

観測水位の不確定性を考慮した不圧帯水層定数の逆解析

A Stochastic Approach to the Inverse Problem of Unconfined Heterogeneous Aquifer

名古屋大学工学部 原田守博 M. Harada

名古屋大学工学部 高木不折 F. Takagi

In conventional analysis of the regional groundwater flow, the model parameters T, S are identified by a direct comparison of the computed head values with the observed head data. However, we should keep in mind that the computed values are macroscopic solutions, while the observed data include local random-components caused by the heterogeneity of aquifer. This study aims to propose a new method for the parameter identification, which takes full advantage of the statistical property on uncertainty of actual head behavior.

Keywords: inverse problem, heterogeneous aquifer, head variance, parameter identification

1. はじめに

実際の帯水層は水理特性が空間的に不規則に分布した不均質場であり、現地における地下水流動は時間的・空間的にきわめて複雑・多様なものである。それにもかかわらず、地下水の観測では、限られた数の観測井においてその地点の水位データが得られるにすぎない。通常の広域地下水の解析は、そうしたわずかな観測情報に基づいて行われており、透水量係数 T や有効空隙率(または貯留係数) S などの帯水層定数(モデル・パラメータ)は、解析結果が観測水位データに合うように試行錯誤的に決められる。近年、これらのパラメータ同定をより合理的に行うべく、観測データを入力して最適のパラメータ値を推定する逆解析法が用いられつつあるが、この場合においても、パラメータは観測水位と計算水位を直接比較し、その差を最小化するように同定基準を設けて推定されている。しかしながら、観測水位がその地点の局所性をも強く反映したものであるのに対し、計算水位は確定的な巨視的パラメータをもつ支配方程式を単純化した境界条件の下で解いたものであって、両者の空間的代表スケールにはかなりの隔たりがあるといえる。したがって、質の異なる両者を単純に比較する同定手法では、逆解析が不安定になるなどパラメータが正しく同定できない可能性がある。本研究は、こうした従来の同定基準のもつ問題点を事例を挙げて指摘したうえで、観測水位の不確定性を統計量の形で定量化し、同定過程に事前情報として反映させる新たな手法について述べるものである。

2. 対象とする地下水状態と逆解析条件

2.1 観測される“実現現象”の生成

本研究では、降雨によって地下水位が変動する不圧帯水層を対象として、いくつかの地点で観測した水位データをもとに帯水層定数を逆推定する問題を考える。とくに、降雨は半日～1日程度の短期間に強い雨量強度で生じ、その後に長い無降雨期間が続く状況を想定している。逆解析の基礎となる観測水位データは、図-1のような水平二次元帯水層において、線形化された基礎方程式(1)を順問題として有限要素解析することにより“実現現象”を数值的に生成し、所定の観測条件に従って水位をサンプリングするものとする。

$$S(x, y) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[T(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + R(x, y, t) \quad (1)$$

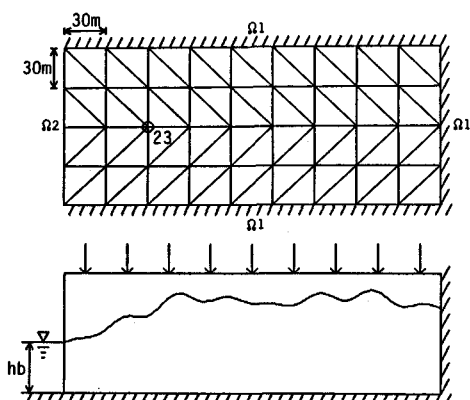


図-1 対象とする帯水層

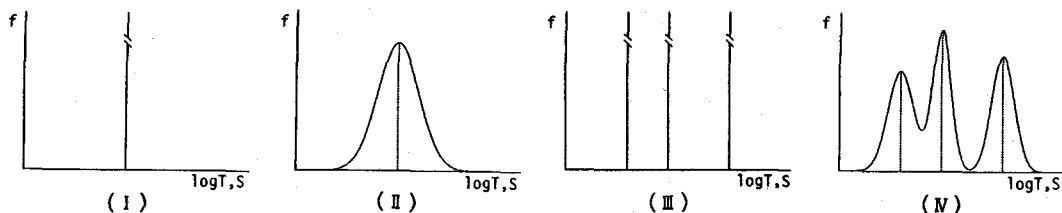


図-2 帯水層定数 T, S の頻度分布による流れ場の分類

ここに、 S : 有効空隙率、 T : 透水量係数、 h : 地下水位、 R : 降雨による涵養強度 ($=83 \text{ mm/hr}$) であり、 $t > 0.5 \text{ day}$ では $R=0$ とする。また、ここで考える実現現象は次の初期・境界条件下のものとする。

初期条件: $h(x, y, 0) = h_0 (=10\text{m})$ 境界条件: $\partial h / \partial n = 0 (\Omega \in \Omega_1)$, $h(x, y, t) = h_b (=10\text{m}) (\Omega \in \Omega_2)$

つぎに、想定する実帯水層の定数 T, S について考える。実際の流域における帯水層定数は、その頻度分布が図-2(I)のような完全に均質な場合はきわめて稀であって、一般的には地質学的に一樣な地域であっても T, S は空間的にばらついていることが多く、 T は対数正規分布、 S は正規分布に従うことが知られている (図-2(II))。さらに、流域が地質学的にいくつかの区域に分けられる場合には、その内部での均質・不均質性に応じて T, S の頻度分布は(III)(IV)のようになる。ここでは、これら4つのケースのうち(I)と(II)をとりあげ、逆問題を考えることにする。まず均質場(I)では、帯水層のすべての要素で $T=100 (\text{m}^2/\text{day})$, $S=0.2$ と設定する。不均質場(II)では、 $T(x, y)$ を $E[\log_{10} T(x, y)] = 2.0$, $\text{Var}[\log_{10} T(x, y)] = 0.05$ の対数正規分布から、 $S(x, y)$ を $E[S(x, y)] = 0.2$, $\text{Var}[S(x, y)] = 0.005$ の正規分布からそれぞれランダムに抽出し、各要素に独立に与えるものとする。ただし、 T の値が大きい地点では S の値も大きめであるといった実際の傾向を表すために、同一要素の T と S は同じ乱数値を用いてランダム発生させている。

2.2 同定される等価モデル

上述のように、本研究で実現現象として想定する帯水層は、(I) T, S が空間的に一定な場、または(II)不均質であっても T, S が空間的に一定な平均値のまわりで小さく変動している場である。こうした流れ場における地下水挙動を評価しようとするとき、その解析には、帯水層全体を代表する一定のパラメータをもった等価な均質モデルを用いるのが常識的である。等価モデルの基礎方程式は、(1)式に対応して

$$S_0 \frac{\partial h^*}{\partial t} = T_0 \left[\frac{\partial^2 h^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^*}{\partial y^2} \right] + R(t) \quad (2)$$

ここに、 h^* : 等価帯水層の水位、 T_0, S_0 : 等価パラメータ (空間的に一定) であり、“実現現象”の観測水位から同定される値である。涵養強度 R は、パラメータの逆解析を無降雨期間において行うことにすれば $R=0$ である。そうした場合、パラメータ T_0, S_0 をそれぞれ独立に同定することはもはや不可能であり、その比である水頭拡散率 T_0/S_0 のみが同定可能となる。逆解析にあたって、等価帯水層の境界条件は既知とし想定した実帯水層と同一に設定する。また、 h^* の初期条件は降

雨直後に一斉観測が行われるものとして、その平均値分布で与えるものとする。以上により、本研究での逆問題は

『帯水層(I)(II)で生じている非定常地下水位を所定の条件で観測し、その水位データに基づいて等価帯水層のモデルパラメータ (水頭拡散率) T_0/S_0 を同定すること』である。

2.3 水位の観測条件

現地における地下水位の観測は、種々の制約により質的量的に限られたものであることが多い。観測水位データの一般的な存在状況を時間・空間軸で図示すれば、図-3のようになる。すなわち、実際に行われている水位観測は、たかだか数地点 (x_i, j, k ・

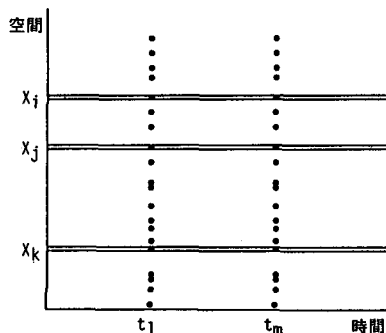


図-3 観測水位データの存在状況

・・)における連続時間観測か、またはある時刻($t_{l,m} \dots$)において多くの既設井戸を利用した一斉観測が行われる程度であって、全時間全空間の地下水状態の把握には程遠いものである。本研究ではこうした実状を考慮して、(I)(II)の場合について得られる

(a) 1地点での連続時間観測データ, (b) 多地点での複数回の一斉観測データ
という2種類の観測水位を基礎に逆解析を試みることにする。

3. 従来のパラメータ同定基準とその問題点

3.1 逆問題の定式化

通常、用いられている帯水層定数(モデルパラメータ)の同定基準は、計算水位と観測水位を直接比較しその差を最も小さくする、すなわち次の目的関数の最小化を図るものである。

$$J1(P1, P2, \dots, Pl) = \sum_{i=1}^m (h_i^{obs} - h_i^{cal})^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

ここに、 h^{obs} : 観測水位, h^{cal} : 計算水位, m : 観測値の数, P : モデルパラメータ, l : パラメータの数である。本研究の場合 $l=2$ で、 $P1=To$, $P2=So$ である。(3)式は、水位 h がパラメータ P に関する非線形関数であるために、非線形最適化問題となる。この種の問題の解法としては、探索効率の良いアルゴリズムが種々開発されている¹⁾が、ここではその基本形ともいえるガウス・ニュートン法を採用する。

ガウス・ニュートン法では、関数 $h(P)$ をパラメータ P のまわりで線形化したうえで、目的関数の最小条件 $[\partial J1 / \partial Pj] = 0$ を用いることにより、次の正規方程式が導かれる。

$$\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m Z_{ik} Z_{ik} \Delta P_k = \sum_{i=1}^m (h_i^{obs} - h_i^{cal}) \cdot Z_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, l \quad (4)$$

ここに、 Z : パラメータに関する水位のヤコビアン行列であり、 $Z_{ij} = \partial h_i^{cal} / \partial Pj$, ΔP : P の修正量である。ヤコビアン Z は解析的に求めることが困難であるので、次式のように前進差分近似で算定する。²⁾

$$Z_{ij} = \{h_i^{cal}(Pj + \delta Pj) - h_i^{cal}(Pj)\} / \delta Pj \quad (5)$$

ここに、 $\delta Pj = \delta j \cdot Pj$, δj : 定数である。逆解析にあたっては、まず各パラメータ Pj について δj および初期推定値を設定し、等価モデルの基礎方程式(2)を数値解析することによって、(5)式からヤコビアン行列を求める。次に正規方程式(4)を解くことによってパラメータの修正量を求め、それが十分小さい、つまり

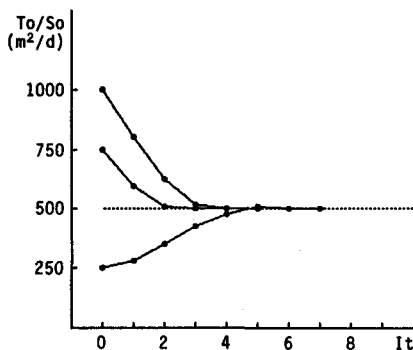
$$\Delta Pj < \varepsilon j, \quad \varepsilon j: \text{収束判定定数} \quad (6)$$

が満たされるまで初期推定値を改良し、反復計算する。ここでは、 δj の数値は $\delta 1=0.0001$, $\delta 2=0.1$ とし、収束判定定数は $\varepsilon j = Pj / 200$ とおいている。

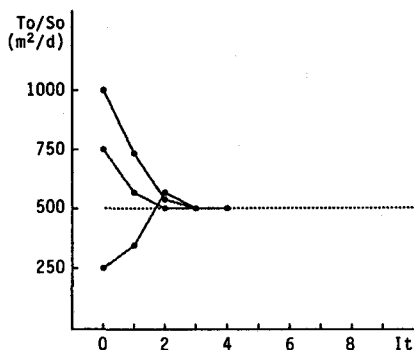
3.2 同定基準 J1 による逆解析

観測データ(a)(b)を基礎として、帯水層(I)(II)に対する等価モデルのパラメータ To/So を従来の方法で同定した結果について述べる。帯水層(I)は均質であり、等価モデルの To/So を同定することは実帯水層の T/S を求めることに他ならない。したがって、パラメータが正しく同定されれば、計算水位 $h^{cal} (=h^*)$ と観測水位 h^{obs} は完全に一致する。図-4 はその同定過程を示しており、(a) が図-1 の節点 No. 23 における5日間の日データによるもの、(b) が降雨停止後1日と5日における全節点水位データによるものである。今回の場合、実帯水層の T/S は $500 (=100/0.2) \text{ m}^2/\text{day}$ であり、 To/So の初期推定値を 1000, 750, 250 のどれに設定した場合でも $It=3 \sim 5$ 回程度の反復によって 500 に完全収束し、同定に成功していることが分かる。(a) よりも (b) の方が収束が早いのは、(b) の方が観測データ個数が多いためと考えられる。

一方、帯水層(II)は T/S が平均値一定のランダム分布をする場合であり、等価モデルの To/So は $E[T/S]$ に対応する。図-4 と同じ観測データ(a)(b)に基づき逆解析を行った結果が図-5 である。いま、 $E[T/S]$ の真値は $500 (\text{m}^2/\text{day})$ に設定されているが、(a)(b) どちらのデータを用いても同定値は収束せ

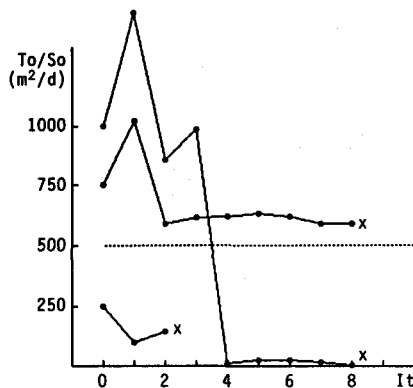


(a) 一地点・連続時間データの場合

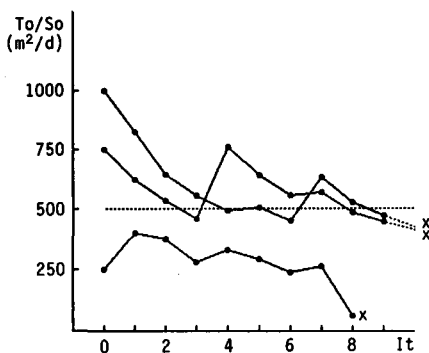


(b) 全地点・二回の一斉測水データの場合

図-4 同定基準J1による逆解析結果 [帯水層(I)]



(a) 一地点・連続時間データの場合



(b) 全地点・二回の一斉測水データの場合

図-5 同定基準J1による逆解析結果 [帯水層(II)]

ず、反復を繰り返すうちにTまたはSが不合理な値となって、解は発散してしまっている(x印)。これは、帯水層の不均質性のために、地下水位の空間分布が強雨に伴い大きく乱され、水位の観測値にはその地点のローカリティーを反映した不確定な成分が含まれるためと考えられる。こうした水位分布のランダム性は、無降雨期間に徐々に平準化するものの、 $E[T/S]$ の値が小さく不均質性の強い帯水層ほど長く残存し、完全に消失することはない。図-5とくに(b)の結果は、一斉測水を行った二つの時間断面の間で水位の不齊が減少しているにもかかわらず、同定基準J1ではすべての水位データを等しい重みで捉えてしまうところにパラメータを同定できなかった原因があるといえる。次章では、こうした場の不均質性に起因する水位の不確定性について、その統計的特性を考慮した逆解析手法を考える。

4. 地下水位の分散に基づく逆解析法

4.1 不均質場における水位分布の統計的特性

近年、不均質な流れ場における地下水挙動を確率統計的な立場から評価しようとした研究が数多くなされている。例えば、一次元流にモンテカルロ法を用いて帯水層定数のランダム性が水位分布に及ぼす影響を検討したFreezeの研究³⁾、定常流にスペクトル解析的アプローチを行って水位の統計的分散を求めたBakrらの研究⁴⁾などが挙げられる。著者らは、二次元非定常不圧流に対し、基礎方程式を摂動展開することによって水位の統計的空間構造(パリオグラム)を解析的に求めている⁵⁾。その対象現象は、本研究の帯水層(II)と同様、降雨によって乱された水位分布が無降雨期間に平準化する過程であるが、流れ場が二次元無限場であることや降雨直後の水位分布のランダム成分がwhite noise近似できることなどが仮定されている。降雨後

の平準化過程におけるバリオグラムの理論式によれば、水位分散の時間的发展は次のように表される。

$$\sigma_h^2(t) = \frac{\sigma_o^2 \rho_o}{8\pi E[T/S] t} \quad (7)$$

ここに、 $\sigma_h^2(t)$: 水位分散、 t : 降雨停止時からの時間、 σ_o^2 : 降雨直後の水位分散、 ρ_o : 定数である。

4.2 水位分散を用いた不均質場に対する同定基準

$$\text{水位の分散は定義により、} \sigma_h^2(t) = E[(h(t) - E[h(t)])^2] \quad (8)$$

式中の $E[h(t)]$ は流れ場が均質であった場合の水位であり、いま考えている等価モデルの計算水位 h^{cal} ($=h^*$) に対応する。このことから、(7)式はパラメータが正しく同定されたときの観測水位と計算水位の差の二乗平均、すなわち $E[(h^{obs} - h^{cal})^2]$ の時間的推移を表すと考えられる。前述のように (7)式は無限領域について導かれたものであるが、帯水層(II)において境界条件の内部への影響が小さいと仮定できるならば、帯水層(II)の水位分散も概ね(7)式の形で変動すると考えられる。こうした観点から、本研究では水位分散の理論解を事前情報として逆解析に取り込むことを考え、次のような目的関数を設定する。

$$J_2(P_1, P_2) = \sum_{i=1}^N (\sigma_h(t_i) - \sigma_h^*(t_i))^2 \rightarrow \min. \quad (9)$$

ここに、 $\sigma_h^2(t)$: 理論水位分散(7)式、 $\sigma_h^{*2}(t)$: 計算水位分散、 N : 水位分散を求める時間断面の数である。いま、一斉測水を行う既設井戸が M 本あるとすれば、 σ_h^{*2} は次式で評価できる。

$$\sigma_h^{*2}(t_j) = \sum_{i=1}^M (h_i^{obs}(t_j) - h_i^{cal}(t_j))^2 / M \quad (10)$$

先に述べた目的関数 J_1 が水位そのものの適合性を基準とした決定論的なものであったのに対し、上記の目的関数 J_2 は水位分散という統計量の時間的变化に着目したもので、確率論的な同定基準といえる。言うまでもなく、 J_2 による同定過程では、計算水位が観測水位と異なる地点が存在する。しかし、不均質場の水位分布がランダムに乱れたものであることを考えれば、計算値を個々の観測値に一致させることはむしろ無意味であって、それよりも領域全体としての統計的な適合性を追求することが重要であると考えられる。

4.3 同定基準 J_2 による帯水層(II)の逆解析

さて、同定基準 J_1 では同定できなかった不均質帯水層(II)に、上記の基準 J_2 を適用してみよう。最適化手法としてガウス・ニュートン法を用いれば、正規方程式は次式となる。

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N U_{ij} U_{ik} \Delta P_k = \sum_{i=1}^N (\sigma_h(t_i) - \sigma_h^*(t_i))^2 \cdot U_{ij}, \quad j=1, 2 \quad (11)$$

ここに、 U : パラメータに関する水位分散のヤコビアン行列であり、 $U_{ij} = \partial \sigma_h^2(t_i) / \partial P_j$ 。(11)式を実際に計算するには、 $\sigma_h^2(t)$ に含まれる未知定数 $\sigma_o^2 \rho_o$ を決定せねばならない。ここでは $t = t'$ における水位分散の計算値 $\sigma_h^{*2}(t')$ からそれを与えることにする。

すなわち、等価モデルのパラメータ T_o/S_o が正しく設定されたならば $\sigma_h^2(t') = \sigma_h^{*2}(t')$ であるから、未知定数は(7)式より

$$\sigma_o^2 \rho_o = 8\pi \cdot E[T/S] \cdot \sigma_h^{*2}(t') \cdot t'$$

$$\therefore \sigma_h^2(t) = \sigma_h^{*2}(t') \cdot t' / t \quad (12)$$

となり、(11)式の理論分散 $\sigma_h^2(t)$ は(12)式で置き換えられる。

逆解析の水位観測条件は、図-5(b)と同じく降雨停止後1日、5日の時点における全節点水位データとすれば、(9)(10)式において $N=2$ 断面、 $M=50$ 節点である。図-6は、最初の観測時刻($t'=1$ 日)において $\sigma_h^2(t)$ の未知定数を決定することによって行った逆解析の結果を示している。図-5(b)では同定できなかった現象が $It=5 \sim 7$ 回の反復によって一定値に収束

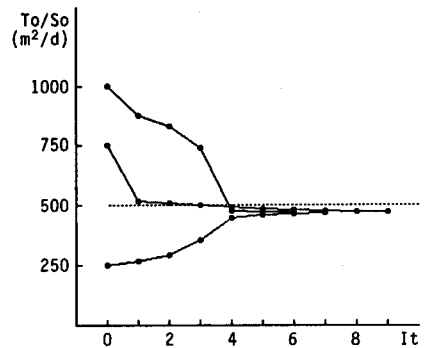


図-6 同定基準 J_2 による逆解析結果
[帯水層(II), データ(b)]

し、同定に成功していることが分かる。ただし、その収束値は約 $470 \text{ (m}^2/\text{day)}$ であって、 $E[T/S]$ の真値 $500 \text{ (m}^2/\text{day)}$ より若干小さい値となっている。この原因としては、帯水層(Ⅱ)の状況が理論分散を導いた諸仮定を満たしておらず、水位分散の時間変化が理論と現象の間で一致していないことが考えられる。

そこで、パラメータ T_o/S_o の種々の値に対して計算分散を求め、その時間変化を理論分散と比較したものを図-7に示す。これによると、計算分散(破線)の中で理論分散(実線)と完全に合致したものはないが、 $T_o/S_o = 500 \text{ (m}^2/\text{day)}$ の場合が全体として時間的な変化が最も近い。このことは、地下水状態の統計的構造として水位分散の理論解(7)式がほぼ妥当であることを示している。

しかし今回、同定には $t = 1, 5$ (日)の観測データを用いており、 $t = 1$ の時刻で理論分散の未知定数を決定しているので、同定は実質的には $t = 5$ において行っていることになる。図によると、 $t = 5$ では理論値は $T_o/S_o = 450$ と 500 の間に位置しており、この差が結果的に収束値にずれを生んでいる。すなわち、同定を行う時刻によっては同定値に誤差を生じる可能性があり、水位を一斉観測する時刻は理論分散の時間変化が同定過程に最も良く反映されるように選ぶ必要がある。具体的に観測時刻をどう設定するかについては今後の検討課題として残されているが、一旦、適切な一斉観測データが得られれば、同定基準J2を用いることによって、従来の基準では解が発散してしまった逆問題を十分な精度で解くことができるという事実は注目すべきことである。

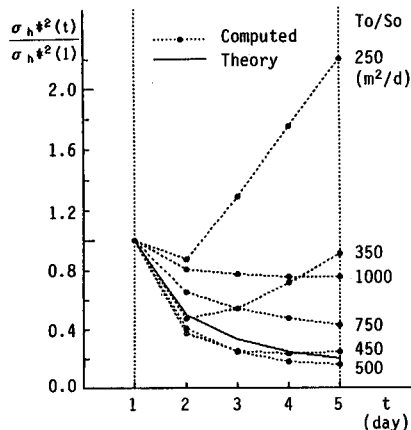


図-7 水位分散の計算値と理論値の比較

5. おわりに

二次元不圧帯水層を対象に、降雨後に低減する地下水位の観測データに基づき、帯水層定数とくに水頭拡散率を推定する逆問題を検討した。本研究で得られた成果をまとめると以下の通りである。

- [1] 計算水位と観測水位の差を最小化する従来からのパラメータ同定基準は、均質帯水層ではきわめて有効であり、水位データの数に限られている場合でも、少ない反復計算でパラメータを正しく同定できる。
- [2] 不均質帯水層では、水位データにその地点のローカリティを反映した不確定成分が含まれるために、従来の同定基準では推定が不安定になり、パラメータが定まらない。
- [3] 著者らが導出した水位分散の理論解を不均質場の逆解析に事前情報として活用することを考え、水位の不確定性の時間変化に着目した新しい同定基準を提案した。
- [4] 水位分散による同定基準を用いれば、複数の適切な時間断面で一斉測水を行うことにより、不均質帯水層においても十分な精度でパラメータが同定可能であることを示した。

最後に、本研究の一部は文部省科学研究費・奨励研究(A)の補助を受けて行われたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 中川 徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，pp.95-124，東京大学出版会，1982。
- 2) 中屋真司・田中 豊：地下水流の解析と逆問題，数理科学，No.274，pp.72-79，1986。
- 3) Freeze, R.A. : A Stochastic-Conceptual Analysis of One-Dimensional Groundwater Flow in Non-uniform Homogeneous Media, Water Resour. Res., Vol.11, No. 5, pp.725-741, 1975。
- 4) Bakr, A.A., L.W.Gelhar, A.L.Gutjahr and J.R.MacMillan : Stochastic analysis of Spatial Variability in Subsurface Flows, 1., Water Resour. Res., Vol.14, No.2, pp.263-271, 1978。
- 5) 原田守博・高木不折：地点観測値に基づく地下水位分布の統計的推定と観測網の評価，第32回水理講演会論文集，pp.377-382，1988。