

成層流実験に基づく $k-\epsilon$ モデルの改良とその適用性
Improved $k-\epsilon$ Model in Stratified Flows

(財) 電力中央研究所 牛島 省 S. Ushijima
(財) 電力中央研究所 田中伸和 N. Tanaka
(財) 電力中央研究所 守屋祥一 S. Moriya

1. はじめに

本研究は、タンク型高速増殖炉の熱過渡時における炉内の冷却材の全体流況を数値的にシミュレートする技術を開発するために、特にその解析モデルに関する検討を行ったものである。炉内の全体流況をシミュレートする解析コードは、大規模なものとなることが予想されるため、本研究では、解析モデルとして比較的扱いやすい2方程式乱流モデルを対象とした。そして、成層流中の乱流計測実験の結果を用いて、解析モデルに対する検討および改良を行い、さらに特性曲線法に基づく精度の高い解析手法を用いてこのモデルの有効性を検討した。

2. 実験の概要

(1)実験装置と計測方法 本研究で用いた実験水路を図1に示す。水路の側面および底面は、平滑で均一な肉厚を有するアクリルプレートでできている。図2に、本実験における計測システムを示す。流速測定には、DISA55X システムを用いた。光源部分は、5mWの He-Neイオンレーザー (NEC 製) であり、フロントレンズの焦点距離は300mmである。散乱光は、光源前方のフォトマルチコーダで受光する。得られたドップラー信号は、DISA55N23周波数トラッカーで処理した後、アナログコンピュータで電圧補正を行い、最終的にデジタルデータレコーダ (TEAC 2000A) によりデジタルデータとして磁気テープに収録した。

水路横断方向の流速成分を計測する場合には、平面反射鏡を利用して、レーザービームを水路底面から上方に向かって入射させ、散乱光を水路上方に設置したフォトマルチコーダにより受光した。その際、自由水面における散乱光のゆらぎを防止するため、水面上に小さなアクリルプレートを置いた。

レーザードップラー流速計を非等温水流中に適用する場合には、流体の屈折率の変化がレーザービームに影響を及ぼすため、これを補正することが必要となる。本研究では、Mizushima ら¹⁾の方法に従って、この点に関する検討を行った。

温度の計測には、シース外径0.25mmの非接地形 CA熱電対を用いた。この熱電対の時定数は約 12msecである。図2に示すように、流速と温度を同時計測する場合には、熱電対の信号は、氷冷式温度補償器、直流アンプを経て、デジタルデータレコーダにより流速に関するデータとともに磁気テープ上に収録される。

温度および流速に関するデータのサンプリング周波数は 200Hz、計測時間は 120秒である。磁気テープに収録したデジタルデータの統計処理には、電力中央研究所計算センターの大型計算機を利用した。

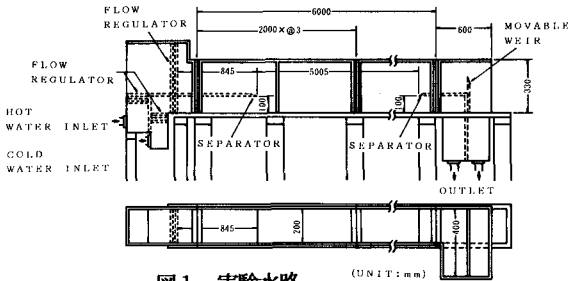


図1 実験水路

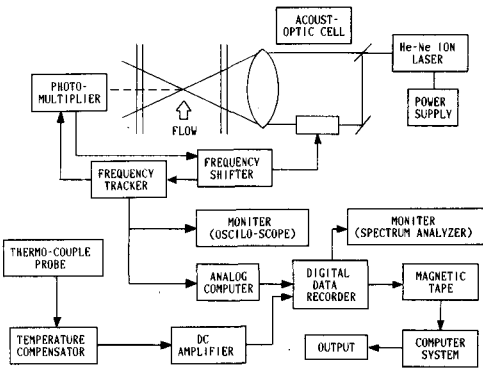


図2 計測システム

表1 実験条件

実験ケース	計測断面位置 x (cm)	U_1 (cm/s)	U_2 (cm/s)	T_1 (°C)	T_2 (°C)
S-1	100.0	4.9	11.3	20.1	14.3
S-2	70.0	6.7	11.8	17.3	14.4
S-3	100.0	7.2	11.8	29.2	14.5

(2)実験条件 本実験では、3 ケースの安定成層流に対する乱流計測を行った。その実験条件を表1に示す。また、表中で用いた記号および座標系を図3に示す。水深については、全ケース同一条件であり、全水深Hは28.0cm、上下層水深 h_1 、 h_2 はそれぞれ18.0cm、10.0cmである。

3. モデル式の検討

前述した成層流中における乱流計測実験の結果を用いて、解析モデルに対する実験的な面からの検討を行い、 $k-\varepsilon$ モデルを基本とした比較的簡略な形で現象に適合するモデル方程式系を提案する。

(1) レイノルズ応力に関する方程式 レイノルズ応力のうち、normal stressに関しては、Boussinesqの仮説を用いた一般の $k-\varepsilon$ モデルでは、せん断流中におけるその非等方向性が正しく表現されないことが指摘されている²⁾。同仮説を用いずにnormal stressを適切に算出する方法としては、レイノルズストレスモデルの代数方程式モデルを用いる方法³⁾等があるが、計算上の取り扱い易さの点から、ここではLaunder⁴⁾が行ったように、各流速変動量成分と乱れエネルギー k の比の値を局所勾配型リチャードソン数 $Ri(=\beta g(\partial \bar{T}/\partial y)/(\partial \bar{u}/\partial y)^2)$ と関係づけてnormal stressを算出するものとした。

$\overline{v'^2}/\overline{u'^2}$ および $\overline{w'^2}/\overline{u'^2}$ なる流速変動量の比の値と、 Ri との関係を示したものが図4および図5である。 $\overline{v'^2}/\overline{u'^2}$ と Ri の関係については、図4に示すように、 $Ri \geq 0.2$ の領域でKomori⁵⁾とYoung⁶⁾の実験結果は全く逆の傾向を示しており、本実験の結果も $Ri \geq 0.3$ ではばらつきが大きくなっている。Komoriはその実験結果の傾向をもたらした原因が、成層度の強い領域では $\overline{v'^2}$ 方程式の浮力生成項が $\overline{v'^2}$ の値を増加させる方向に作用したためであるとしているが、本実験結果からはそのような傾向は余り明瞭に見られない。一方、 $\overline{w'^2}/\overline{u'^2}$ と Ri の関係に関しては、本実験結果はKomoriによるものと良く一致している。図4および図5中の実線で示される関係式を用いると、次式が得られる。

$$\frac{\overline{u'^2}}{k} = \frac{2(1+0.17Ri)(1+0.37Ri)}{0.211Ri^2+0.79Ri+2} \quad \text{---- (1)}$$

$$\frac{\overline{v'^2}}{k} = \frac{0.8(1+0.37Ri)}{0.211Ri^2+0.79Ri+2} \quad \text{---- (2)}$$

shear stress $-\overline{u'v'}$ に関しては、著者ら²⁾が行った一般的な $k-\varepsilon$ モデルを用いた解析においても結果が比較的良好であったことから、従来どおりBoussinesqの仮説に基づく関係式から算出するものとした。そして、成層流中では、渦動粘性係数 $\varepsilon_m(=-\overline{u'v'}/(\partial \bar{u}/\partial y))$ は成層度の影響を受けるため、これを局所勾配型リチャードソン数 Ri の関数 $f(Ri)$ と k^2/ε との積で表されるものとする。すなわち、

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad \text{---- (3)} \quad , \quad \varepsilon_m = f(Ri) \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{---- (4)}$$

実験結果を用いて $\gamma(=\varepsilon_m/(k^2/\varepsilon))$ と Ri との関係を示したものが図6である。ここで、エネルギー散逸率 ε は、 $\overline{u'^2}$ のパワースペクトル $\phi(n)$ に対して、その慣性小領域で成り立つ次の関係式

$$\phi(n) = A \varepsilon^{2/3} n^{-5/3} \quad \text{---- (5)}$$

を用いて算出したものである。ここに n は波数であり、周波数 F を波数に変換する際には $n=2\pi F/\bar{u}$ なる関係式を用いた。また、 A は定数で、Irwin⁷⁾にならい、ここでは0.45とした。図6では ε の算出の際に生ずる誤差等が一因となって実験データはややばらついた分布となっているが、 γ の Ri に対する明確な

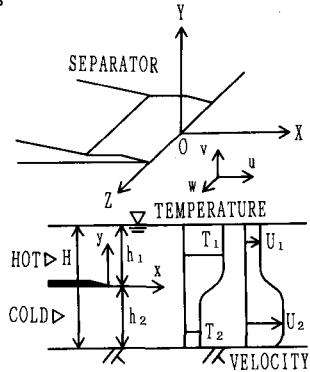


図3 記号と座標系

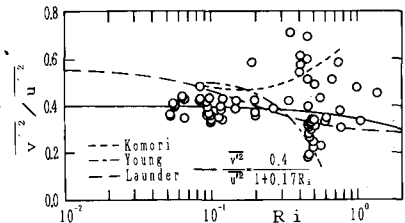


図4 $\overline{v'^2}/\overline{u'^2}$ と Ri の関係

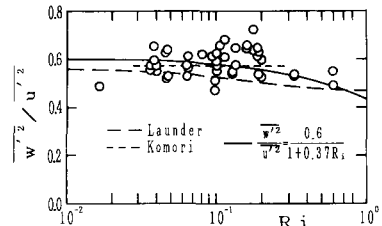


図5 $\overline{w'^2}/\overline{u'^2}$ と Ri の関係

依存性が見られる。図中の実線は、実験データに対し最適となる関係式を示したものである。またLaunderにより提案されたモデルも(4)式と同じ形であり、これを図中では破線で示した。これらの結果から、Launderの関係式も本研究の実験結果とある程度一致しており、モデルとして妥当なものであると考えられるが、表示式の簡略さから、ここでは実線で示される関係式を用いる。従って、 ε_m は次式で表示される。

$$\varepsilon_m = C \nu \frac{1-1.5 Ri}{1+1.5 Ri} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (0 \leq Ri \leq 1/1.5) \quad \text{---- (6-a)}$$

$$\varepsilon_m = 0 \quad (1/1.5 \leq Ri) \quad \text{---- (6-b)}$$

ここに $C \nu$ は0.09である。

(2) 乱流熱流束に関する方程式 乱流熱流束 $-\overline{v' T'}$ に関しても $-\overline{u' v'}$ と同様、次式のように平均温度勾配と乱流熱拡散係数 ε_h との積により決定されるものとする。 ε_h は、渦動粘性係数 ε_m と乱流プラントル数 Prt ($= \varepsilon_m / \varepsilon_h$) を用いて算出する。従来の解析例では Prt を定数 (1.0等) と置く方法もとられているが⁸⁾、Stewart⁹⁾ が指摘したように、成層度が増加するにつれ、スカラー量の乱流拡散効果は運動量の乱流拡散効果と比較してより強く抑制されるため、両者の乱流拡散係数の比である Prt も成層度に応じて変化するものとするのが妥当である。従って、本研究では Prt が Ri の関数で表されるものとした。

$$-\overline{v' T'} = \varepsilon_h \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad \text{---- (7)}, \quad \varepsilon_h = \varepsilon_m / Prt \quad \text{---- (8)}$$

$$1 / Prt = g(Ri) \quad \text{---- (9)}$$

$1 / Prt$ と Ri との関係を示したものが図7である。図中では、 $Ri \geq 0.4$ の領域で、実験結果が上下にばらつき、また $1 / Prt$ が負の値を示す結果も見られるが、これは ε_m または ε_h が0に近い値あるいは負の値をとるためである。 ε_m あるいは ε_h が負となる現象は Komori¹⁰⁾ の結果にも見られ、これは間欠的に生ずる内部波の碎波現象が原因であるとしている。本実験における、このような成層度の強い場での v' と T' のコヒーレンスおよびフェイズの特性を検討した結果¹¹⁾、コヒーレンスが高く、フェイズが約 $1/2\pi$ ずれた傾向を示すことから、成層流中に Stewart が指摘したような内部波状の運動が存在しており、また可視化実験でも図8に示すような巻波状の碎波現象が見られたため、本実験においても Komori の実験で観察されたものと同様の現象が生じていると考えられる。このようなことから、成層度の強い領域においては、流れの場が乱流混合状のものとは異なったものとなり、勾配拡散型のモデル化が困難になる。従って、ここで扱う2方程式乱流モデルでも、そのような場における運動量および熱の輸送機構は適切に表現されていない。本研究では、(6)式にも関連するが、モデルの適用範囲を基本的には $0 \leq Ri \leq 1/1.5$ とし、図7中の実線で示される関係式を用いて、(9)式に相当する次式を用いることとした。

$$\frac{1}{Prt} = \frac{1}{Prto} \frac{1-1.5 Ri}{1+2.6 Ri} \quad (0 \leq Ri \leq \frac{1}{1.5}) \quad \text{---- (10-a)}$$

$$\frac{1}{Prt} = 0 \quad (\frac{1}{1.5} \leq Ri) \quad \text{---- (10-b)}$$

ここに、 $1/Prto$ は1.6とした⁴⁾。

また、 $u' T'$ に関しては、Boussinesq の仮説に基づく関係式では適切な値は算出されないと考えられる

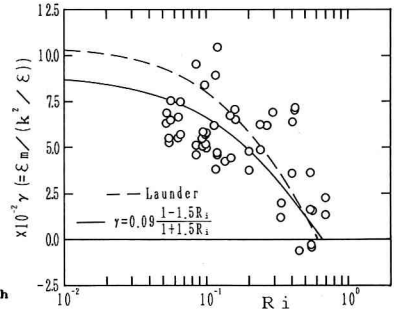


図6 γ と Ri の関係

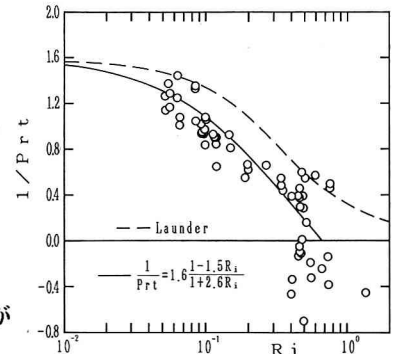


図7 $1/Prt$ と Ri の関係

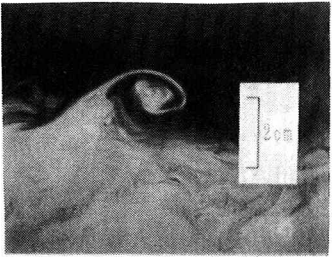


図8 可視化写真

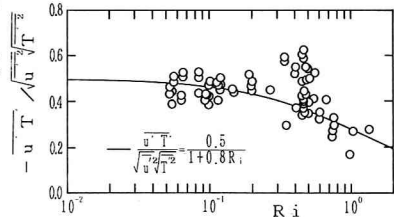


図9 $-\overline{u' T'} / \sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{T'^2}}$ と Ri の関係

ため、図9中の実線で示した関係式を用いて、次式で与えられるものとした。

$$-\overline{u' T'} / (\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{T'^2}}) = \frac{0.5}{1+0.8Ri} \quad \text{---- (11)}$$

4. 解析方法

(1)基礎方程式系 数値解析は、 $\overline{w}=0$ および $\partial(\dots)/\partial z=0$ なる条件が成り立つ2次元場を対象として行った。解析で用いた基礎方程式系は以下のとおりである。

①連続式および運動方程式

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{---- (12)}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_k}) + \{1 - \beta(\overline{T} - T_s)\} F_i \quad \text{---- (13)}$$

②平均温度Tに関する方程式

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} = -\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} (\overline{u'_k T'}) + \alpha \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_k^2} \quad \text{---- (14)}$$

③乱れエネルギーkおよびエネルギー散逸率εに関する方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \beta \overline{u'_i T'} F_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ (C_k \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu) \frac{\partial k}{\partial x_j} \} - \varepsilon \quad \text{---- (15)}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \{ (C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \} + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} (-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad \text{---- (16)}$$

④温度変動量 T'^2 に関する方程式

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{u'_j T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ (C_\theta \frac{k^2}{\varepsilon} + \alpha) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j} \} - C_{\theta_1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{T'^2} \quad \text{---- (17)}$$

以上の方程式中で、 ν は動粘性係数、 α は熱拡散係数であり、 β は体膨張係数である。なお、本解析では、 β は平均温度の関数としている。

上式中のレイノルズ応力および乱流熱流束に関して、次式で示される一般的なk-εモデルの関係式

$$-\overline{u'_i u'_j} = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad \text{---- (18)}$$

$$-\overline{u'_i T'} = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \quad \text{---- (19)}$$

を用いたモデルをMODEL-1とし、先に提案したモデルをMODEL-2として、両モデルによる解析結果の比較検討を行う。

基礎方程式中の係数値を表2に示す。これらの係数のうち、 C_ν および C_k には、従来の数値解析例を参考として、標準的であると考えられる値を用いた。 C_{ε_2} にはHanjalićら¹²⁾の値、 C_{ε_1} および C_{ε_2} にはLaunderら¹³⁾の値を与えた。また、 C_θ および C_{θ_1} に関しては、Chenら¹⁴⁾の値を用いた。

(2)差分化と解析方法 モデル方程式中の各変数が定義される位置は、既報²⁾と同様のスタッガー配置とした。差分格子間隔は等間隔とし、 Δx は2cm、 Δy は1cmである。

移流項の差分化には、その誤差を低減するために特性曲線法を用いた。本報で用いた方法は、図10に示されるように、求めるべき値 ϕ が次式で近似されるとし、

$$\phi = \sum_{p=0,3,q=0,3} a_{i-2,p,j-2,q} \xi^p \eta^q \quad \text{---- (20)}$$

ϕ がその周囲の16点の値から計算されるとしたものである。ここに $\xi = \overline{u} \Delta t$ 、 $\eta = \overline{v} \Delta t$ である。なお、水路上流端、下流端および水表面に最も近い計算点においては、計算の安定性等の理由から、周囲の4点の値から近似する方法を用いた。また、他の項に関しては、空間的には中央差分により差分化した。

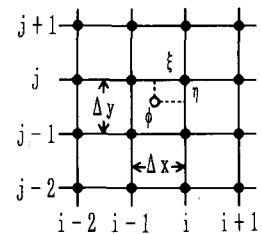


図10 計算に用いるノード点

時間差分に関しては、 k 、 ε 、 T および T'^2 の方程式は陽解法により差分化しており、また運動方程式は、時間項および圧力に新たな時間ステップの変数を用いるセミ・インプリシット法を用いて差分化した。この運動方程式と連続式とから得られる圧力のポアソン方程式の解法には、SOR法を用いている。計算は、ある初期値から非定常計算を行い、十分な時間計算を行った後、時間ステップ間の諸変数の変化が微小になった状態を定常状態とした。

(3)境界条件 水路の上流端部分では、平均流速、平均温度および乱流量については、実験値をその境界条件として与えた。特に、エネルギー散逸率の値としては、(5)式に基づいて算出した値を用いた。また、圧力分布は静水圧分布とした。水路の下流端部分では、諸変数の流下方向の勾配の値を0とした。水路底面付近では、実験値から得られた対数則を水路底面における $\bar{u}$ の境界条件とした。また、 $\bar{v}$ は底面で0、乱流量に対してはフリースリップ条件を用いた。自由水面に関しては、既報¹⁵⁾の数値計算では水深の変動まで考慮できるものとしたが、実験では水表面の波立ち等の現象は見られず、また水深も流下方向にほぼ一定の値であったため、本解析では水深を固定した値とし、流速および乱流量に対しては、フリースリップ条件を水表面の境界条件とした。

5. 結果と考察

図11に実験および数値解析により得られた鉛直方向の平均流速分布と平均温度分布を示す。図11(a)は、ケースS-1に関するものであるが、本研究で提案したMODEL-2による解析結果は、従来の $k-\varepsilon$ モデルであるMODEL-1のものと比較して、運動量および熱の混合層厚が小さく、実験結果に近いものとなっている。図11(b)は、成層度の強いケースS-3に関するものであるが、MODEL-2の結果はMODEL-1と比較して実験値と良く一致するものとなった。

図12(a),(b)にそれぞれケースS-1の渦動粘性係数 ε_m と乱流熱拡散係数 ε_h の分布を示す。ここに $\Delta U=U_2-U_1$ である。 ε_m に関しては、従来の $k-\varepsilon$ モデルであるMODEL-1による解析結果は、実験値のほぼ2倍の値となっている。一方、MODEL-2では、解析結果は実験値と良く適合しており、このことから ε_m に対して成層度の影響を考慮した(6)式が有効に作用したものと考えられる。そしてこれらの ε_m の分布の差異が、図11(a)の平均流速分布の相違をもたらした一因であると考えられる。また、図12(b)の ε_h については、MODEL-2による結果は $y/H=0.0\sim 0.1$ の領域でやや小さい値となっているが、全般的に実験値と一致している。MODEL-1では、乱流プラントル数を1.0としたため、 ε_h は ε_m と同一の分布となっており、その値は実験値と比較して全体的に大きな値となっている。

図13(a),(b)はそれぞれケースS-3の ε_m および ε_h の分布を示すものである。

表2 モデルの係数値

C_v	C_k	C_ε	C_{ε_1}	C_{ε_2}	C_θ	C_{θ_1}
0.09	0.09	0.075	1.44	1.90	0.13	1.25

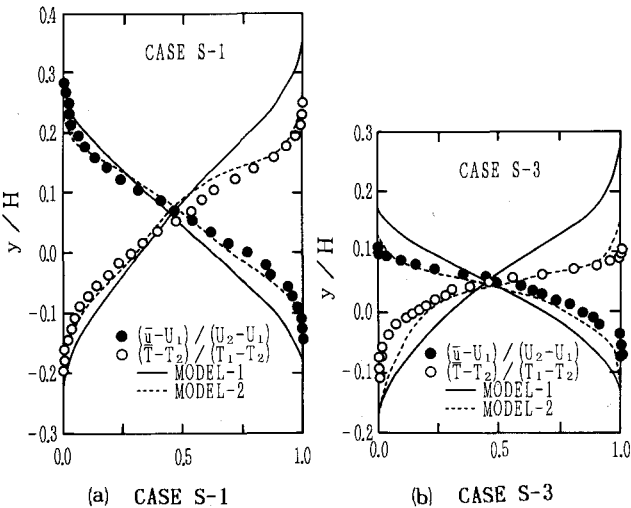


図11 無次元流速および温度の分布

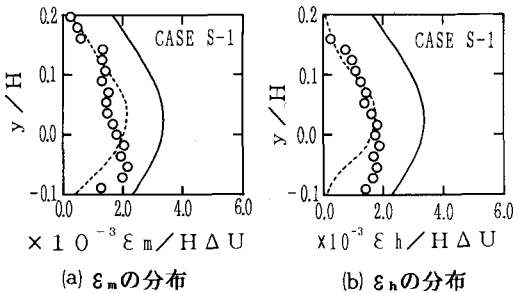


図12 CASE S-1の乱流拡散係数
(——MODEL-1,-----MODEL-2)

MODEL-2の結果のうち、 ε_m は実験値と良く一致している。また、 ε_h は0に近い値となっている。一方、MODEL-1の結果は、 ε_m および ε_h ともに実験値と比べて過大な値となっている。

図13(a)、(b)両図において、 ε_m および ε_h が負となる領域が存在するが、先述したように、本研究で扱う2方程式乱流モデルは、このような成層度が強い流れ場における運動量や熱の輸送機構を適切に表現していない。しかし、両図に見られるように、成層度の強い

領域では運動量および熱の拡散効果そのものが小さく、その結果、平均流速および平均温度の分布に関しては、図11(b)に示したように MODEL-2の解析結果と実験値との差異はわずかなものになったと考えられる。

6. 結論

本研究では、計算時間および解析上の安定性等の面から比較的取扱いやすい2方程式乱流モデルを対象として、乱流計測実験の結果を用いてその改良を行った。さらに、高精度の特性曲線法による数値解析を行って、このモデルの有効性を検討した結果、平均流速分布および平均温度分布の解析結果が改善され、実験値と良く適合するものとなることが認められた。

《参考文献》

- 1) Mizushima, T., etc.; Proc. R. Soc. Lond., A.366, 1979
- 2) Ushijima, S., etc.; CRIEPI REPORT, E385002, 1987
- 3) McGuirk, J.J. and Rodi, W.; J. Fluid Mech., 1979
- 4) Launder, B.E.; J. Fluid Mech., 1975
- 5) Komori, S., etc.; J. Fluid Mech., 1983
- 6) Young, S.T.B.; Queen Mary Coll., London, Rep. QMC-EP6018, 1975
- 7) Irwin, H.P.A.H.; J. Fluid Mech., 1973
- 8) Viollet, P.L.; EDF Report, E44/80-17, 1980
- 9) Stewart, R.W.; Radio Science, vol. 4, 1969
- 10) Komori, S.; Ph.D., Kyoto University, 1980
- 11) 牛島省他; 昭和62年原子力学会秋の大会
- 12) Hanjalić, K. and Launder, B.E.; J. Fluid Mech., 1972
- 13) Launder, B.E., etc.; J. Fluid Mech., 1975
- 14) Chen, C.J. and Rodi, W.; IAHR 16th Congress, 1975
- 15) 牛島省他; 昭和61年土木学会年講

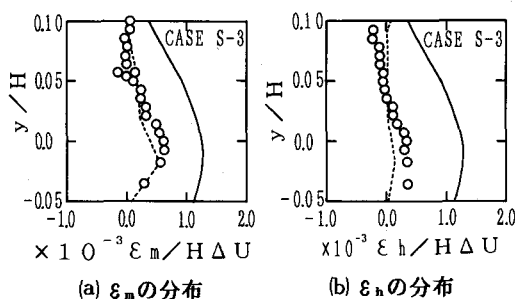


図13 CASE S-3の乱流拡散係数
(——MODEL-1, ----MODEL-2)