_j}{R} \right)^{2/3} \frac{Q}{A} \quad (20)$$

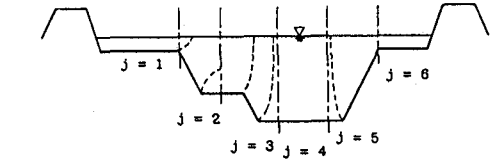


図-2 混合分割法

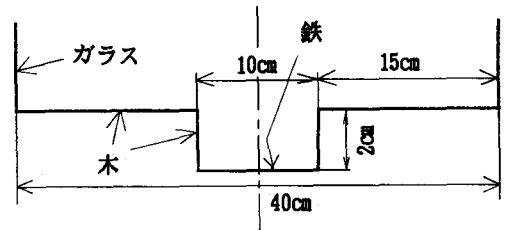


図-3 実験水路断面図

$$\beta = \frac{\sum_j (U_j^2 A_j)}{U^2 A} \quad (21)$$

4、実験結果との比較

4.1 実験方法

実験は単断面と複断面に対して同様の実験を行った。

実験に用いた単断面水路は長さ10m、幅40cm、高さ40cm、底面鉄製ペンキ仕上げ、側面ガラス製の可変勾配水路である。また、複断面水路は図-3に示したような断面形状の可変勾配型の水路である。勾配は単断面では1/500、複断面では1/100とした。

段波は水路上流端にスルースゲートを設けこれを瞬時に開放することにより発生させた。容量式波高計とプロベラ流速計を用いて、同じ地点の水深の変化と流速の変化をそれぞれ測定する。測点は4m間隔に3カ所である。単断面では流速、水深共に各測点につき一カ所、複断面水路ではその二次元性を考慮し底水路と高水敷の2カ所につい

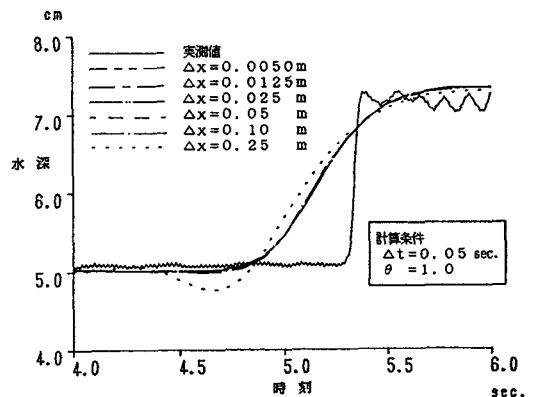


図-4 Δx による違い ($\theta = 1.0$)

て測定した。各センサーからの信号はA/Dコンバータを介してパソコンへ送られ、0.01秒間隔のデジタルデータとしてディスクに保存される。

4.2 実験結果と計算結果との比較

不等流計算によりマンニングの n を求めた。この結果マンニングの n は単断面では $n=0.017$ 、複断面では $n=0.014$ とした。計算では最上流測点における流速と水深から流量を計算し、これを上流端境界条件としている。下流端境界条件は最下流測点の水深データである。計算結果との比較は中流測点における水深に対して行っている。

図-4～6は単断面の場合の実験結果と計算結果との比較である。計算条件の一覧を表-1に示した。 $\theta=1.0$ の場合、 Δt を固定して Δx を変化させた場合の比較が図-4である。ここに示されている計算例は $\Delta x/\Delta t=0.25, 0.5, 1, 2, 5$ m/sec.の場合である。 $\Delta x/\Delta t=0.25, 0.5, 1, 2$ m/sec.の場合には結果に大きな差異はない。これに対し $\Delta x/\Delta t=5$ m/sec.の場合、段波前面に水面の振動が生じている。段波の前面に生じる小さな波というのは理論的に考えられず、よってこれは数値振動であると考えられる。 $\theta=0.6$ の場合の同様な計算結果が図-5である。 $\Delta x/\Delta t=2, 5$ m/sec.の場合に同様な数値振動が発生している。

Price³⁾では $\Delta x/\Delta t$ の最適値として $\Delta x/\Delta t=3/2 \times Q/A$ m/sec.を示している。また、Chaudhry and Contractor²⁾は段波に対して $\theta=0.6$ が最適とする。今回の実験結果にこれを適用すれば $\Delta x/\Delta t \approx 0.45$ m/sec.であり $\theta=1.0, 0.6$ の場合ともに数値振動は発生していない。

図-6の比較は θ を変化させることにより Δt を小さくすると同様の効果を示す(段波前面の勾配が急になること)ことを示唆している。

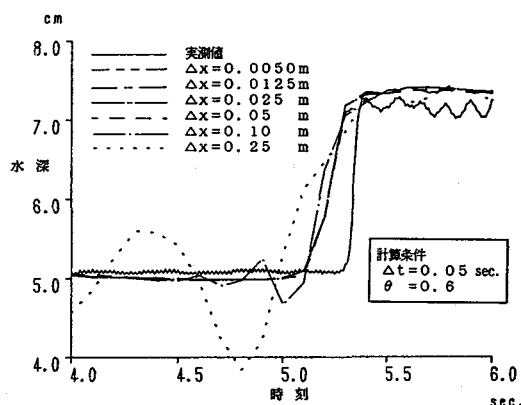


図-5 Δx による違い ($\theta=0.6$)

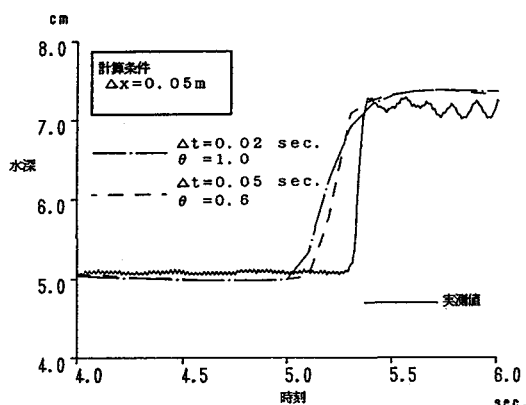


図-6 θ の効果

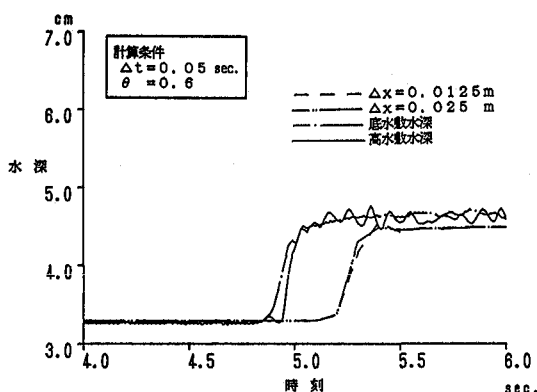


図-7 複断面水路の場合

表-1 計算条件一覧(単断面)

$\Delta x/\Delta t$ (m/s)	0.1	0.25	0.5	1	2	5
$\theta = 1.0$	○	○	○	○	○	×
$\theta = 0.6$	○	○	○	○	×	×

○: 数値振動なし、 ×: 数値振動が観測された

以上の単断面の場合の結果を踏まえ、 $\Delta t=0.05\text{sec.}$ に対して適当と考えられる Δx を用いて複断面の場合の計算を行った。 $\Delta x/\Delta t=0.25, 0.5 \text{ m/sec.}$ 、 $\theta=0.6$ の計算結果が図-7~8である。図-8では、上流端流量を試みに10%割増して計算した。この複断面の段波の場合 Price³⁾ による最適な $\Delta x/\Delta t$ は $\Delta x/\Delta t \approx 0.2 \text{ m/sec}$ である。計算結果は実験値をよく再現し、段波前面の水面の振動も現れない。尚、流量10%割増し時の n は $n=0.012$ とした。

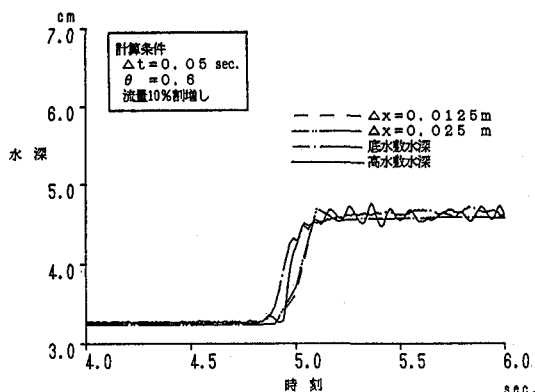


図-8 複断面水路の場合(流量を10%割増した計算)

5. 結 論

- 1) Amein et al.¹⁾⁴⁾ の weighted four-point implicit scheme は(実験データの精度の範囲で)実験値をよく再現した。
- 2) Price³⁾ の示した $\Delta x/\Delta t$ の最適値は実験と計算結果との比較により、数値振動が生じないという観点から確認された。
- 3) $\Delta x/\Delta t$ が大きくなるほど計算結果に乱れを生じる傾向を示した。
- 4) 複断面の計算においても、同様の傾向がみられた。

謝 辞

実験に協力して頂いた長岡技術科学大学水工学研究室修士一年伴享君に記して謝意を表す。

参考文献

- 1) Amein, M. and Fang, C.S.; Implicit Flood Routing in Natural Channels, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.96, No.HY12, Proc. Paper 7773, Dec., 1970, pp.2481-2500.
- 2) Chaudhry, Y.M and Contractor, D.N.; Application of the Implicit Method to Surges in Open Channels Water Resources Research, Vol.9, No.6, 1973.
- 3) Price, R.K.; Comparison of Four Numerical Methods for Flood Routing, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.100, No.HY7, Proc. Paper 10659, July, 1974, pp.879-899.
- 4) Amein, M. and Chu, H.L.; Implicit Flood Routing in Natural Channels, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.101, No.HY6, Proc. Paper 11378, Jun., 1975, pp.717-731.
- 5) 河西 基・白砂孝夫; 河道・貯水池系の洪水伝播解析、第27回水理講演会論文集、1983年2月、pp.17-22.
- 6) 岩佐義朗・多田彰秀; 不連続部を含む時間的変化の急な流れの数値シミュレーション、第29回水理講演会論文集、1985年2月、pp.663-668.
- 7) 福嶋祐介・中村 茂; 複断面開水路流の抵抗則について、第6回土木学会新潟会研究調査発表会論文集、昭和63年10月、pp.173-178.
- 8) French, R.H., "Open-Channel Hydraulics" McGraw-Hill, 1986, pp.549-582.